ANFANGSGRÜNDE DER HÖHEREN MECHANIK

Jacob Philipp Kulik

Digitized by Google

S.A. 24. B. 46.

Digitized by Google

19634 B.

Digitized by Google

Digitized by Google

Anfangsgründe
der
höheren Mechanik.

Von

Dr. Jakob Philipp Kulik,
öffentl. und ordentlichen Professor der höheren Mathematik an der Prager k. k. Universität, der k. böhm. G. d. W. u. d. Landwirthschaftsgesellschaft in Steiermark Mitgliede.

Every accession, which Man gains to his knowledge, is also an accession to his power, and extends the limits of his empire over the world, which he inhabits.
Bacon.

Mit dreiundzwanzig Steintafeln.

Leipzig. In Kommission bei Friedrich Fleischer.
Prag. In Kommission bei Kronberger und Ziwnatz.

1846.

Digitized by Google

Gedruckt bei Johann Spurny.

Digitized by Google

Vorwort.

Seit dem Jahre 1826 hält der Verfasser an der hiesigen Universität öffentliche Vorlesungen über die höhere Mechanik, für einen zwar kleinen, aber auserlesenen Kreis von Zuhörern, bei welchen, in der Regel, Talent, Eifer und Fleiß glücklich vereinigt anzutreffen sind.

Um dem gedankenlosen und zeitraubenden Niederschreiben der Vorträge während der Vorlesestunden zu begegnen, hat der Verfasser gleich im ersten Jahre seines Lehramts Schriften entworfen, welche den Zuhörern mitgetheilt wurden, und welche von Jahr zu Jahr mit Bemerkungen, so wie es die Fortschritte der Wissenschaft oder das Bedürfniß seiner Hörer mit sich brachten, erweitert wurden. In dem Verlaufe von fast 20 Jahren, wurden diese Schriften dreimahl überarbeitet, und es kann daher von der Mehrzahl der Gegenstände des vorliegenden Buches behauptet werden, daß Horaz'ens Vorschrift „nonum prematur in annum“ gewissenhaft befolgt worden sei.

In einem Lehrbuche der Mechanik soll eigentlich nichts Neues gelehrt, und nur das bereits Bekannte in einem geordneten Vortrage, und in einer leicht faßlichen Form einem Anfänger zugänglich gemacht werden, weil denn doch neue Entdeckungen und Erweiterungen der Wissenschaft besonderen Abhandlungen vorbehalten sind. Von dieser Regel hat sich

Digitized by Google

der Verfasser in Bezug auf die Kettenlinien, welche selbst in vorzüglichen Lehrbüchern bisher gar zu flüchtig abgefertigt wurden, eine Ausnahme erlaubt. Daß er diesen Zweig der Mechanik seit vielen Jahren mit Vorliebe gepflegt habe, beweisen seine zwei in den Jahren 1832 und 1838 erschienenen Aufsätze, *) welche unter den Abhandlungen der k. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften einen ehrenvollen Platz erhielten. Dem Verfasser ist es gelungen in den immergrünen Auen der Theorie so manche neue Wahrheit aufzufinden, und aus ihnen einen Blüthenkranz zu winden, welcher für den Bau der Kettenbrücken, der Gewölbe und der Hängebrücken neue Anwendungen verspricht, und allen wissenschaftlich gebildeten Technikern ein weites Feld ihrer Thätigkeit eröffnet.

1. Fast allgemein ist man nach Navier's Vorgange der Meinung, daß die Krümmung der Tragketten eine Parabel sei, welches doch nur der Fall wäre, wenn die Tragketten als eine geometrische Linie ohne alles Gewicht angesehen werden könnten. Der Verfasser zeigt nun §. 354, daß die Kettenbrückenlinie eine eigenthümliche transzendente Kurve sei, welche die Parabel und die gleichgespannte Kettenlinie als spezielle Fälle einbegreift. Allerdings kann es dem Bauführer einer Kettenbrücke gleichgiltig sein, welche Krümmung eigentlich die Tragkette annimmt, da er die Länge der Tragstangen nicht durch Rechnung, sondern durch Versuche zu bestimmen gewohnt ist: allein sehr wichtig sind, dessen ungeachtet die Folgerungen, welche für den Kettenbrückenbau hieraus fließen, daß nämlich:

a. Die Kettenbrücken in einem Bogen auch bei größten Spannweiten möglich sind, bei welchen die parabolische Tragkette schon durch ihr eigenes Gewicht reißen würde,

b. daß die nach der so bestimmten, naturgemäßen Kettenbrückenlinie konstruirten Tragketten den kleinsten Bedarf

*) Theorie und Tafeln der Kettenlinie. Prag 1832, und Untersuchungen über die Kettenbrückenlinie. Prag 1838.

Digitized by Google

von Eisen in Anspruch nehmen, und die größte Festigkeit gewähren, ferner weil

c. die Längen ihrer Tragstangen mit einer Genauigkeit berechnet werden können, welche jede empirische Bestimmung weit übertrifft; so erhält hierdurch ein jeder Theil der Kettenbrücke eine durch Rechnung im voraus bestimmte, dessen Spannung angemessene Stärke, und man erlangt zugleich die Beruhigung, daß die Dauer einer so konstruirten Kettenbrücke auf eine dermalen noch unübersehbare Anzahl Jahre gesichert bleibt: so wie ein neues Kleid nur dann am längsten währt, wenn es sich dem Körper, so zu sagen ohne Spannung überall anschließt.

2. Soll ein freies, unbelastetes Tonnen- oder Kuppel-Gewölbe in jedem seiner Punkte denselben Druck erleiden, und dabei die ganze Masse des Gewölbes sich gegenseitig stützen, so muß, nach §. 405, die centrische Linie in jedem vertikalen Querschnitte des Gewölbes nach einer gleichgespannten Kettenlinie, welche mit der gemeinen Kettenlinie ja nicht zu verwechseln ist, fortlaufen. Solche Gewölbe von gleichem Drucke lassen sich bei jeder Spannweite ohne Anstand herstellen, und erfordern den kleinsten Bedarf von Bausteinen. Der Verfasser zeigt §. 412, wie die Kurven für die Lehrbögen dieser Gewölbe zu verzeichnen sind, welche Lage und Länge die Fugen einzelner Gewölbsteine hierbei erhalten *)

*) Gewöhnlich begnügen sich die Baumeister, Wölbungen bei Wohngebäuden nach kreisförmigen Lehrbögen herzustellen. Obschon nun die Kreislinie keine Stützungskurve der Wölbungen abgibt; so ist dieses Verfahren bei kleinen Spannungen, wie die der Fenster und Thüre, mit keinen Nachtheilen verbunden, weil das Gewicht des Gebäudes und die Bindungskraft des Mörtels, den sonst bedeutenden Seitenschub solcher Wölbungen aufhebt. Wie aber dieses Verfahren bei größeren Spannungen, z. B. Brückengewölben, in Anwendung gebracht wird, treten alle Fehler dieser Konstruktion in den Sprüngen solcher Gewölbe, welche eigentlich als Vorbothen ihres Einsturzes zu betrachten sind, im gemeinen Leben aber mit dem Ausdrucke „Setzen des Gewölbes" bemäntelt werden, desto sichtlicher hervor. Diesem Umstande allein schreiben wir den am 11. Jäner 1846 erfolgten Einsturz des Viaduktes von Barentin, zwischen Havre und Rouen zu.

Digitized by Google

Endlich betrachtet der Verfasser §. 425.

3. Eine neue Art hölzerner Brücken, die Hängebrücken, welche vor jeder der bisher bekannten Gattungen Holzbrücken, den wesentlichen Vorzug behaupten, daß sie

a) bei jeder Spannweite in einem Bogen errichtet werden können und

b) auf die Dauer von Jahrhunderten möglich sind,

c) daß sie die genaueste Bestimmung ihrer Tragfähigkeit zulassen, so daß man gewissermassen von jedem dabei verwendeten Spane eine Rechenschaft abzulegen vermag.

Sie unterscheiden sich sowohl der Form, als auch dem Prinzipe nach, von allen bisher ausgeführten, oder in Vorschlag gebrachten Holzbrücken. Wer die wunderlichen den naturgemäßen Gesetzen der Statik durchaus nicht entsprechenden Konstruktionen von Holzbrücken der Neuzeit mit der Simplizität dieser Bauten zu der Zeit der Römer mit unpartheiischem Auge vergleicht, der wird nicht in Abrede stellen, daß der Holzbrückenbau derjenige unter den verschiedenen Zweigen der technischen Baukunst sei, welcher in einem Zeitraume von 2000 Jahren, von der Eleganz der Konstruktion abgesehen, keine Fortschritte gemacht hat. Der höheren Mechanik ward es vorbehalten, diesen seit Jahrhunderten übergreifenden Empirismus aufzudecken und zu berichtigen. Der Verfasser gibt sich der freudigen Hoffnung hin, daß in einer Zeit, wie die jetzige, wo die technischen Künste einen so kühnen Aufschwung erhielten, wo die Natur durch unerhörte Ueberschwemmungen in Amerika, in Sachsen, Böhmen, Tirol und Galizien den sorglosen Menschen zwingt, sich besser vor Wasserschäden zu verwahren, daß der im dritten Kapitel des zweiten Buches ausgestreute Same früher oder später gute Früchte tragen wird — hat doch Newton die Brennbarkeit des Diamanten hundert Jahre vorher ausgesagt, als dieselbe durch eifriges Bemühen der Chemiker zu Stande gebracht wurde!

Digitized by Google

An guten Lehrbüchern über die Mechanik fehlt es zwar in unserer Zeit nicht, Eytelwein's, Ohm's und Poisson's Schriften können als ausgezeichnet gerühmt, und jedem angehenden Mathematiker zu seiner weiteren Ausbildung empfohlen werden: wie denn der Verfasser selbst bei den verschiedenen Entwürfen seiner Schriften über Mechanik, diese Schriftsteller stets als Muster sich vorhielt, und dieselben nicht selten wörtlich benützt hat: allein die meisten der mit jedem Jahre über Mechanik erscheinenden Werke schlagen einen Weg ein, welcher deshalb den Namen des verkehrten verdient, weil man aus lauter Scheu vor dem geringen Kraftaufwande, welchen das Studium der sogenannten höheren Analysis in Anspruch nimmt, sich nicht scheut, die zehnfach größere Kraft auf die Lösung einzelner Aufgaben zu verwenden, als außerdem bei Voraussetzung dieser Sätze zu deren gründlicher Erfassung nöthig geworden wäre. Wer da weiß, mit welchem Aufwande von Kunstgriffen der Algebra und der Elementar-Geometrie oft eine einzige Wahrheit der Mechanik entwickelt wird, um bei der Aufsuchung einer anderen dieser Wahrheiten einen zweiten Cyklus solcher Operationen, die mit den vorhergehenden in keiner sichtbaren Verbindung stehen, auf's Neue vorzunehmen, während mittelst der höheren Analysis gewöhnlich durch eine Formel oder durch Anwendung einiger einfachen Sätze, diese Art von Treibjagden und Belagerungen von Citadellen gänzlich vermieden wird: der wird zugeben, daß der kürzeste Weg zu einer gründlichen Erlernung der Mechanik nur durch die höhere Analysis möglich wird. Gleich dem Faden der Ariadne leitet die Analysis den Wanderer sicher durch alle Irrgänge menschlicher Fehlschlüsse auf ein unübersehbares Gefilde von Wahrheiten, die sich ihm da als eine schöne Blume, dort als eine süße Frucht ungesucht darbieten. An der Hand dieser edlen Führerin kommt der Wanderer stets unaufgehalten dem vorgesteckten Ziele näher: durch unübersteigliche Berge von Hindernissen baut sie ihm augenblicklich einen Tunnel, der ihn in seiner Bahn vorwärts bringt: durch Wüsten und unzugäng-

Digitized by Google

liche Wege, über Abgründe und Wasserscheiden richtet ihm die Analysis Eisenbahnen und Brücken vor, auf welchen er rasch vorwärts schreitend, nur noch die grünen Oasen der Wüsten erblickt, um auch mit diesen Wahrheiten seine Kenntnisse zu bereichern.

So wie ein Kunstjünger, der Rom besuchen will, um sich mit den mannigfachen Kunstschätzen dieser ehemaligen Hauptstadt der Welt bekannt zu machen, nur dann seinen Zweck in der kürzesten Zeit erreicht, wenn er vorerst sich die gründliche Kenntniß der Sprache, der Sitten und Gebräuche des Volkes und vor Allem die zur Bestreitung der Reise erforderlichen Geldmittel verschafft haben wird: eben so muß ein Anfänger, welcher das Gebiet der Mechanik betritt, eine tüchtige Kenntniß der höheren Analysis mitbringen, ohne welche seine Reise nur langsam von Statten gehen kann, und wenn er diese zurückgelegt hat, so wird er wohl thun, die ihm abgehenden Kenntnisse der Analysis nachzuholen, und das Studium der Mechanik von vorne wieder anzufangen; denn nur die höhere Analysis befähigt ihn in neuen Untersuchungen sich einen eigenen Weg zu bahnen, und sich frei und sicher in der selbst gewählten Bahn zu bewegen. Die Erfahrung bestättiget diese Wahrheit zur Genüge. Man kann die Erfindung der Kettenbrücken erst von dem Zeitpunkte an datiren, da Navier durch eine mathematische Theorie der Kettenbrücken ihren Bestand für die Dauer nachgewiesen hat, und die Dampfmaschinen haben erst dann eine allgemeine Aufnahmen gefunden, nachdem Watt, der so viel zur Vervollkommung dieser Maschinen beigetragen hat, daß er gewissermassen als Erfinder derselben betrachtet werden kann, einzelne Theile derselben einer mathematischen Berechnung unterworfen und eine Theorie der Dampfmaschine aufgestellt hat, die ihm einen ehrenvollen Platz unter den Mathematikern Englands sichern wird.

Da die Dampfmaschinen in neuerer Zeit so allgemein verbreitet werden, daß es nicht leicht einen größeren Ort in

Digitized by Google

Deutschland gibt, wo nicht eine oder mehrere derselben in verschiedenen Formen in Anwendung kommen; so hat der Verfasser sich erst vor Kurzem entschlossen, eine gedrängte Darstellung dieser Maschinen und ihrer Theorie zu entwerfen, wodurch er auch dem ausgesprochenen Wunsche mehrerer seiner Zuhörer entgegengekommen ist. Von diesem Theile seiner Arbeit gilt daher die oben angeführte Behauptung nicht, daß er zu wiederholten Malen entworfen und überschrieben worden sei, weil die Kürze der Zeit, welche nebstdem auf die Uebertragung der französischen und englischen Maße in das österreichische Maß in Anspruch genommen wurde, eine abermalige Umformung des Entwurfes nicht zuließ. Die ausführlichen Tafeln über die Spannung, den Druck, die Temperatur, das relative Volumen, die Dichtigkeit, das Gewicht und die Kraft des Dampfes, die sämmtlich neu berechnet wurden, mögen als Belege hiezu dienen. Das Geheimniß der Dampfmaschinen liegt eigentlich in dem Umstande, daß man mit Wasserdampf schon bei 135 Graden R., einer Temperatur welche bei den Lokomotiven eben nicht selten erscheint, einen 65800fachen Druck seines Gewichtes zu erzeugen vermag, d. i. man erhält aus einer Wassermenge von 7 Wiener Loth im Gewichte, wenn dieselbe auf die genannte Temperatur erwärmt wird, einen Wiener Kubikfuß Dampf, welcher auf jeden Quadratfuß Fläche einen Druck von 144 W. Centner ausübt. Gibt es wohl eine Kraft in der Natur, welche eine so erstaunliche Wirkung hervorzubringen im Stande ist, als eben der Wasserdampf?

Die auffallendste Wirkung der Dampfkraft zeigt sich aber vorzüglich auf Eisenbahnen in der außerordentlichen Geschwindigkeit, welche eine Lokomotive anzunehmen vermag: während man in Deutschland mit einer Geschwindigkeit von 4 Meilen auf eine Stunde oder von 27 Fuß auf eine Sekunde damit fährt, hat man es auf der Eisenbahn, zwischen Liverpool und Manchester mit Lokomotiven, die unterweges nur einmal anhalten, bereits auf eine Geschwindigkeit von 50 engl. Meilen oder eilfthalb österr. Meilen in einer Stunde mithin auf 71

Digitized by Google

Fuß in einer Sekunde gebracht. Diese einem Sturmwinde vergleichbare Geschwindigkeit ist aber keineswegs die Grenze, auf welche sich noch die Dampfkraft steigern läßt, sobald nur einige erzielbaren Ersparnisse in dem Gewichte der Maschine werden vorgenommen und die darauf Bezug habenden polizeilichen Maßregeln, dieser Geschwindigkeit gemäß, werden geordnet worden sein. Bringt man diesen Vortheil, der Schnelligkeit in Anschlag, so läßt sich die Pferdekraft mit der Kraft des Dampfes auf Eisenbahnen gar nicht vergleichen; die Last von 1632 W. Centnern (90 engl. Tonnen), welche man auf der erwähnten Eisenbahn in einer Stunde fortbringt, würde allein schon 270 Pferde erfordern, um sie binnen einem Tage auf Frachtwägen durch dieselbe Entfernung fortzuschaffen. Nicht minder auffallend sind die Wirkungen des Dampfes auf die Schifffahrt, welche seitdem Dampfschiffe das Meer nach allen Richtungen befahren, die Seereise schneller,*) sicherer und minder kostspielig macht. Eben so wird die Dampfkraft zum Betrieb anderer mechanischen Vorrichtungen allenthalben mit dem größten Vortheile angewendet: England, Frankreich und Belgien verdanken ihr den Aufschwung ihrer Industrie über die aller benachbarten Staaten.

Für Anfänger, welche in der Analysis nicht fest genug sind, mag noch bemerkt werden, daß die Theorie der Dampfmaschinen sich auf den einfachsten Sätzen der Mechanik gründet, und daß zu ihrer Erfassung blos die Kenntniß des Integrales 36)

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\lambda(a+bx)$$

erfordert wird.

Was sich in einem Zeitraume von etwa 80 Vorlesestunden alljährig zum Vortrage bringen läßt, enthält vorliegendes Werk reichlich, und wahrscheinlich noch mehr, so

*) Der englische Offizier **Wagborn** hat im verflossenen Jahre die Reise mit der englischen ostindischen Post von Bombai über das rothe Meer, Egypten, das mittelländische Meer, Triest, Lübeck nach London, also einen Weg über 1100 geogr. Meilen, in 255 Stunden zurückgelegt, zu welcher man sonst zwei Monate gebraucht hat.

Digitized by Google

daß Jedem, der aus freiem Antriebe sich desselben beim Studium der Mechanik bedienen will, überlassen bleibt, dasjenige zu wählen, was ihm zusagt. Unter den Kolloquien des Erasmus befindet sich ein sehr unterhaltendes Gespräch, zwischen Apicius einem Philosophen und Spudäus einem Manne, der in der Absicht einer großen und sehr gemischten Gesellschaft ein Mahl zu geben, sich bei dem Epikuräer über die besten Mittel Raths erholt, es Allen recht zu machen. So mag denn der Leser dieser Apicius sein, und der Verfasser den Spudäus vorstellen: denn die Welt ist nichts als ein großes Diner verschiedener einander fremden Personen vom verschiedenen Geschmack und Alter, und wir müssen unser Selbst ihrer Sinnesart, unsere Würzen ihrem Temperamente anpassen, wenn wir sie gewinnen, oder auch nur zufrieden stellen wollen.

Das alphabetische Sachregister gibt Aufschluß über eine nicht unbedeutende Zahl technischer Ausdrücke, deren Kenntniß dem in das praktische Leben Uebertretenden nicht unwichtig sein dürfte.

Schließlich bemerkt der Verfasser, daß er unter den verschiedenen Sorten Druckpapiere absichtlich das minder schöne Buttenpapier gewählt hat, obschon es theurer ist als das fast allgemein zur Mode gewordene Maschinenpapier: denn schon jetzt zeigen sich fast überall die Gebrechen des letzteren. Bücher, die vor 10 bis 20 Jahren auf diesem Papiere gedruckt wurden, zerfallen bei aller Schonung in Stücke, und tragen offenbar das Gepräge einer allmäligen Verkohlung: natürlich kann diese Eigenschaft des Maschinenpapieres, welche in dessen chemischer Bleichung ihren Grund hat, so schätzbar sie bei der Mehrzahl philosophischer, historischer und belletristischer Werke sein mag, bei mathematischen Lehrbüchern, die oft in die Hand genommen werden, nicht eben wünschenswerth erscheinen.

Prag, im Februar 1846.

Der Verfasser.

Digitized by Google

Inhalt.

Seite

Erstes Buch. Statik fester Körper.

I. Einleitung 1
II. Resultirende mehrerer an einem Punkte wirkender Kräfte 10
III. Gesetze des Gleichgewichts von Kräften, welche verschiedene Angriffspunkte haben 18
1. Der mathematische Hebel . . . . . —
2. Resultirende von Kräften, deren Angriffspunkte in einer Ebene liegen 21
3. — in verschiedenen Ebenen gelegen sind 26
IV. Vom Schwerpunkte 33
1. Schwerpunkt ebener Kurven 34
2. „ ebener Figuren 40
3. „ krummer Oberflächen 48
4. „ der von Flächen eingeschlossenen Körper 53
5. „ der Rotationskörper 60
6. Statische Komplanation und Kubirung 66
V. Von der Reibung und Steifigkeit der Seile 68
1. Die Reibung . . . . . —
2. Steifigkeit der Seile 77
VI. Festigkeit der Körper 79
1. Absolute Festigkeit . . . . . —
2. Respektive Festigkeit 84
3. Balken von größter Festigkeit 91
4. Respektive Festigkeit der Balken vom gegebenen Querschnitte 96
5. Respektive Festigkeit gebogener Balken 108

Digitized by Google

Seite

6. Rückwirkende Festigkeit 117
7. Torsions-Festigkeit 120
VII. Stabilität der Körper 124
1. Stabilität der Mauern und Pfeiler 126
2. Druck der Erde auf die Futtermauern 130
VIII. Die Kettenlinien 137
1. Die gemeine Kettenlinie . . . . . —
2. Die gleichgespannte Kettenlinie 150
3. Die Kettenbrückenlinie 156

Zweites Buch. Anwendungen der Statik.

. Beschreibung und Berechnung der Kettenbrücken . . . 173
II. Theorie der Gewölbe 193
III. Die Hängebrücken 208
IV. Der Hebel und die Wage 224
V. Rollen und Flaschenzüge 236
VI. Das Wellrad 243
VII. Räderwerke 256
VIII. Schiefe Ebene, Keil, Schraube 274
IX. Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten 282

Drittes Buch. Dynamik.

I. Freie, geradlinige Bewegung 294
II. Die Wurfbewegung 304
III. Centralbewegung 314
1. Das Gravitationsgesetz . . . . . —
2. Planetenbahnen 320
3. Die Schwungkraft 325
IV. Bewegung auf vorgeschriebenem Wege 327
1. Bewegung auf krummen Linien 331
2. Das einfache Pendel 332
3. Pendelbewegung in widerstehender Luft . . . 339
V. Das Trägheitsmoment 344
1. Eigenschaften der Trägheitsmomente . . . . —
2. Trägheitsmoment der Körper von gegebener Gestalt 353
VI. Drehung eines festen Körpers um eine Axe . . . 358
1. Gleichförmige Umdrehung . . . . . —
2. Das zusammengesetzte Pendel 363
VII. Stoß fester Körper 368
1. Gerader Stoß fester Körper 369
2. Schiefer Stoß fester Körper 377

Digitized by Google

Seite

VIII. Bewegung eines Systems fester Körper 380
1. Allgemeine Lehrsätze der Bewegung 381
2. Bestimmung der Bewegung eines Körpers . . . 396
3. Anderweitige Darstellung der Arendrehung eines Körpers 409

Viertes Buch. Hydrostatik.

I. Gleichgewicht flüssiger Körper überhaupt 420
II. „ schwerer tropfbarer Flüssigkeiten 427
1. Druck der Flüssigkeit auf die Wände eines Gefäßes . —
2. Mittelpunkt des Druckes 435
3. Aufgaben über die Anwendung dieser Lehre . . . 440
III. Gleichgewicht der in Flüssigkeiten eingetauchten Körper . 447
IV. Das Metacentrum 458
V. Gleichgewicht elastischer Flüssigkeiten 472
1. Das Höhenmessen mit dem Barometer 481
2. Der Luftballon 488
VI. Anwendungen des Luftdruckes zum Wasserheben . . . 495
1. Von den Hähnen und Ventilen . . . . . —
2. Von den Kolben und Stiefeln 499
3. Die Saugpumpe 501
4. Druckpumpen 510
5. Kolbenlose Pumpen 517

Fünftes Buch. Die Hydrodynamik und Hydraulik.

I. Ausfluß des Wassers aus Gefäßen 520
II. Anwendungen verstehender Lehren 540
1. Von den Springwerken . . . . . —
2. Von den Uebersällen 543
III. Bewegung des Wassers in Flußbetten 554
1. Stromgeschwindigkeitsmesser . . . . . —
2. Mittlere Geschwindigkeit des fließenden Wassers . 560
3. Ueber die vortheilhafteste Gestalt der Kanäle . . 572
IV. Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen 582
V. Die Wasserräder 598
1. Stoß des Wassers . . . . . —
2. Das oberschlächtige Wasserrad 604
3. Das unterschlächtige Wasserrad 611
4. Das horizontale Wasserrad 618
VI. Maschinen zum Wasserheben 628
1. Die Spiralpumpe . . . . . —

Digitized by Google

	Seite
2. Die Wasserschnecke	637
3. Der hydraulische Widder	646
VII. Die Dampfmaschinen	654
1. Allgemeine Betrachtungen über Dampfmaschinen	—
2. Der Dampfwagen	667
3. Die Dampfschiffmaschine	692
4. Die stehenden Dampfmaschinen	701
Sachregister	725
Autorenregister	747
Druckfehler	749

Digitized by Google

Erstes Buch.

Statik fester Körper.

I. Einleitung.

1. Erklärung. Materie nennt man Alles, was auf irgend eine Weise im Stande ist, einen Eindruck auf unsere Sinne zu machen. Körper sind Theile der Materie, die nach allen Richtungen hin begrenzt sind.

2. Erklärung. Die Masse eines Körpers ist die Menge der Materie, aus welcher derselbe besteht. Man sagt: ein Körper ist desto dichter, je größer die Menge der unter seinem Volum enthaltenen Materie ist. Die Dichtigkeit ist sonach die Beziehung der Masse eines Körpers zu seinem Volumen. Ein Körper, dessen sämmtliche Theile dieselbe Dichtigkeit besitzen, heißt gleichartig oder homogen, im Gegenfalle aber ungleichartig oder heterogen.

3. Lehrsatz. Die Dichtigkeiten zweier gleichartigen Körper, deren Massen und Kubikinhalte verschieden sind, verhalten sich direkt wie ihre Massen und umgekehrt wie ihre Inhalte.

Beweis. Sind M, M' die Massen zweier Körper, V, V' ihre Inhalte und D, D' ihre Dichtigkeiten, und man wählt zur Vergleichung einen dritten Körper von der Masse M', Inhalte V

Digitized by Google

und Dichtigkeit δ: dann hat man (2)

$$D:\delta=M:M' \text{ und}$$
$$\delta:D'=V':V$$
$$\text{sonach } D:D'=MV':M'V.$$

4. Folgesatz. Aus dieser Proportion folgt sogleich

$$DM'V=D'MV' \text{ oder } D=\frac{M}{M'}\cdot\frac{V'}{V}\cdot D'$$

nimmt man also die Masse M' eines Körpers zur Einheit, und eben so dessen Volum V' als Einheit des Inhaltes, so sind dann

$$\frac{M}{M'}=m,\ \frac{V}{V'}=v,\ \frac{D}{D'}=\varrho$$

Verhältnißzahlen, mit denen alle arithmetischen Operationen gestattet sind; man erhält so:

$$1)\ m=v\varrho,\ v=m:\varrho,\ \varrho=m:v$$

5. Erklärung. Ein Körperelement oder ein materieller Punkt heißt ein Körper, dessen Dimensionen sämmtlich unendlich klein sind. Ein jeder andere Körper ist ein Aggregat solcher materiellen Punkte.

6. Folgesatz. Heißen dx, dy, dz die drei Dimensionen eines Körperelementes, und dm dessen Masse, so hat man sein Volum $dv=dxdydz$ (A*. 1681) und also nach (4)

$$2)\ dm=\varrho dxdydz$$

woraus sich durch Integration, zwischen den Grenzen, innerhalb deren der Körper enthalten ist, dessen Masse bestimmen läßt. Ist der Körper gleichartig (2), so tritt hier ϱ, als eine konstante Größe außerhalb des Integralzeichens, im Gegenfalle ist ϱ selbst eine Funktion der veränderlichen Größen, x, y, z. Man hat sonach im ersten Falle $m=\varrho\int dxdydz$, im andern Falle $m=\int\varrho dxdydz$.

7. Erklärung. Man bestimmt die Lage eines Punktes im

*) Das einem Citat beigefügte A bedeutet den §. in meinem Lehrbuche der höheren Analysis. Prag, 1843. Alle andern Citate beziehen sich auf die vorangehenden Sätze der Mechanik.

Digitized by Google

Raume, durch deſſen Koordinaten, bezogen auf drei koordinirte Ebenen, die ſich unter rechten Winkeln im Anfangspunkte ſchneiden, oder auch durch deſſen Polarkoordinaten (A 1419). Befindet ſich in einem ſo beſtimmten Punkte ein Element des Körpers, ſo heißt derſelbe der Ort des Elementes, und der Inbegriff der Orte aller Körperelemente für einen und denſelben Körper, heißt der Ort des Körpers.

6. Anmerkung. Sobald die Form des Körpers durch eine Gleichung ſeiner Oberfläche ſich ausdrücken läßt, kann man jeden beliebigen Punkt des Körpers, ſeiner Lage nach, angeben, und ſonach derſelbe Punkt für den Ort des ganzen Körpers genommen werden, indem man ſich vorſtellt, daß die ganze Maſſe des Körpers in dieſem Punkte vereinigt ſei. Gewöhnlich nimmt man den Mittelpunkt des Körpers, oder falls ein ſolcher nicht vorhanden iſt, deſſen Schwerpunkt für den Ort des Körpers.

9. Erklärung. Das Verharren eines Körpers und ſeiner Theile in demſelben Orte, nennt man Ruhe, die Veränderung der äußeren Verhältniſſe des Körpers zum Raume, der ihn umgibt, Bewegung.

10. Erklärung. Die Ruhe iſt abſolut, wenn die Lage des Körpers gegen alle Punkte des Raumes unveränderlich bleibt, dagegen relativ, wenn deſſen Lage in Beziehung auf Punkte angeſtellt wird, die ſelbſt nicht ſicher ruhen.

11. Grundſatz. Jeder Körper beharret im Zuſtande der Ruhe oder Bewegung, in welchem er ſich befindet, ſo lange, als nicht eine Urſache eine Aenderung hierin hervorbringt. Dieß iſt ſo zu verſtehen, ein ruhender Körper kann nicht ſich ſelbſt in Bewegung ſetzen, wie es die Erfahrung allgemein zeigt: aber, daß ein bewegter Körper fortfahren werde, ſich immer zu bewegen, ſcheint obwohl es eben ſo wahr iſt, nicht ſo in die Augen zu fallen. Da indeſſen die Bewegung um ſo länger fortdauert, je geringer die Hinderniſſe der Bewegung werden, ſo wie z. B. ein ſchwingendes Pendel in der Luft länger in Bewegung bleibt, als im Waſſer, und noch länger in einem Raume, wo die Luft verdünnt worden,

Digitized by Google

als in freier Luft, so kann geschlossen werden, daß, wenn alle Hindernisse der Bewegung als Reibung, Widerstand der Luft u. s. w. beseitiget werden könnten, die einem Körper einmal mitgetheilte Bewegung nie aufhören würde.

12. Erklärung. Das Unvermögen der Körper, ihren Zustand von Ruhe und Bewegung zu ändern, nennt man die Trägheit derselben, und die Ursache, welche einen ruhenden Körper in Bewegung zu bringen oder aber einen bewegten Körper in die Ruhe zu versetzen strebt, heißt Kraft.

13. Erklärung. Der Punkt des Körpers, auf welchen die Kraft unmittelbar einwirkt, nennt man ihren Angriffspunkt, und die gerade Linie, nach welcher der Angriffspunkt anfangen würde sich fortzubewegen, wenn diese Kraft allein die Bewegung des Körpers bestimmte, heißt die Richtung der Kraft.

14. Anmerkung. Die Lage des Angriffspunktes ergibt sich aus den Koordinaten desselben in Beziehung auf drei durch den Anfangspunkt gezogene und unter rechten Winkeln sich schneidende Ebenen. Die Richtung der Kraft ist aber bekannt, sobald die Winkel gegeben sind, welche sie mit den Koordinatenaxen einschließt. Heißen diese Winkel α, β, γ, so sind sie nach (A. 1425) unter einander an die Bedingung gebunden, daß

$$3)\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \text{ sei,}$$

woraus, wenn α, β gegeben sind, der Winkel γ schon nach der Gleichung (A. 1426)

$$4)\quad \cos^2\gamma=-\cos(\beta-\alpha)\cos(\alpha+\beta)$$

zu bestimmen ist.

15. Erklärung. Indem ein materieller Punkt bei der Einwirkung einer Kraft seine Lage ändert, rückt er auf irgend einer geraden oder krummen Linie fort, welche der zurückgelegte Weg, Raum oder die Bahn des bewegten Punktes heißt. Ist der beschriebene Raum eine gerade Linie, so heißt die Bewegung geradlinig, sonst krummlinig.

16. Anmerkung. Jede Bewegung geschieht in der Zeit, während welcher sie dauert, denn keine Bewegung kann eine au-

Digitized by Google

genblickliche sein. Bei Beurtheilung einer Bewegung ist daher sowohl auf den zurückgelegten Weg als auch auf die darauf verwendete Zeit Rücksicht zu nehmen. Die Zeit läßt sich eben so wie der Raum messen, indem man irgend eine Zeit von bekannter Dauer zur Einheit wählt, und dann die Dauer einer Bewegung durch die Zahl solcher Einheiten ausdrückt. Eine solche Zeiteinheit von stets gleicher Dauer finden wir in der vollständigen Umdrehung der Erde um ihre Axe, (A. 1524) als deren Folge die tägliche Bewegung der Gestirne an der Oberfläche des Himmels zu betrachten ist.

17. Erklärung. Man nennt die Zwischenzeit zweier unmittelbar auf einander folgenden Kulminationen eines Sternes auf der Südseite des Meridianes einen Sterntag. Die Zwischenzeit zweier Kulminationen der Sonne den wahren Sonnentag. Ein solcher Tag wird in 24 gleiche Theile unterschieden, welche Stunden, jede Stunde in 60 gleiche Theile, welche Minuten, und jede solche wieder in 60 gleiche Theile, welche Sekunden heißen. Eine Sekunde ist die Zeiteinheit, deren man sich gewöhnlich zur Bestimmung der Dauer einer Bewegung bedient.

18. Erklärung. Eine Bewegung heißt gleichförmig, wenn der bewegte Körper in gleichen Zeittheilen gleich große Wege zurücklegt, im Gegenfalle heißt die Bewegung ungleichförmig oder veränderlich. Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung nennt man den in der Zeiteinheit vom Körper zurückgelegten Weg.

19. Folgesatz. Ist also c die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Bewegung, s der zurückgelegte Raum, t die Dauer derselben, so ist der in der Zeiteinheit beschriebene Raum c (18), und der in t solcher Einheiten, wo t eine absolute Zahl bedeutet, zurückgelegte Raum $s=ct$, oder wie man sich auszudrücken pflegt, der in gleichförmiger Bewegung zurückgelegte Raum ist das Produkt aus der Zeit in die Geschwindigkeit.

20. Folgesatz 2. In der gleichförmigen Bewegung gelten sonach stets die Formeln: 5) $s=ct$, $c=s:t$, $t=s:c$.

Digitized by Google

21. Grundsatz. Wenn auf einen materiellen Punkt zwei gleiche Kräfte nach Richtungen wirken, welche einander entgegengesetzt sind, so heben sie einander auf, oder der Punkt bleibt in Ruhe, gerade so, als ob die gleichen Kräfte nicht vorhanden wären.

22. Folgesatz. Zwei ungleiche Kräfte nach gerade entgegengesetzten Richtungen auf denselben Punkt wirkend, erzeugen eine Bewegung des Punktes, nach der Richtung der stärkeren Kraft, genau so, als ob an dem Punkte nur eine Kraft, gleich dem Unterschiede jener Kräfte, nach der Richtung der stärkeren angebracht wäre.

23. Folgesatz 2. Sind also P, p zwei ungleiche Kräfte, welche nach entgegengesetzten Richtungen an einem Punkte thätig sind, so ist $P-p=q$ die Größe derjenigen Kraft, welche die Bewegung des Punktes erzeugt. Bringt man nun eine Kraft p nach derselben Richtung an als P wirkt, so heben beide gleiche aber entgegengesetzte Kräfte p, einander auf, und P ist die Kraft, mit welcher jetzt die Bewegung des Punktes erfolgt: nun ist wegen $P-p=q$, $P=p+q$, demnach bewirken zwei Kräfte p, q nach einerlei Richtung angebracht, auf demselben Punkte eine Bewegung, welche jener von der Summe der Kräfte herrührenden gleich kommt.

24. Erklärung. Man sagt: zwei Kräfte sind einander gleich, wenn sie nach entgegengesetzten Richtungen an einem ruhenden Punkte angebracht, demselben keine Bewegung mittheilen. Dagegen heißt eine Kraft ein Vielfaches der andern Kraft, wenn ein Vielfaches der letzteren in entgegengesetzter Richtung angebracht, die erstere Kraft aufzuheben vermag, während diese letztere Kraft die Einheit oder das Maß der ersteren genannt wird.

25. Folgesatz. Kräfte können sonach, sobald die Einheit derselben bekannt ist, wie andere Größen durch Zahlen oder Linien vorgestellt werden.

26. Erklärung. Wenn mehrere Kräfte nach beliebigen Richtungen auf einen materiellen Punkt wirken, so wird derselbe, insofern diese Kräfte einander nicht aufheben, nach einer bestimm-

Digitized by Google

ten Richtung, mit einer bestimmten Stärke zur Bewegung angeregt, gerade so, als ob eine einzige Kraft, nach dieser Richtung und mit gleicher Stärke wirkend, an ihn angebracht wäre. Man nennt eine solche Kraft die Resultirende der gegebenen Kräfte, während diese selbst die Seitenkräfte der Resultirenden heißen.

27. Erklärung. Wenn mehrere nach gegebenen Richtungen an einem Punkte angebrachten Kräfte in eine einzige vereint werden sollen, so nennt man dieß die Kräfte zusammensetzen, und umgekehrt, wenn eine Kraft in mehrere Seitenkräfte nach gegebenen Richtungen aufgelöset werden soll, so heißt dieß die gegebene Kraft zerlegen.

28. Folgesatz. Bringt man an dem gemeinschaftlichen Angriffspunkte mehrerer Kräfte eine der Resultirenden (26) gleiche, aber nach entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft an, so hebt diese offenbar die Gesammtwirkung jener Kräfte auf, und der Angriffspunkt dieser Kräfte bleibt in Ruhe.

29. Erklärung. Den Zustand mehrerer thätigen Kräfte, in welchem das Streben jeder einzelnen Kraft durch die Gegenthätigkeit aller übrigen aufgehoben wird (28), bezeichnet man mit dem Namen Gleichgewicht, und man sagt, sämmtliche an dem Angriffspunkte wirkenden Kräfte sind mit einander im Gleichgewichte, wenn ihre Resultirende Null ist.

30. Erklärung. Die Wirkungen, welche mehrere einen Körper zur Bewegung anregenden Kräfte hervorbringen, sind daher von zweifacher Art: es findet entweder zwischen diesen Kräften ein Gleichgewicht Statt, oder sämmtliche Kräfte haben eine von Null verschiedene Resultirende, welche eine Bewegung des Körpers erzeugt. Deßhalb zerfällt die Mechanik, welche von den Wirkungen der bewegenden Kräfte handelt, in zwei Theile: in die Statik, welche die Beziehungen der Kräfte im Zustande des Gleichgewichts betrachtet, und in die Dynamik, welche die durch Kräfte erzeugte Bewegung zum Gegenstande hat.

31. Erklärung. Ein Körper heißt fest, wenn seine Theile so zusammenhängen, daß eine merkliche Kraft zur Trennung der-

Digitized by Google

selben erforderlich ist; flüssig, wenn der Zusammenhang der Theile gering ist, und hiebei die Verschiebung derselben durch jede noch so kleine Kraft bewirkt werden kann. Man unterscheidet die flüssigen Körper in tropfbare und elastische Flüssigkeiten. Die Theile der ersteren bilden, der Erfahrung zufolge, wenn sie durch anderweitige Kräfte nicht daran gehindert werden, Tropfen, auch lassen sie sich, selbst bei einem bedeutenten von Außen angebrachten Drucke, nicht merklich zusammenpressen, während die letztern in luftförmiger Gestalt erscheinen, sich leicht zusammendrücken lassen, und bei beseitigtem Drucke vom freien Stücken sich nach allen Richtungen wieder ausdehnen.

32. Erklärung. Die allgemeinen Gesetze der Statik und Dynamik, auf flüssige Körper angewandt, begründen zwei besondere Theile der Mechanik, und zwar die Hydrostatik, welche von den Gesetzen des Gleichgewichtes der Flüssigkeiten, und die Hydrodynamik, die von den Gesetzen der Bewegung der Flüssigkeiten handelt. Der praktische Theil der Mechanik fester Körper beschäftiget sich mit der Anordnung und dem Baue der Maschinen und heißt die Maschinenlehre; hingegen heißt derjenige der praktischen Theile der Hydrodynamik, welcher den Wasserbau behandelt, die Hydrotechnik und welcher die zum Wasserheben dienlichen Maschinen betrachtet, die Hydraulik.

33. Anmerkung. Man unterscheidet wohl auch zwischen der höheren und der Elementar-Mechanik, je nach den mathematischen Vorkenntnissen, welche bei ihrem Vortrag in Anspruch genommen werden. Dieser Unterschied ist jedoch in der Natur des Gegenstandes nicht begründet, und rührt vielmehr von der verkehrten Weise her, mit welcher derselbe in den darüber erschienenen Werken behandelt wird. Wenn die Vorträge der Mechanik mit der Physik vereinigt Statt haben, und also die erstere von der letzteren in der Regel, so zu sagen, absorbirt wird, oder wenn diese als eine sogenannte populäre Mechanik ohne alle mathematischen Vorkenntnisse abgehandelt wird: da lernt der Anfänger die Mechanik nur im Allgemeinen, gleichsam in der Vogelperspektive kennen, denn viele Lehren derselben werden entweder gar nicht berührt, oder nur historisch vorgetragen. Eine zweite Klasse

Digitized by Google

der Lehrbücher über Mechanik setzt die vollständige Kenntniß der Elementar-Mathematik voraus, läßt sich über mehrere Theile der Mechanik umständlicher aus, und macht den Anfänger sowohl mit den einzelnen zu verschiedenen Zwecken erfundenen Maschinen, als auch mit der Berechnung ihrer Wirkungen bekannt: allein auch da gibt es noch manche Lehren und unzählige Aufgaben, welche sich ohne Hülfe der höheren Analysis entweder gar nicht, oder doch nur auf einem äußerst weitläufigen Wege vortragen lassen. Man begreift die so ausgeführte Mechanik unter dem Namen der Elementar-Mechanik. Nur die höhere Analysis vermag die Lücken auszufüllen, und mit ihrer Zauberfackel die Finsternisse zu erhellen, welche in der Elementar-Mechanik vorkommen. Sie ist, sagt Pontécoulant in seiner analytischen Theorie des Weltsystems, die untrügliche Leiterin des menschlichen Geistes, verbreitet überall ihr Licht, enttäuscht die Fehlschlüsse unserer Sinne, spottet der Vorurtheile der Gewohnheit und des Irrthums, unterwirft alle angenommenen Ideen, alle bisher als bewiesen betrachteten Dinge der Prüfung des Verstandes, und hält in ihrem unwiderstehlichen Laufe nicht eher ein, bis die Uebereinstimmung ihrer Theorien mit den beobachteten Thatsachen ihr zeigt, daß sie den Endpunkt alles Suchens, die Wahrheit, gefunden habe. Die Untersuchungen über das Gleichgewicht und die Bewegung der Kräfte, welche mit Zuziehung der höheren Analysis angestellt werden können, bilden sonach ein von den beiden vorher benannten Klassen, unterschiedenes, wissenschaftliches Gebäude, dem man, so lange jene bestehen, den Namen der höheren Mechanik zutheilen muß. Zum Beschluße mögen einige der vorzüglichsten Schriften, welche von der Mechanik handeln, hier ihren Platz finden:

Eytelwein, Dr. J. A., Handbuch der Statik fester Körper. 2. Aufl. Berlin 1832. 3. B.

— Handbuch der Hydrostatik. Berlin, 1826.

— Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik. 3. Aufl. Leipzig 1842.

Gerstner, F. J., Ritt. v., Handbuch der Mechanik. Prag 1831. 3 B. 4.

Hülsse, Dr. *J. A.*, Allgemeine Maschinen-Encyclopädie. Leipzig, 1841. (wird fortgesetzt).

Digitized by Google

Kayser, C. H. A., Handbuch der Mechanik mit Bezug auf ihre Anwendung. Karlsruhe, 1842.

Lagrange, *J. L.* mécanique analytique. Paris 1811 et 1815. 2. B. 4.

Laplace, *G. S.*, Mechanik des Himmels. Aus dem Französ. übers. von Burkhard. Berlin. 2 Bände. 1801 4.

Navier, resumé des leçons sur l'application de la mécanique a l'établissement des constructions et des machines. Bruxelles. 1839.

Ohm, Dr. Mart. Lehrbuch der Mechanik. Berlin 1836. 3. B.

Pasquich, *Joan*, opuscula statico-mechanica. Lipsiae 1799. 2 B. 4.

Poisson, *C. D.*, Lehrbuch der Mechanik. Nach der 2. Ausgabe übers. von Moritz A. Stern. Berlin 1835. 2 B.

Pontécoulant, *M. G.* analytische Theorie des Weltsystems. Aus d. Französ. v. D. J. G. Hartmann. Quedlinburg und Leipzig, 1834. 2 B.

Pratt, *John Henry*, the mathematical principles of mechanical philosophy. Cambridge 1842. 2 ed.

Unger, Dr. Ephr. Sal., Uebungen aus der Statik und Mechanik fester Körper. Berlin, 1831, 1834. 2. B.

Weißbach, Jul., Bergmaschinen-Mechanik. Leipzig 1835. 2 B.

II. Resultirende mehrerer an einem Punkte wirkender Kräfte.

34. Lehrsatz. Wirken mehrere Kräfte nach Richtungen, welche in dieselbe Gerade fallen, und sind hiebei einige nach einer, die übrigen nach der gerade entgegengesetzten Richtung angebracht, so ist ihre Resultirende die algebraische Summe sämmtlicher Kräfte.

Beweis. Seien P_1, P_2, P_3, . . . Kräfte, welche nach derselben Richtung AX (Fig. 1) am Punkte A angebracht sind, hingegen Q_1, Q_2, Q_3, . . . diejenigen Kräfte, welche nach der gerade entgegengesetzten Richtung AM wirken, sei ferner R die Resultirende der ersteren, S die der anderen Kräfte. Die Kräfte P_1 und P_2 geben nach (23) eine Resultirende P_1+P_2, und diese

mit der Kraft P_3 verbunden, liefert die Resultirende $P_1+P_2+P_3$; fährt man also fort, je zwei der Kräfte $P_1, P_2, P_3, \ldots$ in eine zu vereinigen, so erhält man $R=P_1+P_2+P_3+\ldots$ und auf gleiche Weise ergibt sich $S=Q_1+Q_2+Q_3+\ldots$; somit wird, da die Kräfte R, S einander entgegen wirken, nach (22) die Resultirende beider Kräfte R, S den Werth

$$R-S=P_1+P_2+P_3+\ldots-(Q_1+Q_2+Q_3+\ldots)$$

erhalten.

35. Lehrsatz. Wenn die Richtungen zweier an einem materiellen Punkte angebrachten Kräfte einen Winkel einschließen, so können sie nicht einander das Gleichgewicht halten.

Beweis. Seien AX, AY (Fig. 1) die Richtungen zweier an dem Punkte A angebrachten Kräfte P, Q, welche einen Winkel XAY an eben demselben Punkte bilden: man verlängere die Richtung AX über A hinaus nach M, und bringe nach der Richtung AM eine Kraft $S=P$ am Punkte A an. Wären nun die Kräfte P, Q mit einander im Gleichgewichte, so müßte wegen der nach AM wirkenden Kraft S die Bewegung des materiellen Punktes A nach der Richtung AM erfolgen, allein da die Kräfte P und S einander aufheben (21), so würde auch die Bewegung desselben nach der Richtung AY zugleich Statt haben, was ungereimt ist, demnach können die Kräfte P, Q nach den genannten Richtungen angebracht einander das Gleichgewicht nicht halten.

36. Lehrsatz. Wenn die Richtungen zweier an einem materiellen Punkte angebrachten Kräfte einen rechten Winkel bilden, so ist die Diagonale des Rechteckes, dessen Seiten sich wie die Kräfte verhalten, die Größe und Richtung ihrer Resultirenden.

Beweis. Seien AX, AY (Fig. 2) die Richtungen zweier Kräfte P, Q die sich im Angriffspunkte A unter einem rechten Winkel XAY schneiden, sei ferner AR die durch den noch unbekannten Winkel $XAR=\theta$ angezeigte Richtung, und R die Größe ihrer Resultirenden. Offenbar kann die Seitenkraft P als eine gewiße Funktion des Richtungswinkels θ und der Resultirenden R angesehen werden, weil, wenn P sich ändert, dadurch nothwen-

Digitized by Google

dig auch eine Aenderung von θ und R herbeigeführt wird. Der Quotient aus P und R muß also lediglich vom Richtungswinkel θ allein abhängen, man setze daher

$$\frac{P}{R}=f\theta, \text{ und aus gleichem Grunde } \frac{Q}{R}=f(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)$$

indem der Winkel $YAR=\frac{1}{2}\pi-\theta$ wird, dieß gibt nun

$$\text{I. } P=Rf\theta,\ Q=Rf(\tfrac{1}{2}\pi-\theta)$$

wo f ein gleichfalls unbekanntes Funktionszeichen vorstellt. Man kann also nach der Gleichung I. die Seitenkräfte durch ihre Resultirende und deren Richtungswinkel darstellen: zerlegt man daher jede der beiden Kräfte P, Q in zwei andere, nämlich P in P_1 und P_2, Q in Q_1 und Q_2, so, daß die Richtungen der neuen Seitenkräfte P_1 Q_1, in die Gerade AR, und die Richtungen von P_2, Q_2 in die Gerade MN senkrecht auf AR fallen; so ist der Gleichung I. gemäß,

$P_1=Pf\theta$, $P_2=Pf(\frac{1}{2}\pi-\theta)$, und $Q_1=Qf(\frac{1}{2}\pi-\theta)$, $Q_2=Qf\theta$
oder nach Substituirung der Werthe von P und Q aus I. wird

$$\text{II.}\ \begin{cases} P_1=R(f\theta)^2,\ P_2=Rf\theta.f(\frac{1}{2}\pi-\theta), \text{ und} \\ Q_1=R[f(\frac{1}{2}\pi-\theta)]^2,\ Q_2=Rf\theta.f(\frac{1}{2}\pi-\theta) \end{cases}$$

nun fallen die Richtungen von P_1 und Q_1 mit der Richtung der Resultirenden R überein, also (34)

$R=P_1+Q_1=R[(f\theta)^2+[f(\frac{1}{2}\pi-\theta)]^2]$, dieß gibt
$(f\theta)^2+[f(\frac{1}{2}\pi-\theta)]^2=1$
als Bedingungsgleichung, daß die Kraft R eine Resultirende der Kräfte P und Q werde, welcher Genüge geschieht, wenn entweder

$f\theta=\sin\theta$, also $f(\frac{1}{2}\pi-\theta)=\cos\theta$, oder
$f\theta=\cos\theta$, und $f(\frac{1}{2}\pi-\theta)=\sin\theta$

gesetzt wird, weil dann in jedem Falle die Gleichung
$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ erfüllt wird. Welche dieser beiden Annahmen die richtige ist, entscheidet sich aus dem bekannten Verhalten der Seitenkräfte und ihrer Resultirenden in besondern Fällen. Ist nämlich $\theta=0$, so ist offenbar $P=R$ und $Q=0$, und für $\theta=\frac{1}{2}\pi$ muß $P=0$ und $Q=R$ werden. Den Gleichungen I. zu Folge kann aber $f\theta$, wenn diese Werthe für P, Q, R zum Vorschein kommen sollen, nur $\cos\theta$ bedeuten, man hat sonach

$$6)\ P=R\cos\theta,\ Q=R\sin\theta$$

Digitized by Google

und die Summe der Quadrate dieser Ausdrücke liefert

$$7)\quad P+Q^2=R^2.$$

Werden nun die Kräfte P, Q durch die Linien vorgestellt, welche die zwei anstoßenden Seiten eines Rechteckes bilden, so ist dessen Diagonale $=\sqrt{(P^2+Q^2)}=R$ und zugleich $\cos\theta=P:R$, w. z. b. w.

37. Lehrsatz. Wenn zwei Kräfte an einem materiellen Punkte angebracht sind, deren Richtungen einen beliebigen Winkel einschließen, so ist ihre Resultirende der Größe und Richtung nach, die Diagonale eines Parallelogrammes, dessen Seiten sich wie die Kräfte verhalten, und den gegebenen Richtungswinkel einschließen.

Beweis. Seien $AB=P$, $AC=Q$ (Fig. 3) die gegebenen Kräfte, welche unter dem Richtungswinkel $BAC=\alpha$ an dem materiellen Punkte A angebracht sind, verzeichnet man aus den Seiten AB, AC und dem Winkel BAC ein Parallelogramm $ABCD$, und zieht in ihm die Diagonale AD, welche mit der Geraden AB den Winkel $BAD=\theta$ einschließt, so läßt sich die Kraft $AB=P$ durch Verzeichnung des Rechteckes $AEBE'$ in die Seitenkräfte $AE=P\cos\theta$ und $AE'=P\sin\theta$ zerfällen, und eben so die Kraft $AC=Q$ in die Seitenkräfte $AF=Q\cos(\alpha-\theta)$ und $AF'=Q\sin(\alpha-\theta)$ zerlegen. Aus der Kongruenz der Dreiecke ABE, CFD folgt sofort $BE=CF$, oder I. $P\sin\theta-Q\sin(\alpha-\theta)=0$, d. i. die Seitenkräfte AE', AF' heben einander auf, und wegen $AE=DF$, ist auch $AE+AF=AF+DF=AD$; daher muß die Summe der beiden andern Seitenkräfte AE, AF zusammen die Resultirende liefern d. i. II. $P\cos\theta+Q\cos(\alpha-\theta)=R$ sein.

Die Summe der Quadrate dieser beiden Gleichungen liefert

$$R^2=P^2+Q^2+2PQ[\cos\theta\cos(\alpha-\theta)-\sin\theta\sin(\alpha-\theta)],\text{ oder}$$

$$8)\quad R^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha.$$

38. Folgesatz. Der Richtungswinkel θ der Resultirenden mit der Seitenkraft P ergibt sich bei Entwickelung der Gleichung I.

$$P\sin\theta=Q\sin\alpha\cos\theta-Q\cos\alpha\sin\theta$$

wenn man beide Theile durch $\cos\theta$ dividirt, und die in $\operatorname{tg}\theta$ multiplizirten Glieder vereiniget $(P+Q\cos\alpha)\operatorname{tg}\theta=Q\sin\alpha$

Digitized by Google

woraus

$$9)\quad tg\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}\quad \text{folgt.}$$

39. Erklärung. Ein Parallelogramm, dessen zwei anstoßenden Seiten sich wie die gegebenen Kräfte verhalten, und dessen von diesen Seiten eingeschlossener Winkel dem Richtungswinkel der Kräfte gleich ist, nennt man das Kräfteparallelogramm.

40. Aufgabe. Eine Kraft nach gegebenen Richtungen in zwei ihr gleichgeltende Seitenkräfte zu zerlegen.

Auflösung und Beweis. Sei $AD=R$ die gegebene Kraft und AX, AY die Richtungen, welche durch die Winkel $DAX=\theta$, $DAY=\psi$ gegeben sind, nach welchen die Zerlegung der Kraft R in Seitenkräfte erfolgen soll. Führt man durch den Punkt D die Geraden DC, DB mit AX, AY beziehungsweise parallel, so entsteht das Parallelogramm $ABDC$, dessen Seiten $AB=P$, $AC=Q$ die gesuchten Kräfte vorstellen. Nun ist im Dreiecke ABD

$$\left.\begin{matrix}\sin BAD\\ \sin\theta\end{matrix}\right\}\cdot\left.\begin{matrix}\sin ABD\\ \sin(\theta+\psi)\end{matrix}\right\}=\left.\begin{matrix}BD\\ Q\end{matrix}\right\}\cdot\left.\begin{matrix}AD\\ R\end{matrix}\right\},\ \text{dieß gibt}$$

$$10)\quad Q=\frac{R\sin\theta}{\sin(\theta+\psi)},\ \text{und eben so}\ P=\frac{R\sin\psi}{\sin(\theta+\psi)}$$

41. Aufgabe. Eine beliebige Anzahl Kräfte sei nach gegebenen Richtungen an einem materiellen Punkte angebracht, die Größe und Richtung ihrer Resultirenden zu finden.

Auflösung. Seien AB, AC, AD, AE, AF (Fig. 4) die Größen und Richtungen der an dem materiellen Punkte A angebrachten Kräfte P, Q, R, S, T gleichviel, ob sie in einerlei Ebene, oder aber in verschiedenen Ebenen gelegen sind, man ziehe durch den Endpunkt B der Geraden AB die Linie BC' mit AC parallel, und mache dieselbe der letztern gleich, ferner führe man durch den so bestimmten Punkt C' eine der AD parallele und gleiche Grade $C'D'$, und eben so durch den Punkt D' ziehe man eine der AE parallele und gleiche Gerade $D'E'$, und setze diese Verzeichnung fort, bis die letzte Kraft AF an die Reihe gekommen ist, die

Digitized by Google

Verbindungslinie AF' des Angriffspunktes A mit dem letztbestimmten Punkte F' ist nun die Größe und Richtung der Resultirenden aller so gegebenen Kräfte.

Beweis. Denn verbindet man den Punkt C mit C', und führt die Diagonale AC', so ist $ABC'C$ ein Parallelogramm, daher die Kraft AC' den Kräften P, Q gleichgeltend (37), verbindet man ferner D mit D' und A mit D', so wird $AC'D'D$ ein Parallelogramm, und daher AD' den Kräften AC' und AD' gleichgeltend, nun gilt AC' den Kräften P, Q gleich, folglich ist AD' die Resultirende der Kräfte P, Q, R. Eben so erhellet, daß AE' die Resultirende von P, Q, R, S, und AF' die Resultirende von P, Q, R, S, T sei.

42. Lehrsatz. Wenn bloß drei Kräfte an einem materiellen Punkte angebracht sind, so findet ein Gleichgewicht Statt, wenn sich diese Kräfte so zu einander verhalten, wie die Sinusse der von den Richtungen je zwei anderer Kräfte eingeschlossenen Winkel.

Beweis. Sind AB, AC (Fig. 3) die Größen und Richtungen zweier Kräfte P, Q, so lassen sich diese durch Verzeichnung des Parallelogrammes $ABDC$ in eine einzige AD vereinigen (37): bringt man nun nach der Richtung AG, welche in der Verlängerung der Geraden AD über A hinaus liegt, eine Kraft $R=AD$ an, so heben sich diese beiden Kräfte auf, somit stehen die Kräfte P, Q, R, am Punkte A mit einander im Gleichgewichte. Es ist aber im Dreiecke ABD, wo $AB=P$, $BD=Q$, $AD=R$ ist,

$$P:Q:R=\sin ADB:\sin BAD:\sin ABD,$$ und weil
$$\sin ADB=\sin DAC=\sin GAC,$$
$\sin BAD=\sin BAG$, $\sin ABD=\sin BAC$ ist, so folgt
$$P:Q:R=\sin GAC:\sin BAG:\sin BAC.$$

43. Aufgabe. Drei Kräfte wirken auf einen materiellen Punkt nach wechselweise auf einander senkrechten Richtungen, die Größe und Richtung ihrer Resultirenden zu bestimmen.

Auflösung. Seien OX, OY, OZ (Fig. 5) die Richtungen dreier Kräfte $OA=X$, $OB=Y$, $OC=Z$, welche sich im Angriffspunkte

Digitized by Google

O unter rechten Winkel schneiden, so ist ihre Resultirende

$$11)\quad R=\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}$$

und die Winkel α, β, γ, welche dieselbe mit den Richtungen der Kräfte einschließt, ergeben sich aus den Gleichungen

$$12)\quad R\cos\alpha=X,\ R\cos\beta=Y,\ R\cos\gamma=Z.$$

Beweis. Man kann die Kräfte $OA=X$, $OB=Y$ durch die Verzeichnung des Kräfteparallelogrammes $OADB$ in eine einzige $OD=R'$ vereinigen, und man hat (36) I. $R'^2=X^2+Y^2$, ferner die Kraft $OD=R'$, und $OC=Z$ durch die Verzeichnung des Kräfteparallelogrammes $OCFD$ in eine einzige Kraft $OF=R$ zusammensetzen, wobei II. $R^2=R'^2+Z^2$ wird. Die Summe dieser zwei Gleichungen gibt sofort $R^2=X^2+Y^2+Z^2$, woraus dann R wie in Formel 11) folgt.

Da hier die Richtungen der Seitenkräfte X, Y, Z in die Koordinatenaxen fallen, so ist für einen Punkt F, dessen Radiusvektor OF und die Koordinaten OA, OB, OC sind, nach (A. 1425)

$$R\cos\alpha=OA=X,\ R\cos\beta=OB=Y,\ R\cos\gamma=OC=Z.$$

44. Folgesatz. Umgekehrt, wenn R eine gegebene Kraft vorstellt, welche nach wechselweise auf einander senkrechten, und durch die Winkel α, β, γ gegebenen Richtungen in drei Seitenkräfte X, Y, Z zu zerlegen wäre: so sind die gesuchten Kräfte

$$X=R\cos\alpha,\ Y=R\cos\beta,\ Z=R\cos\gamma.$$

45. Aufgabe. Eine beliebige Anzahl Kräfte sei nach gegebenen Richtungen im Raume an einem materiellen Punkte angebracht, man sucht die Größe und Richtung ihrer Resultirenden.

Auflösung. Seien P_1, P_2, P_3, P_4, ... die gegebenen Kräfte, ihre Richtungen werden durch die Winkel gegeben, welche sie mit den drei Axen bilden; es seien daher

$\left.\begin{matrix}\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1\\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2\\ \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3\\ \alpha_4,\ \beta_4,\ \gamma_4\end{matrix}\right\}$ die Richtungswinkel der Kraft $\left\{\begin{matrix}P_1\\ P_2\\ P_3\\ P_4\end{matrix}\right.$ u. s. f.

man zerlege jede der gegebenen Kräfte nach (44) in drei andere Seitenkräfte nach den Richtungen der Axen der x, der y und der

Digitized by Google

z; so zerfällt die Kraft

$$\left.\begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{matrix}\right\} \text{ in die gleichgeltenden Kräfte } \left\{\begin{matrix} P_1\cos\alpha_1,\ P_1\cos\beta_1,\ P_1\cos\gamma_1 \\ P_2\cos\alpha_2,\ P_2\cos\beta_2,\ P_2\cos\gamma_2 \\ P_3\cos\alpha_3,\ P_3\cos\beta_3,\ P_3\cos\gamma_3 \\ P_4\cos\alpha_4,\ P_4\cos\beta_4,\ P_4\cos\gamma_4 \end{matrix}\right.$$

u. s. f.

Vereinigt man die längst einer und derselben Axe thätigen Kräfte in eine einzige, setzt man also

$$13)\quad \begin{cases} P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2+P_3\cos\alpha_3+P_4\cos\alpha_4+\ldots=X \\ P_1\cos\beta_1+P_2\cos\beta_2+P_3\cos\beta_3+P_4\cos\beta_4+\ldots=Y \\ P_1\cos\gamma_1+P_2\cos\gamma_2+P_3\cos\gamma_3+P_4\cos\gamma_4+\ldots=Z \end{cases}$$

so lassen sich sämmtliche Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, ... deren Richtungen beliebig im Raume genommen werden können, auf die drei ihnen gleichgeltenden Kräfte X, Y, Z zurückführen, deren Richtungen mit den Koordinatenaxen übereinfallen, folglich wird nach (43) ihre Resultirende $R=\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}$, und ihre Richtung ergibt sich aus den Winkeln α, β, γ, welche dieselbe mit den drei Axen einschließt, nach den Gleichungen 12).

46. Folgesatz. Projizirt man eine Kraft wie P_1 auf die Richtung der Axen, so sind nach (A. 1545) $P_1\cos\alpha_1$, $P_1\cos\beta_1$, $P_1\cos\gamma_1$ ihre Projektionen auf die Koordinatenaxen, sonach bedeuten die Größen X, Y, Z in den Gleichungen 13) beziehungsweise die algebraische Summe der Projektionen sämmtlicher Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, ... auf die Koordinatenaxen.

47. Lehrsatz. Wenn eine beliebige Anzahl Kräfte nach gegebenen Richtungen an einem materiellen Punkte angebracht sind, so stehen sie unter einander im Gleichgewichte, wenn die algebraische Summe ihrer Projektionen auf die drei Axen null ist.

Beweis. Soll zwischen den Kräften P_1, P_2, P_3, ..., welche sämmtlich einen und denselben Angriffspunkt haben, ein Gleichgewicht bestehen, so ist es nothwendig und hinreichend, daß ihre Resultirende null wird (29): man kann aber der Gleichung 11) nicht anders Genüge leisten, als wenn man setzt: $X=0$, $Y=0$, $Z=0$; es ist daher nach (46) für den Zustand des Gleichgewichts

Digitized by Google

sämmtlicher Kräfte die algebraische Summe ihrer Projektionen auf die einzelnen Koordinatenaxen Null.

III. Gesetze des Gleichgewichts von Kräften welche verschiedene Angriffspunkte haben.

1. Der mathematische Hebel.

48. Aufgabe. Zwei Punkte, welche gegen einander eine unveränderliche Lage haben, werden durch gegebene Kräfte nach beliebigen, in derselben Ebene gegebenen, Richtungen angegriffen, man sucht die Größe und Richtung ihrer Resultirenden.

Auflösung. Seien A, B (Fig. 6) die Angriffspunkte, und AP, BQ die Richtungen zweier Kräfte P, Q: man bezeichne mit α, β die spitzigen Winkel, welche die Verbindungslinie AB beider Angriffspunkte mit den Richtungen der Kräfte bilden, mit θ den spitzigen Winkel zwischen der Resultirenden R und der Geraden AB, und mit x den Abstand des Angriffspunktes D der Resultirenden vom Punkte A; so hat man

$$14)\quad R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos(\alpha+\beta),$$

$$15)\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{P\sin\alpha + Q\sin\beta}{P\cos\alpha - Q\cos\beta} \text{ und}$$

$$16)\quad x = aQ\sin\beta : (P\sin\alpha + Q\sin\beta).$$

Beweis. Man verlängere die Geraden AP, BQ, bis sie im Punkte C zusammentreffen, und versetze den Angriffspunkt der Kraft P ohne die Richtung ihrer Wirkung zu ändern, von A nach C, und eben so den Angriffspunkt der Kraft Q von B nach C; man erhält auf diese Art zwei am Punkte C wirkenden Kräfte, deren Richtungen den Winkel $ACB = \pi - (\alpha+\beta)$ einschließen: nimmt man nun $CE : CF = P : Q$ und ergänzt das Parallelogramm $CEGF$, so ist die Diagonale CG die Größe und Richtung der Resultirenden, und man hat nach Formel 8)

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos(\alpha+\beta).$$

Verlängert man ihre Richtung, bis sie die Gerade AB im Punkte D schneidet, und zerlegt jede der drei Kräfte P, Q, R in zwei andere, deren eine nach der Richtung AB, die andere darauf

Digitized by Google

senkrecht angebracht wäre; so hat man nach (36) und Formel 6)

$$R\cos\theta = P\cos\alpha - Q\cos\beta,\quad R\sin\theta = P\sin\alpha + Q\sin\beta$$

der Quotient beider Ausdrücke gibt

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{P\sin\alpha + Q\sin\beta}{P\cos\alpha - Q\cos\beta}$$

woraus die Richtung der Resultirenden sich ergibt.

Um noch den Angriffspunkt D derselben zu bestimmen, sei $AB=a$ der Abstand der Angriffspunkte beider Kräfte, $AD=x$, also $DB=a-x$: nun hat man im Dreiecke

$$DCB \ldots\ DB : DC = \sin DCB : \sin DBC$$
$$DAC \ldots\ DC : DA = \sin DAC : \sin DCA$$
$$CFG \ldots\ CF : FG = \sin DCA : \sin DCB$$

hieraus folgt

$$\left.\begin{matrix} DB\times CF \\ Q(a-x) \end{matrix}\right\} \cdot \left.\begin{matrix} DA\times FG \\ Px \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} \sin DAC \\ \sin\alpha \end{matrix}\right\} \cdot \left.\begin{matrix} \sin DBC \\ \sin\beta \end{matrix}\right\}$$

daher ist 17) $Q(a-x)\sin\beta = Px\sin\alpha$, woraus man sogleich die Formel 16) erhält.

49. Folgesatz. Die Gleichung 17) liefert sofort, wenn man vom Punkte D aus, die Perpendikel DB', DA' auf die Richtungen der Kräfte führet

$$P : Q = (a-x)\sin\beta : x\sin\alpha = DB' : DA'$$

d. i. die Kräfte verhalten sich umgekehrt, wie die Perpendikel, wie sie von einem Punkte in der Richtung der Resultirenden auf die Richtungen der Kräfte gezogen werden.

50. Erklärung. Ein mathematischer Hebel heißt jede feste unbiegsame Linie, welche um einen ihrer Punkte, der unbeweglich ist, sich drehen läßt. Diesen Punkt nennt man den Unterstützungspunkt oder die Unterlage, und die Abstände der Angriffspunkte zweier Kräfte von der Unterlage die Hebelsarme; von den beiden am Hebel angebrachten Kräften heißt die eine die Kraft, die andere die Last. Ein mathematischer Hebel heißt zweiarmig, wenn die Unterlage zwischen den Angriffspunkten der Kräfte gestellt ist, hingegen einarmig, wenn Kraft und Last an derselben Seite der Unterlage wirken. Bilden die Hebelsarme mit einander einen Winkel, so nennt man den Hebel einen Winkelhebel.

Digitized by Google

51. Erklärung. Man nennt ein Produkt aus einer Kraft in ein aus irgend einem Punkte auf ihre Richtung gefälltes Perpendikel das statische Moment der Kraft in Beziehung auf diesen Punkt: dagegen heißt das Produkt einer Kraft in den Abstand ihres Angriffspunktes von einer Geraden oder von einer Ebene, das statische Moment der Kraft in Beziehung auf diese Gerade oder Ebene, welche dann Momentenaxe, Momentenebene beziehungsweise heißen.

52. Lehrsatz. An einem geradlinigen mathematischen Hebel sind zwei Kräfte im Gleichgewichte, wenn ihre statischen Momente in Beziehung auf die Unterlage einander gleich sind.

Beweis. Ist ADB (Fig. 6) ein zweiarmiger Hebel, A, B die Angriffspunkte zweier nach den Richtungen AP, BQ wirkenden Kräfte P, Q, und man unterstützt den Punkt D des Hebels, welcher in der Richtung der Resultirenden (48) liegt; so wird hiedurch ihre Wirkung aufgehoben, d. i. die Kräfte P, Q halten einander das Gleichgewicht, und man erhält aus (49)

$$P \times DA' = Q \times DB'.$$

Versetzt man aber die Unterlage aus dem Punkte D in den Punkt B, bringt in dem Punkte D eine Kraft R nach der Richtung DC an, welche den Kräften P und Q gleichgeltend wäre und entfernt die Kraft Q von ihrem Angriffspunkte B, so wird hiedurch im Zustande des Gleichgewichts der Kräfte P, Q, R nichts geändert, weil die Unterlage in B die Wirkung der Kraft Q, und die Kraft R die der Unterlage in D genau vertritt. Auf diese Weise verwandelt sich aber der zweiarmige Hebel in einen einarmigen, und man erhält, wenn man aus B die Perpendikel BH, BI auf die Richtungen der Kräfte P, Q fällt

$BH = CB \times \sin ACB$, $BI = CB \times \sin BCD$, daher

$BH : BI = \sin ACB : \sin BCD$, und im Dreiecke CEG ist

$$\left.\begin{matrix} CG \\ R \end{matrix}\right\} . \left.\begin{matrix} CE \\ P \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} \sin CEG \\ \sin ACB \end{matrix}\right\} . \left.\begin{matrix} \sin EGC \\ \sin BCD \end{matrix}\right\};$$ sonach

$$R : P = BH : BI, \text{ oder } R \times BI = P \times BH.$$

53. Folgesatz. Sind die Richtungen der Kräfte P, Q pa-

Digitized by Google

rallel, so hat man in (48) $\alpha=\pi-\beta$, hiedurch wird aus Formel 14)

$$R^2=P^2+Q^2\pm 2PQ=(P\pm Q)^2$$

je nachdem P mit Q einerlei oder entgegengesetzte Richtungen befolgt, also ist 18) $R=P\pm Q$, ferner liefert die Formel 15)

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{(P\pm Q)\sin\alpha}{(P\pm Q)\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,\ \text{mithin}\ \theta=\alpha$$

und die Formel 17) gibt

$(a-x)Q=Px$, oder $P:Q=a-x:x=DB:AD$, d. i. wenn am geradlinigen mathematischen Hebel die Kräfte nach parallelen Richtungen wirken, so ist der Druck auf die Unterlage die algebraische Summe beider Kräfte, die Richtung dieses Druckes mit den Richtungen der Kräfte parallel, und es verhalten sich im Zustande des Gleichgewichtes Kraft und Last verkehrt wie die Hebelsarme.

54. Folgesatz 2. Da es ganz gleichgiltig ist, an welchen Punkt hin in der Richtung einer Kraft ihr Angriffspunkt versetzt wird; so kann man denselben hinsichtlich der Kräfte P, Q aus den Punkten A und B beziehungsweise in die Punkte A' B' bringen: der geradlinige Hebel ADB geht dann in den Winkelhebel $A'DB'$ über, dessen Hebelsarme $A'D$, $B'D$ zu den Richtungen der Kräfte senkrecht stehen, und man hat nach (49)

$$P\times DA'=Q\times DB'$$

d. i. am Winkelhebel sind die Kräfte im Gleichgewichte, wenn ihre statischen Momente einander gleich sind.

2. Resultirende mehrerer Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten, welche in einer Ebene gelegen sind.

55. Erklärung. Beliebig viele materielle Punkte bilden ein festes System oder einen festen Körper, wenn die auf sie einwirkenden Kräfte die gegenseitige Stellung der Elemente nicht zu ändern vermögen: wenn gleich durch die Gesammtwirkung der Kräfte eine Bewegung des festen Systems hervorgebracht wird. Gibt es aber in einem festen Systeme einen Punkt, der seine Lage im Raume, ungeachtet der auf das System angebrachten Kräfte behauptet, so heißt derselbe ein fixer Punkt. Wofern ein festes System zwei fixe Punkte enthält, so heißt die Verbindungslinie

Digitized by Google

derselben eine feste Axe. Ein festes System wird frei genannt, wenn es keinen fixen Punkt besitzt, sonst heißt es unfrei.

56. Erklärung. Die Bewegung, welche ein festes System, in Folge der auf dasselbe einwirkenden Kräfte anzunehmen vermag, heißt eine fortschreitende, wenn alle Punkte des Systems an derselben Theil nehmen, sonst heißt die Bewegung eine drehende, wenn es einen Punkt oder aber eine Anzahl in einer Geraden liegender Punkte gibt, welche in Ruhe sich befinden.

57. Lehrsatz. Das statische Moment der Resultirenden zweier Kräfte, deren Richtungen in einer und derselben Ebene liegen, auf welchen Punkt in der Ebene die Momente auch bezogen werden, ist der algebraischen Summe der statischen Momente einzelner Kräfte gleich.

Beweis. Seien AP, BP_1 (Fig. 7) die Richtungen der Kräfte P, P_1, CR die Richtung ihrer Resultirenden, aus dem in der Ebene dieser Richtungen willkührlich angenommenen Punkte O fälle man auf jene die Perpendikel $OD=p$, $OE=p_1$, $OF=r$, so ist zu beweisen, daß $Rr=Pp+P_1p_1$ sei. Zu diesem Ende bezeichne man die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte mit der willkührlich durch den Punkt O gezogenen Axe OX einschließen, beziehungsweise mit α, α_1, θ, und setze den Winkel $COX=\omega$. Offenbar ist nun

$$OD=OC\sin OCP,\quad OE=OC\sin OCP_1,\quad OF=OC\sin OCR$$

oder $OC=L$ gesetzt,

I. $p=L\sin(\alpha-\omega)$, $p_1=L\sin(\alpha_1-\omega)$, $r=L\sin(\theta-\omega)$.

Zerlegt man ferner jede der Kräfte P, P_1, R in zwei Seitenkräfte, deren eine auf der Axe der x senkrecht, die andere ihr parallel wäre, so erhält man

II. $R\sin\theta=P\sin\alpha+P_1\sin\alpha_1$

III. $R\cos\theta=P\cos\alpha+P_1\cos\alpha_1$

Die Summe der Quadrate dieser zwei Gleichungen gibt nun sogleich

$$R^2=P^2+P_1^2+2PP_1(\cos\alpha\cos\alpha_1+\sin\alpha\sin\alpha_1),\text{ oder}$$

19) $R^2=P^2+P_1^2+2PP_1\cos(\alpha_1-\alpha)$.

Digitized by Google

Multiplizirt man die Gleichung II. mit $\cos\omega$, und III. mit $\sin\omega$, so ergibt sich aus dem Unterschiede dieser Produkte

III. $R\sin(\theta-\omega)=P\sin(\alpha-\omega)+P\sin(\alpha_1-\omega)$

werden in diese Gleichung für $\sin(\theta-\omega)$, $\sin(\alpha-\omega)$ und $\sin(\alpha_1-\omega)$ ihre Werthe aus der Gleichung I. substituirt, und dann alle Glieder mit L multiplizirt, so folgt unmittelbar

20) $Rr=Pp+P_1p_1$.

58. *Folgesatz.* Die Gleichung (19) liefert die Größe der Resultirenden aus den gegebenen Kräften P, P_1 und ihren Richtungswinkeln: die Gleichung 20) aber gibt den Werth von r, und zeigt folglich, in welcher Entfernung vom Ursprunge der Koordinaten die Resultirende beider Kräfte durchgeht.

59. *Folgesatz 2.* Setzt man die Koordinaten der Angriffspunkte A, B, C nämlich $OG=x_1$, $AG=y$, $OH=x_1$, $BH=y_1$, $OI=x$, $CI=y$, zieht GK parallel zu AP, bis sie die verlängerte OD in K trifft, und GL auf AP senkrecht, so hat man im Dreiecke OGK, $OK=x\sin\alpha$, und im Dreiecke GLA, $GL=y\cos\alpha$,

demnach $OD=p=OK-GL=x\sin\alpha-y\cos\alpha$

und durch Verwechslung der Buchstaben ergibt sich

$p_1=x_1\sin\alpha_1-y_1\cos\alpha_1$, $r=x\sin\theta-y\cos\theta$

bei Substitution dieser Werthe in die Gleichung 20) folgt sogleich 21)

$R(y\cos\theta-x\sin\theta)=P(y\cos\alpha-x\sin\alpha)+P_1(y_1\cos\alpha_1-x_1\sin\alpha_1)$.

60. *Lehrsatz.* Das statische Moment der Resultirenden in Beziehung auf einen wo immer in der Ebene der Kräfte angenommenen Punkt, ist bei beliebig vielen in derselben Ebene gegebenen Kräften die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte.

Beweis. Seien P, P_1, P_2, P_3,... Kräfte, welche an unveränderlich mit einander verbundenen Punkten nach gegebenen Richtungen in derselben Ebene angebracht sind, seien ferner p, p_1, p_2, p_3, . . . die Perpendikel, welche aus einem in der Ebene gewählten Punkte auf ihre Richtungen gefällt werden, endlich sei R die Resultirende dieser Kräfte, und r das Perpendikel aus demselben Punkte auf

Digitized by Google

ihre Richtung; so hat man stets

22) $Rr = Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 + \ldots$

denn vereinigt man die Kräfte P, P_1 in eine einzige R', und bezeichnet man das Perpendikel auf ihre Richtung mit r', so folgt nach Formel 20) $R'r' = Pp + P_1p_1$, verbindet man ferner die Resultirende R' mit der folgenden Kraft P_2; so folgt eben so die Resultirende mit R'' bezeichnet, $R''r'' = R'r' + P_2p_2$, und auf gleiche Weise wenn man R'' mit P_2 vereiniget, erhält man die Resultirende R''', $R'''r''' = R''r'' + P_3p_3$, die Summe dieser Gleichungen gibt sofort $R'''r''' = Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3$.

Bezeichnet man also die Summe der statischen Momente der angebrachten Kräfte

23) $Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 + \ldots$ mit ΣPp, und ihre Resultirende mit R, so folgt aus der letzten Gleichung für jede beliebige Kräfteanzahl sogleich 24) $Rr = \Sigma Pp$.

61. Folgesatz. Sind x, y, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3; y_3 . . . die Koordinaten der Angriffspunkte einzelner Kräfte, und α, α_1, α_2, α_3 . . . die Winkel zwischen ihren Richtungen und der Axe der x und setzt $p = x\sin\alpha - y\cos\alpha$, $p_1 = x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1$ u. s. f.

$r = x\sin\vartheta - y\cos\vartheta$, so wird aus Formel 24)

$R(x\sin\vartheta - y\cos\vartheta) = \Sigma P(x\sin\alpha - y\cos\alpha)$, wenn Σ allgemein die Summe der Größen bezeichnet, welche man durch allmählige Vergrößerung der Zeiger in den Buchstaben P, x, y, α erhält, oder auch

25) $R(y\cos\vartheta - x\sin\vartheta) = \Sigma P(y\cos\alpha - x\sin\alpha)$

wo x, y die Koordinaten des Angriffspunktes der Resultirenden R sämmtlicher Kräfte, und ϑ ihren Richtungswinkel bedeuten.

62. Aufgabe. Die Größe und Richtung der Resultirenden mehrerer an beliebigen Punkten in einer Ebene angebrachten Kräfte zu bestimmen.

Auflösung und Beweis. Zerlegt man jede der Kräfte P, P_1, P_2, P_3 . . . in zwei Seitenkräfte, deren eine der Axe der x parallel läuft, die andere darauf senkrecht wäre, so erhält man zwei Systeme von Kräften, deren eines die zur Axe der x, das andere die zur Axe der y parallelen Kräfte enthält. Hieraus ergibt sich wie in (60) durch stufenweise Verbindung einzelner Kräfte

Digitized by Google

$$R\sin\theta = P\sin\alpha + P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + \ldots = Y$$
$$R\cos\theta = P\cos\alpha + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + \ldots = X$$

die Summe der Quadrate dieser Ausdrücke gibt sofort

$$26)\quad R^2 = X^2 + Y^2$$

dagegen erhält man durch die Division beider Gleichungen

$$27)\quad \operatorname{tg}\theta = Y : X$$

aus welchen Formeln sich sowohl die Größe als auch die Richtung der Resultirenden mehrerer Kräfte, deren Richtungen in einer Ebene gelegen sind, bestimmen läßt.

63. Folgesatz. Sind die Richtungen dieser Kräfte einander parallel, also $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 \ldots$, so folgt

$X = \cos\alpha(P + P_1 + P_2 \ldots) = \cos\alpha \Sigma P$, und eben so

$Y = \sin\alpha \Sigma P$: hiemit erhält man

$R = \Sigma P$ und $\theta = \alpha$. Dagegen folgt aus (58)

$Rr = \Sigma Pp = r\Sigma P$, somit $r = \Sigma Pp : \Sigma P$

wodurch man die Entfernung der Richtung der Resultirenden vom Anfangspunkte bestimmen kann, welcher Ausdruck, wie man sieht, vom Richtungswinkel der parallelen Kräfte gar nicht abhängt.

64. Folgesatz 2. Ist das betrachtete System vermöge der auf dasselbe wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, so ist die Resultirende derselben Null (29), und also

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2)} = 0,$$

woraus drei Bedingungsgleichungen des Gleichgewichtes sich ergeben:

I. $X = \Sigma P\cos\alpha = 0$, II. $Y = \Sigma P\sin\alpha = 0$, und

III. $\Sigma Pp = \Sigma P(y\cos\alpha - x\sin\alpha) = 0$.

Die beiden ersten heben die fortschreitende, die letzte Gleichung aber die drehende Bewegung (56) des Systems auf.

65. Folgesatz 3. Sind aber die Richtungen der Kräfte einander parallel, so hat man aus (63) bloß zwei Bedingungen zum Gleichgewichte vonnöthen, nämlich I. $\Sigma P = 0$, II. $\Sigma Pp = 0$, nur muß die Resultirende dieser Kräfte einen und denselben Angriffspunkt besitzen; denn zerfällt die Resultirende in zwei parallele Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten, so müssen dieselben, da ihre Summe null ist, entgegengesetzte Richtungen haben, und somit eine Drehung des Systems veranlassen.

Digitized by Google

66. Folgesatz 4. Wenn das System nicht paralleler Kräfte einen fixen Punkt enthält, und man nimmt denselben zum Anfangspunkte an, so sind hiedurch die Gleichungen I. und II. (64) befriedigt, mithin bleibt noch übrig der Gleichung

$$\Sigma P(y\cos\alpha - x\sin\alpha) = 0$$

Genüge zu leisten.

3. Resultirende mehrerer Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten im Raume.

67. Aufgabe. Eine Anzahl Kräfte, deren Größen und Richtungen gegeben sind, wirken an verschiedenen unveränderlich mit einander verbundenen und ihrer Lage nach gegebenen Angriffspunkten im Raume, man sucht die Bedingungen des Gleichgewichts sämmtlicher Kräfte.

Auflösung. Heißen $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots$ die Richtungswinkel der Kräfte $P, P_1, P_2, \ldots$ und $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$ die Koordinaten ihrer Angriffspunkte, so findet Gleichgewicht Statt, wenn folgende sechs Bedingungen erfüllt sind:

I. $\Sigma P\cos\alpha = 0$, II. $\Sigma P\cos\beta = 0$, III. $\Sigma P\cos\gamma = 0$,

IV. $\Sigma P(y\cos\alpha - x\cos\beta) = 0$, V. $\Sigma P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0$,

VI. $\Sigma P(z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0$.

Beweis. Sei M (Fig. 8) der Angriffspunkt einer Kraft P, welche nach der Richtung MN angebracht ist, zieht man durch den Punkt M die Geraden MX', MY', MZ' den durch den Anfangspunkt O gehenden Axen OX, OY, OZ parallel, so ist $NMX' = \alpha$, $NMY' = \beta$, $NMZ' = \gamma$, und nach (44) $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ sind die Seitenkräfte, welche der Kraft P gleichgelten. Man verlängere die Richtung der Kraft $P\cos\alpha$ so weit, bis sie die Ebene ZOY in einem Punkte B, dessen Koordinaten $BC = z$, $CO = y$ sind, schneidet, versetze den Angriffspunkt dieser Kraft vom Punkte M an den Punkt B, und zerlege sie dann in zwei andere unter einander gleiche und zu ihrer Richtung parallele Kräfte $DE = FG$, von denen die erstere in die Ebene XOY, die andere in die Ebene XOZ fällt. Jede dieser Seitenkräfte wird nach (53) $\frac{1}{2}P\cos\alpha$ sein: die erste wirkt senkrecht auf die Axe

Digitized by Google

OZ in einer Entfernung $OD=2y$, von der Axe der x, die zweite ebenfalls senkrecht auf die Axe OZ in einer Entfernung $OF=2z$ von der Axe der x. Auf gleiche Weise zerlege man die Kräfte P_1, P_2, P_3 . . . in die zur Axe OX parallelen Kräfte $P_1\cos\alpha_1$, $P_2\cos\alpha_2$, $P_3\cos\alpha_3$ . . . und diese wieder in die Kräfte $\frac{1}{2}P_1\cos\alpha_1$, $\frac{1}{2}P_2\cos\alpha_2$, $\frac{1}{2}P_3\cos\alpha_3$ . . ., welche in den Abständen $2y_1$, $2y_2$, $2y_3$ . . . der Axe der x parallel laufen und ganz in der Ebene xy gelegen sind, und in die Kräfte $\frac{1}{2}P_1\cos\alpha_1$, $\frac{1}{2}P_2\cos\alpha_2$, $\frac{1}{2}P_3\cos\alpha_3$ . . ., welche in den Abständen $2z_1$, $2z_2$, $2z_3$ . . . beziehungsweise zur Axe der x parallel laufen, aber in die Ebene xz fallen. Hiemit erhält man statt der Gruppe von Kräften $\Sigma P\cos\alpha$, die zur Axe der x parallel läuft, die zwei zur Axe der x parallelen Gruppen $\frac{1}{2}\Sigma P\cos\alpha$, deren eine in der Ebene xy, die andere in der Ebene xz gelegen ist. Eben so nehme man für die Gruppe der zu der Axe der y parallelen Seitenkräfte $P\cos\beta$, zwei Gruppen von Kräften $\frac{1}{2}P\cos\beta$, $\frac{1}{2}P_1\cos\beta_1$, $\frac{1}{2}P_2\cos\beta_2$ . . ., die parallel zu eben dieser Axe sind, und von denen die eine in der Ebene xy, die andere in der Ebene yz in den Entfernungen, welche beziehungsweise $2x$, $2x_1$, $2x_2$, . . . und $2z$, $2z_1$, $2z_2$ . . . sind, von der Axe der y wirkt. Endlich zerlege man noch die der Axe der z parallelen Seitenkräfte $P\cos\gamma$, $P_1\cos\gamma_1$, $P_2\cos\gamma_2$ . . . in zwei Gruppen zu eben dieser Axe paralleler Kräfte $\frac{1}{2}P\cos\gamma$, $\frac{1}{2}P_1\cos\gamma_1$, $\frac{1}{2}P_2\cos\gamma_2$ . . ., von denen die eine in der Ebene xz, die andere in der Ebene yz in den Entfernungen $2x$, $2x_1$, $2x_2$ . . . und $2y$, $2y_1$, $2y_2$ . . . von der Axe der z beziehungsweise wirkt. Hiedurch werden sämmtliche an beliebigen Angriffspunkten nach gegebenen Richtungen angebrachten Kräfte P, P_1, P_2, . . . auf lauter Kräfte zurückgeführt, welche in den drei koordinirten Ebenen in je zwei Gruppen vertheilt sind, welche zu denen in den Ebenen liegenden Axen parallel laufen. Das Gleichgewicht sämmtlicher Kräfte unter einander wird also Statt haben, wenn die in jeder koordinirten Ebene wirkenden Gruppenpaare einander das Gleichgewicht halten. Die Bedingungen des Gleichgewichts der in der Ebene xy wirkenden zwei Gruppen sind aber nach (64)

$$\tfrac{1}{2}\Sigma P\cos\alpha=0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma P\cos\beta=0,\ \tfrac{1}{2}\Sigma P(2y\cos\alpha-2x\cos\beta)=0$$

Digitized by Google

und eben so der Gruppen in der Ebene xz

$\frac{1}{2}\Sigma P\cos\alpha=0$, $\frac{1}{2}\Sigma P\cos\gamma=0$, $\frac{1}{4}\Sigma P(2z\cos\gamma-2x\cos\alpha)=0$

endlich der Gruppen in der Ebene yz

$\frac{1}{2}\Sigma P\cos\beta=0$, $\frac{1}{3}\Sigma P\cos\gamma=0$, $\frac{1}{2}\Sigma P(2z\cos\beta-2y\cos\gamma)=0$.

Diese 9 Gleichungen geben in der That nur 6 verschiedene Bedingungen für das Gleichgewicht eines festen Systems von Kräften, so wie sie oben stehen.

68. Folgesatz. Die Gleichungen I., II., III. heben die fortschreitende Bewegung des festen Systems auf: da nun $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ die Projektionen der Kraft P auf die Richtungen der Axen bedeuten, so drücken dieselben den Satz aus: daß die algebraische Summe der auf die Richtungen der Axen projizirten Kräfte im Zustande des Gleichgewichtes null sei. Heißt X, Y, Z, diese Projektionssumme, so hat man

28) $X=\Sigma P\cos\alpha$, $Y=\Sigma P\cos\beta$, $Z=\Sigma P\cos\gamma$.

69. Folgesatz 2. Die Bedeutung der Gleichungen IV., V., VI. kennen zu lernen, denken wir uns die Kraft P am Angriffspunkte x, y, z in die den Axen parallelen Seitenkräfte $P\cos\alpha$ $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ zerlegt, und untersuchen wir die Wirkungen dieser Kräfte hinsichtlich der einzelnen Axen. Die Kraft $P\cos\alpha$ strebt mittelst des Hebelsarmes y den Angriffspunkt um die Axe der z gegen die Axe der y zu drehen, die Kraft $P\cos\beta$ äußert aber mittelst des Hebelsarmes x das entgegengesetzte Bestreben auf den Angriffspunkt, ihn nämlich der Axe der x zuzuführen. Die Resultirende beider Kräfte $Py\cos\alpha-Px\cos\beta$ wird daher eine Drehung des Angriffspunktes oder vielmehr die Drehung seiner Projektion um die Axe der z bewirken. Es ist demnach

$$\Sigma P(y\cos\alpha-x\cos\beta)=L$$

die Summe der statischen Momente sämmtlicher im Raume an einem festen System angebrachten Kräfte zur Drehung des Systems um die Axe der z: eben so findet sich $\Sigma P(x\cos\gamma-z\cos\alpha)=M$ für die Summe der statischen Momente zur Drehung um die Axe der y, und $\Sigma P(z\cos\beta-y\cos\gamma)=N$ um die Axe der z. Die Gleichungen IV., V. und VI. besagen daher, daß die Summe der statischen Momente zur Drehung des Systems um irgend eine Axe im Zustande des Gleichgewichtes null sein müsse.

Digitized by Google

70. Folgesatz 3. Ist das System nicht im Gleichgewichte, und haben die auf dasselbe wirkenden Kräfte P, P_1, P_2 ... eine Resultirende R, so kann man dieselbe sich in drei Kräfte zerlegt vorstellen, welche den Axen beziehungsweise parallel laufen. Bezeichnet man mit a, b, c ihre Richtungswinkel, so folgt sogleich

$$29)\quad R\cos a = X,\quad R\cos b = Y,\quad R\cos c = Z$$

die Summe der Quadrate dieser Gleichungen gibt nun sofort

$$30)\quad R = \sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)},$$ ferner folgt aus 29)

$$31)\quad \cos a = \frac{X}{R},\quad \cos b = \frac{Y}{R},\quad \cos c = \frac{Z}{R}$$

wodurch die Größe und die Richtung der Resultirenden bestimmt werden kann.

71. Aufgabe. Eine beliebige Anzahl paralleler Kräfte sei an einem festen System von Angriffspunkten angebracht, man frägt nach der Größe, Richtung und dem Angriffspunkte ihrer Resultirenden.

Auflösung. Die Größe der Resultirenden ist die algebraische Summe sämmtlicher Kräfte, ihre Richtuug ist den Richtungen der Kräfte parallel, und den Abstand ihres Angriffspunktes von jeder der drei koordinirten Ebenen erhält man, wenn man die Summe der statischen Momente in Beziehung auf diese Ebenen, durch die Summe der Kräfte theilt.

Beweis. Seien M, M_1, M_2, M_3, ... (Fig. 9) die Angriffspunkte mehrerer im Raume nach parallelen Richtungen angebrachten Kräfte P, P_1, P_2, P_3 ... die Lage dieser Angriffspunkte werde durch die Koordinaten bestimmt, welche den durch einen beliebigen Punkt O unter rechten Winkeln gezogenen Axen OX, OY, OZ parallel sind: man setze die Koordinaten des Punktes M $Mm=z$, $mk=y$, $Ok=x$, und eben so bezeichne man mit z_1, y_1, x_1, ferner z_2, y_2, x_2 u. s. f. die Koordinaten der Punkte M_1, M_2, M_3 ...

Betrachtet man zuerst die zwei in M und M_1 wirkenden Kräfte für sich allein, so ergibt sich der Angriffspunkt A ihrer Resultirenden, in der Verbindungslinie MM_1 dieser Kräfte nach (53)

$$AM = \frac{MM_1 \times P_1}{P+P_1},\ \text{mithin ist}$$

Digitized by Google

I. $AM(P+P_1)=MM_1\times P_1$

nun ist, wenn man die Gerade Aa mit Mm, und die Gerade MB mit mm_1 parallel zieht, die sich im Punkte C durchschneiden, $AM:MM_1=AC:M_1B$, dieß gibt II. $MM_1\times AC=AM\times M_1B$ das Produkt der Gleichungen I., II. liefert

III. $AC(P+P_1)=BM_1\times P_1$

addirt man beiderseits die identische Gleichung

$Ca(P+P_1)=P\times Mm+P_1\times Bm_1$, so erhält man

$Aa(P+P_1)=Mm\times P+M_1m_1\times P_1$, nämlich

IV. $Aa(P+P_1)=Pz+P_1z_1$.

Man setze nun statt der in M und M_1 angebrachten Kräfte P, P_1 ihre Summe in A, nach einer denselben parallelen Richtung, so wird an der Wirkung dieser Kräfte nichts geändert (53), demnach, wenn man den Punkt A mit M_2 verbindet, sei D der Angriffspunkt der Resultirenden der in A vereinigten Kraft $P+P_1$ und der Kraft P_2 im Punkte M_2, so wird nach der letzten Gleichung V. $Dd(P+P_1+P_2)=Aa(P+P_1)+P_2z_2$, und man kann abermals die in A und M_2 wirkenden Kräfte durch eine einzige in D angebrachte $P+P_1+P_2$ ersetzen: verbindet man ferner D mit M_3, und es sei E der Angriffspunkt der Resultirenden der zwei Kräfte in D und M_3, so erhält man eben so

VI. $Ee(P+P_1+P_2+P_3)=Dd(P+P_1+P_2)+P_2z_3$ u. s. f.

Addirt man die Ausdrücke IV., V. und VI. zu einander, so folgt nach Hinweglassung der gemeinschaftlichen Glieder sofort

$Ee(P+P_1+P_2+P_3)=Pz+P_1z_1+P_2z_2+P_3z_3$,

oder allgemein, wenn man den Abstand des Angriffspunktes der Resultirenden von der Ebene xy mit z bezeichnet, da

$P+P_1+P_2+P_3+\ldots=R$ ist, erhält man $Rz=\Sigma Pz$

und ganz eben so in Beziehung auf die beiden anderen koordinirten Ebenen ist $Ry=\Sigma Py$, $Rx=\Sigma Px$. Man hat also zur Bestimmung der Lage des Angriffspunktes der Resultirenden die Gleichungen:

32) $Rz=\Sigma Pz$, $Ry=\Sigma Py$, $Rx=\Sigma Px$,

woraus dann, weil $R=\Sigma P$ ist, sofort folgt

$$z=\frac{\Sigma Pz}{\Sigma P},\quad y=\frac{\Sigma Py}{\Sigma P},\quad x=\frac{\Sigma Px}{\Sigma P}$$

Digitized by Google

72 Folgesatz. Da diese Koordinaten unabhängig sind von den Winkeln, welche die Richtungen der parallelen Kräfte mit den Koordinatenaxen bilden, so folgt, daß diese Richtungen wie immer geändert werden können, ohne daß hiedurch der Angriffspunkt der Resultirenden aus seiner Lage gerückt wird.

73. Lehrsatz. Wenn Kräfte nach beliebigen Richtungen an einem festen System von Punkten im Gleichgewichte stehen, so ist stets $LZ+MY+NX=0$, wo L, M, N die Summe der statischen Momente zur Drehung um eine der Axen, und X, Y, Z die Projektionssumme sämmtlicher Kräfte auf die Richtung der Axen vorstellen.

Beweis. Heißen x, y, z die Koordinaten des Angriffspunktes der Resultirenden, so hat man nach (71)

$$X_y=\Sigma P_y\cos\alpha,\ Y_x=\Sigma P_x\cos\beta,\ Z_x=\Sigma P_x\cos\gamma,$$
$$X_z=\Sigma P_z\cos\alpha,\ Y_z=\Sigma P_y\cos\beta,\ Z_y=\Sigma P_y\cos\gamma, \text{ daher (69)}$$
$$L=X_y-Y_x,\ M=Z_x-X_z,\ N=Y_z-Z_y,$$

multiplizirt man nun die erste dieser Gleichungen mit Z, die andere mit Y, die dritte mit X, so gibt die Summe dieser Produkte sofort $LZ+MY+NX=0$ als nothwendige Bedingung, daß die Kräfte P, P_1, P_2 . . . eine einzige Resultirende haben können. Der Werth und die Richtung derselben ergibt sich aber aus den Formeln 30) und 31).

74. Folgesatz. Wenn das feste System einen fixen Punkt enthält, um welchen es rotiren müßte, dann werden nicht mehr die 6 Gleichungen (67) zum Gleichgewichte erfordert. Es ist in diesem Falle hinreichend, wenn die Resultirende der Kräfte durch den fixen Punkt geht. Nimmt man diesen Punkt zum Anfangspunkte der Koordinaten, so geht die Projektion von R auf die drei koordinirten Ebenen durch den fixen Punkt, und man hat

$$33)\ L=0,\ M=0,\ N=0$$

als die drei Gleichungen, welche allein das Gleichgewicht des Systems bedingen. Der Werth der Resultirenden sämmtlicher Kräfte $R=\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}$ ist dann die Größe des auf den festen Punkt ausgeübten Druckes.

Digitized by Google

75. Folgesatz 2. Hat aber das feste System eine feste Axe, so werden alle zu dieser Axe parallelen und auf sie senkrechten Kräfte durch ihre Festigkeit aufgehoben. Nimmt man also diese Axe zu einer der Koordinatenaxen z. B. zur Axe der z, so wird die Wirkung der Kräfte in den Ebenen yz und xz null; es wird also zum Gleichgewichte der Kräfte nur noch erfordert, daß die Resultirende der in der Ebene xy wirkenden Kräfte nach dem Anfangspunkt der Koordinaten gerichtet sei, wodurch die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts auf die einzige Gleichung 34) $N=0$ zurückgeführt werden, d. i. es muß die Summe der Momente in Bezug auf die feste Axe null sein.

76. Erklärung. Den Punkt, an welchem die Resultirende einer Anzahl parallelen Kräfte thätig ist, nennt man den Mittelpunkt paralleler Kräfte. Ein schwerer Körper ist ein Aggregat von materiellen Punkten, welche beim festen Körper eine unveränderliche Lage gegen einander besitzen, jedes derselben wird durch die Schwere nach einer vertikalen Richtung gegen die Erde getrieben. Die Resultirende dieser vertikalen Kräfte heißt das Gewicht des Körpers, und den Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte nennt man den Schwerpunkt desselben.

77. Folgesatz. Das statische Moment eines schweren Körpers in Bezug auf eine durch dessen Schwerpunkt geführte Ebene ist immer null. Geht nämlich eine der koordinirten Ebenen durch den Schwerpunkt des Körpers z. B. die Ebene xy, dann ist dessen Koordinate $z=0$, und nach Formel 32) $\Sigma Pz=0$.

78. Folgesatz 2. Geht aber eine der Axen durch den Schwerpunkt des Körpers, so ist nach (53) wegen $Rr=\Sigma Pp$, wenn $r=0$ ist, nothwendig $\Sigma Pp=0$, d. i. das statische Moment eines schweren Körpers in Bezug anf eine durch dessen Schwerpunkt gezogene Gerade ist immer null.

79. Aufgabe. Die Bedingungen des Gleichgewichts paralleler Kräfte, welche an einem festen System von Punkten im Raume angebracht sind, anzugeben.

Auflösung. Es gibt folgende Bedingungen des Gleichgewichts solcher Kräfte: 1. Die algebraische Summe sämmtlicher Kräfte ist null. 2. Die algebraische Summe der Momente in Beziehung auf zwei der koordinirten Ebenen ist ebenfalls null.

Digitized by Google

Beweis. Nach (70) hat man bei parallelen Kräften

$$R=\Sigma P,\ R_x=\Sigma Px,\ Ry=\Sigma Py,\ R_3=\Sigma Pz.$$

Soll nun zwischen diesen Kräften ein Gleichgewicht bestehen, so muß erstlich $R=0$ werden, dieß gibt $-P=P_1+P_2+P_3+\ldots$. Man bezeichne die Resultirende der rechts des Gleichheitszeichens stehenden Kräfte mit R', alsdann ist noch erforderlich, daß die Kräfte $-P$ und R' denselben Angriffspunkt haben. Wählt man die Koordinatenaxen so, daß die Axe der z zur Richtung der Kraft R' parallel läuft, so sind dann noch immer x, y die Koordinaten ihres Angriffspunktes, und man erhält aus Formel 32)

$$R'y=P_1y_1+P_2y_2+P_3y_3+\ldots$$

$$R'x=P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+\ldots$$

welche Ausdrücke bei Substituirung von $-P$ statt R' sofort geben

$$Py+P_1y_1+P_2y_2+P_3y_3+\ldots=\Sigma Py=0$$

$$Px+P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+\ldots=\Sigma Px=0$$

es sind demnach zum Gleichgewicht paralleler Kräfte im Raume die Bedingungen erforderlich:

I. $\Sigma P=0$, II. $\Sigma Py=0$, III. $\Sigma Px=0$.

IV. Vom Schwerpunkte.

80. Aufgabe. Der Schwerpunkt eines festen Systems von materiellen Punkten zu finden.

Auflösung. Sind die Massen der materiellen Punkte des Systems m, m_1, m_2 ... und bestimmen die Koordinaten x, y z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, ... die Lage derselben in Bezug auf drei unter rechten Winkeln sich schneidende Ebenen; so erhält man die Koordinaten ξ, η, ζ ihres Schwerpunktes nach den Gleichungen

$$35)\quad \xi=\frac{\Sigma mx}{\Sigma m},\quad \eta=\frac{\Sigma my}{\Sigma m},\quad \zeta=\frac{\Sigma mz}{\Sigma m}.$$

Beweis. Die Schwere wirkt auf einzelne Punkte nach Richtungen, welche für die ganze Ausdehnung des Systems als parallel angesehen werden dürfen, und die die einzelnen materiellen Punkte treibenden Kräfte können als den Massen m, m_1, m_2, ... dieser Punkte proportional betrachtet werden. Man hat also die Resultirende $R=\Sigma m$ dem Gewichte des Körpers gleich, und die Lage des Schwerpunktes ergibt sich nach (71) wie oben.

Digitized by Google

81. Folgesatz. Wird also der Schwerpunkt eines festen Systems gestützt, so wird die Resultirende des von der Schwerkraft afficirten Systems aufgehoben, mithin bleibt das System in Ruhe, während dann die Unterlage einen Druck erleidet, welcher dem Gewichte des Körpers gleich ist.

82. Folgesatz. Nimmt man den Schwerpunkt zum Anfangspunkt der Koordinaten, so hat man $x=y=z=0$, mithin

$$36)\quad \Sigma mx=0,\ \Sigma my=0,\ \Sigma mz=0.$$

Die Lage des Schwerpunktes ist also durch die Bedingung bestimmt, daß wenn man durch ihn eine beliebige Ebene legt, die Summe der Produkte aus jedem der Punkte des Systems in seine Entfernung von dieser Ebene null ist.

83. Erklärung. Man versteht unter materieller Linie, Fläche oder Körper Gruppen an einander liegender materieller Punkte, welche in einer Linie, Fläche oder in einem Körperraume gleichförmig vertheilt sind.

84. Lehrsatz. Der Schwerpunkt einer geraden Linie liegt in ihrer Mitte.

Beweis. Nimmt man einen der Endpunkte der Geraden zum Anfangspunkt und die Gerade selbst zur Abszissenaxe, dann ist für irgend einen Punkt, dessen Abszisse x ist, das statische Moment eines Elements dx gleich xdx, also wenn die Gerade die Länge l hat, und x den Abstand ihres Schwerpunktes vorstellt, nach (63) $lx=\int xdx=\frac{1}{2}x^2$, welches für $x=l$ in $lx=\frac{1}{2}l^2$ übergeht, woraus $x=\frac{1}{2}l$ folgt.

1. Schwerpunkt ebener Kurven.

85. Aufgabe. Den Schwerpunkt einer materiellen krummen Linie zu finden.

Auflösung. Sind x, y die Koordinaten eines Punktes, in welchem ein Bogenelement ds angenommen wird, und heißt l die Länge des ganzen Bogens, dessen Schwerpunkt gesucht wird, so ergeben sich dessen Koordinaten aus den Gleichungen

$$37)\quad lx=\int xds,\ ly=\int yds,\ l=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}.$$

Beweis. Sei AB (Fig. 10) eine krumme Linie gegeben durch ihre Koordinatengleichung $y=fx$, und begriffen zwischen den recht-

Digitized by Google

winklichen Koordinaten ihrer Endpunkte $OC=a$, $AC=b$, $OD=c$, $BD=d$: man setze die Länge des Bogens $AB=l$ und die Koordinaten des Schwerpunktes G: $OH=x$, $GH=y$. Sei $Mm=ds$ ein Bogenelement dieser Kurve, dessen Schwerpunkt in der Mitte gelegen ist (84), so sind $x+\frac{1}{2}dx$ und $y+\frac{1}{2}dy$ dessen Koordinaten, welche beziehungsweise in x und y übergehen, wenn man die unendlich kleinen Größen $\frac{1}{2}dx$ und $\frac{1}{2}dy$ wegläßt. Es ist also das Moment des Bogens Mm in Bezug auf die Axe OX gleich yds, und hinsichtlich der Axe OY gleich xds: nun ist das Moment des in seinem Schwerpunkte vereinigten Bogens l hinsichtlich der ersten Axe gleich ly, und in Bezug auf die andere Axe lx; sonach hat man, wenn man die Summe der Momente wie yds, xds durch die Integration auf alle die unendlich kleinen Bogenelemente, aus denen der Bogen l bestehend gedacht werden kann, erstreckt, $lx=\int xds$, $ly=\int yds$, wo nach (A. 1231) $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ ist, und die Integrale zwischen den beiden Grenzen $x=a$ bis $x=c$ zu nehmen sind.

86. Folgesatz. Ist eine Kurve so beschaffen, daß sie durch eine gerade Linie in zwei kongruente Hälften getheilt werden kann, und man nimmt diese Gerade zur Abszissenaxe, dann liegt ihr Schwerpunkt nothwendig auf dieser Axe, oder es ist $ly=\int yds=0$ mithin ergibt sich die Lage ihres Schwerpunkts durch die einzige Formel 38) $lx=\int xds$.

87. Lehrsatz. Der Schwerpunkt eines Kreisbogens, als materielle Linie betrachtet, liegt auf der den Kreisbogen halbirenden Geraden in einem Abstande vom Mittelpunkte desselben, welcher die vierte Proportionallinie ist, zum Bogen, Sehne und Halbmesser des Kreisbogens.

Beweis. Nach (A. 1218) ist $ds=-adx:\sqrt{(a^2-x^2)}$, wenn a den Halbmesser des Kreises vorstellt, und der Anfangspunkt im Mittelpunkte des Kreises angenommen wird. Man hat also für eine Abszissenaxe, welche den Kreisbogen l halbirt, nach Formel 38) und Int. 34)

$$\tfrac{1}{2}lx=a\int\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=a\sqrt{(a^2-x^2)}=ay$$

Digitized by Google

woraus sogleich folgt: $l:2y=a:x$. Nun ist l die Bogenlänge und $2y$ die zugehörige Sehne, a der Halbmesser des Kreises, folglich x die vierte Proportionalzahl dieser Größen.

88. Folgesatz. Für einen Kreisquadranten wird $2y=a\sqrt{2}$, $l=\frac{1}{2}a\pi$, demnach $x=2a\sqrt{2}:\pi=0.900317a$, oder nahe $x=\frac{9}{10}a$. Für einen Halbkreis hat man $y=a$, $l=a\pi$, demnach $x=0.6366198a=\frac{7}{11}a$ nahe.

89. Anmerkung. Wollte man die Lage des Schwerpunktes bei einem Kreisbogen mittelst beider Koordinaten bestimmen, so hätte man erstlich $ds=-adx:\sqrt{(a^2-x^2)}$, wo ds negativ genommen wird, weil der Bogen bei wachsenden Abszissen abnimmt (eine Zeichenänderung, welche in der Folge immer stillschweigend gemacht werden soll), und den Formeln 37) gemäß, wird

$$lx=-a\int\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=a\sqrt{(a^2-x^2)},\ ly=-a\int\frac{ydx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=-ax$$

Da für $x=a$ sowohl der Bogen als auch der Werth von y verschwindet, so ist $C=a^2$, und hiemit vollständig $ly=a^2-ax=a(a-x)$, hiedurch erhält man

$$x=\frac{ay}{l},\ y=\frac{a(a-x)}{l}.$$

90. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines paraboliſchen Bogens zu bestimmen.

Auflösung. Es ist

$$x=\frac{y\sqrt{(p^2+4y^2)^3}-p^3l}{16p^2l},\ y=\frac{\sqrt{(p^2+4y^2)^3}-p^3}{12pl}$$

Beweis. Man hat aus der Gleichung der Parabel $y^2=px$

$$dx=\frac{2ydy}{p},\ \text{und}\ ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dy\sqrt{(p^2+4y^2)}}{p}=\frac{dy\sqrt{Y}}{p}$$

indem man zur Abkürzung I. $p^2+4y^2=Y$ setzt, es ist also II. $ds=dy\sqrt{Y}:p$. Differentiirt man aber den Ausdruck $yY^{3/2}=y(p^2+4y^2)^{3/2}$, so erhält man dafür ganz einfach

$$d(yY^{3/2})=(p^2+4y^2)\sqrt{Y}dy+12y^2\sqrt{Y}.dy=16y^2dy\sqrt{Y}+p^2dy\sqrt{Y}$$

und hieraus folgt $\int y^2dy\sqrt{Y}=\frac{1}{16}yY^{3/2}-\frac{1}{16}p^2\int dy\sqrt{Y}$

Digitized by Google

oder mit Rücksicht auf die Gleichung II. wird

$$\int y^2 dy \sqrt{Y} = {}^1/_{16} Y^{3/2} - p^2 s : 16.$$

Nun ist $x = y^2 : p$, und

$$x ds = \frac{y^2 dy}{p^2} \sqrt{Y}, \text{ sonach III. } lx = \int x ds = \frac{y Y^{3/2}}{16 p^2} - \frac{ps}{16}$$

Ferner hat man $\int y ds = \int \frac{y dy}{p} \sqrt{Y}$, und aus der Gleichung I.

$$dY = 8 y dy, \text{ also } y dy = {}^1/_8 dY, \text{ hiedurch wird}$$

$$ly = \int y ds = \frac{1}{8p} \int \sqrt{Y} dY = \frac{1}{12p} Y^{3/2} = \frac{\sqrt{(p^2+4y^2)^3}}{12p} + C.$$

Da für $y = 0$ das Integral verschwindet, so ist $C = -{}^1/_{12} p^2$ und daher vollständig IV. $ly = \frac{\sqrt{(p^2+4y^2)^3} - p^3}{12p}$.

Aus den Gleichungen III. und IV. ergeben sich sofort die obigen Ausdrücke für x und y.

91. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines elliptischen Bogens zu finden.

Auflösung. Setzt man den Anfangspunkt des elliptischen Bogens in den Scheitel der kleinen Axe, und nimmt diese zur Abszissenlinie an, so hat man

$$x = b - \frac{b}{2l}\left[\frac{y}{a^2}\sqrt{(a^4 - c^2y^2)} + \frac{a^2}{c} \arcsin \frac{cy}{a^2}\right]$$

$$y = \frac{a}{2l}\left[a - \frac{b-x}{b^2}\sqrt{T} + \frac{b^2}{c}\lambda \frac{c(x-b)+\sqrt{T}}{b(a-c)}\right]$$

wenn Kürze halber $c^2 = a^2 - b^2$ und $T = a^2b^2 - 2bc^2x + c^2x^2$ angenommen wird.

Beweis. Die Scheitelgleichung einer auf ihre kleine Axe bezogenen Ellipse I. $b^2y^2 = a^2(2bx - x^2)$ gibt $x^2 - 2bx = -\frac{b^2y^2}{a^2}$,

woraus II. $x = b \pm \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - y^2)}$ folgt, und hier entspricht das obere Zeichen der größeren der beiden Abszissen, welche mit derselben Ordinate zusammengehören. Durch Differentiirung der Gleichung I. erhält man

Digitized by Google

III. $ydy=\frac{a^2}{b^2}(b-x)dx$, mithin $dx=\frac{b^2ydy}{a^2(b-x)}=\frac{bydy}{a\sqrt{(a^2-y^2)}}$

weil nach II. $b-x=b\sqrt{(a^2-y)}:a$ ist, dieß gibt

$$ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{dy}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)y^2}{a^2-y^2}},$$ also nach II.

$$xds=bds-\frac{bds}{a}\sqrt{(a^2-y^2)}=bds-\frac{bdy}{a^2}\sqrt{[a^4-(a^2-b^2)y^2]}$$

oder wenn man $a^2-b^2=c^2$ setzt, und integrirt

$$\int xds=l\chi=bs-\frac{b}{a^2}\int dy\sqrt{(a^4-c^2y^2)},$$ mithin nach Int. 132)

$$\text{IV. } l\chi=bl-\frac{by}{2a^2}\sqrt{(a^4-c^2y^2)}+\frac{a^2b}{2c}\arcsin\frac{cy}{a^2}$$

Ferner ergibt sich aus III.

$$dy=a^2\frac{(b-x)dx}{b^2y},\text{ also } ds=\frac{dx}{b^2y}\sqrt{(b^4y^2+a^4(b-x)^2]}$$

$$\text{oder } yds=dx\sqrt{[b^4y^2+a^4(b-x)^2]}:b^2.$$

Setzt man hierin den Werth von y^2 aus I., so findet man leicht $yds=$

$$\frac{adx}{b^2}\sqrt{[a^2b^2-2b(a^2-b^2)x+(a^2-b^2)x^2]}=\frac{adx}{b^2}\sqrt{(a^2b^2-2bc^2x+c^2x^2)}$$

man bezeichne das Trinom $a^2b^2-2bc^2x+c^2x^2$ mit T, und setze im Int. 161) a^2b^2, $-2bc^2$, c^2 statt a, b, c beziehungsweise, so erhält man $k=4b^2c^2(a^2-c^2)=4b^4c^2$, und hiemit

$$\int yds=-\frac{a(b-x)\sqrt{T}}{2b^2}+\frac{ab^2}{2c}\lambda[-c(b-x)+\sqrt{T}]+C.$$

Da für $x=0$ das Integral verschwindet, und $\sqrt{T}=ab$ wird, so ist $C=\frac{a^2}{2}-\frac{ab^2}{2b}\lambda b(a-c)$, und daher

$$\text{V. } l\gamma=\int yds=\tfrac{1}{2}a\left[a-\frac{b-x}{b^2}\sqrt{T}+\frac{b^2}{c}\lambda\frac{c(x-b)+\sqrt{T}}{b(a-c)}\right]$$

aus den Formeln IV. und V. erhält man die für x und γ angegebenen Ausdrücke sogleich.

92. Folgesatz. Für einen elliptischen Quadranten wird $x=b$, $y=a$, $\sqrt{(a^4-c^2y^2)}=ab$, $\sqrt{T}=b^2$, daher

Digitized by Google

$$x=b-\frac{b}{2l}\left(b+\frac{a^2}{c}\arcsin\frac{c}{a}\right).$$

$$y=\frac{a}{2l}\left(a+\frac{b^2}{c}\lambda\frac{b}{a-c}\right)$$

Für eine halbe Ellipse wird $x=2b, y=0$, also $x=b$, y aber wie beim elliptischen Quadranten.

93. Aufgabe. Den Schwerpunkt der gemeinen Cykloide zu bestimmen.

Auflösung. Für den Anfangspunkt im Scheitel der Cykloide und der Tangente des Scheitels als Abszissenaxe hat man

$$x=p+\frac{2(2r-q)^{3/2}}{3\sqrt{q}}-\frac{8r^2}{3\sqrt{2rq}},\quad y=\tfrac{1}{2}q.$$

Beweis. Nach (A. 1360) hat man $ds=dq\sqrt{\frac{2r}{q}}$, $l=2\sqrt{2rq}$ wenn p, q die Koordinaten eines Punktes der Cykloide vorstellen; dieß gibt

$ly=\int q\,ds=\int dq\sqrt{2rq}=\frac{2}{3}\sqrt{2rq^3}$, mithin $y=\frac{1}{3}q$, ferner ist

$\int p\,ds=\int p.dq\sqrt{\frac{2r}{q}}$, und durch theilweise Integration

$\int p\,dq\sqrt{\frac{2r}{q}}=2p\sqrt{2rq}-2\int dp\sqrt{2rq}$. Nun ist nach (A. 1359)

$dp=dq\sqrt{\frac{2r-q}{q}}$, mithin

$$\int dp\sqrt{2rq}=\sqrt{2r}\int dq\sqrt{(2r-q)}=-\tfrac{2}{3}\sqrt{2r(2r-q)^3},$$

hiemit erhält man

$$\int p\,ds=lx=2p\sqrt{2rq}+\tfrac{4}{3}\sqrt{2r(2r-q)^3}+C.$$

Da für $q=0$ das Integral verschwindet, so ist $C=-\frac{16}{3}r^2$, und man findet sofort

$$x=p+\frac{2\sqrt{(2r-q)^3}}{3\sqrt{q}}-\frac{8r^2}{3\sqrt{2rq}}.$$

94. Folgesatz. Geht der Bogen s in eine halbe Cykloide über, so wird $q=2r$, $p=r\pi$, und es ergibt sich

$$x=r(\pi-\tfrac{4}{3}),\quad y=\tfrac{2}{3}r.$$

Digitized by Google

3. Schwerpunkt ebener Figuren.

95. Aufgabe. Den Schwerpunkt einer materiellen ebenen Figur zu finden, welche zwischen den Bögen zweier gegebenen Kurven, und zwischen den Ordinaten ihrer Endpunkte eingeschlossen ist.

Auflösung. Man hat aus den Koordinatengleichungen der beiden Kurven $y=fx$, $y=Fx$

$$39)\quad ly=\tfrac{1}{2}\int(y^2-y_1^2)dx,\quad lx=\int(y-y_1)x\,dx,$$

wo $l=\int(y-y_1)dx$ bedeutet.

Beweis. Seien AMB, $A'M'B'$ (Fig. 11) zwei in einer Ebene gezogenen, und durch ihre Gleichung $y=fx$, $y_1=Fx$ bezogen, auf rechtwinklige Koordinatenaxen OX, OY gegebene Kurven. Die Abszissen ihrer Endpunkte A, B und A' B' seien $OC=a$, $OD=b$. Theilt man den Flächenraum $AA'B'B$ durch gerade Linien wie PM, welche auf der Axe OX senkrecht stehen, in eine unendliche Anzahl Elemente, so kann man das zwischen zweien auf einander folgenden Ordinaten PM, pm enthaltene Stück $MM'm'm$ der ebenen Figur $AA'B'B$ als ein Rechteck betrachten, welches MM' zur Basis und Pp zur Höhe hat; es ist also dessen Inhalt $=(y-y_1)dx$, folglich erhält man, den Inhalt der ganzen Figur $=l$ setzend, $l=\int(y-y_1)dx$: nun fällt der Schwerpunkt des Elements $MM'm'm$ in seine Mitte (84), so daß der Abstand dieses Punktes von der Axe OX das arithmetische Mittel zwischen den beiden Ordinaten PM, PM', also gleich $\frac{1}{2}(y+y_1)$ und seine Entfernung von der Axe OY gleich $x+\frac{1}{2}dx=x$ ist, man hat also $ly=\frac{1}{2}\int(y+y_1)(y-y_1)dx=\frac{1}{2}\int(y^2-y_1^2)dx$, und $lx=\int(y-y_1)x\,dx$, wo das Integral von $x=a$ bis $x=b$ zu nehmen ist.

96. Folgesatz. Es hängt also die Bestimmung des Schwerpunktes einer ebenen Figur im Allgemeinen von drei Integralen ab, die zwischen einerlei Grenzen genommen werden. Theilt aber eine der beiden Axen die gegebene Figur in zwei gleiche und ähnliche Hälften, die symmetrisch zu beiden Seiten der Axen gelegen sind, so befindet sich der Schwerpunkt der Figur auf dieser Axe, und es bleibt nur noch eine der Entfernungen x, y zu bestimmen, welche mit dem Werthe von l nur zwei Integrationen erfordert.

Digitized by Google

97. Folgesatz 2. Wird aber die Fläche anstatt durch eine Kurve $A'B'$ von der Axe OX begrenzt, so hat man bloß in den obigen Formeln $y_1=0$ zu setzen, und man erhält für die Lage des Schwerpunktes in der Figur $CABD$ die einfacheren Ausdrücke:

40) $ly=\frac{1}{2}\int y^2dx$, $lx=\int xydx$, $l=\int ydx$.

46. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Trapezes zu finden.

Auflösung. Der Schwerpunkt eines Trapezes befindet sich auf der Geraden, welche seine parallelen Seiten a, b, halbirt, in einem Abstande von der größeren b derselben

$$x'=\frac{(a+2b)h}{3(a+b)}$$

wo h den Abstand beider parallelen Seiten bedeutet.

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 12) ein Trapez, und EF die Gerade, welche die Mitte beider parallelen Seiten AB, CD verbindet, nimmt man diese zur Axe der x, und die verlängerte Seite AB zur Axe der y, so liegt der Schwerpunkt des Trapezes G auf jener. Man setze $AB=a$, $DC=b$, $EF=c$, so ist die Gleichung der Geraden AD, $y=\alpha x+\frac{1}{2}a$, weil für $x=0$, $y=\frac{1}{2}a$ wird, daher geben die Formeln 39)

$$l=\int(\alpha x+\tfrac{1}{2}a)dx=\tfrac{1}{2}\alpha x^2+\tfrac{1}{2}ax$$
$$lx=\int(\alpha x+\tfrac{1}{2}a)xdx=\tfrac{1}{3}\alpha x^3+\tfrac{1}{4}ax^2$$

wo die Konstanten der Integration null sind, weil die Fläche mit x zugleich verschwindet, setzt man hier $x=c$ und dividirt beide Ergebnisse mit einander, so erhält man

$$x=\frac{(4\alpha c+3a)c}{6(\alpha c+a)}$$

Die Größe α zu bestimmen, bemerke man, daß für $x=c$, $y=\frac{1}{2}b$ wird, man hat also aus der Gleichung der Geraden AD die folgende $\frac{1}{2}b=\alpha c+\frac{1}{2}a$, woraus $\alpha=(b-a):2c$ folgt, und hiedurch wird I. $x=\frac{(2b+a)c}{3(a+b)}$.

Bezeichnet h die Höhe EK des Trapezes, und führt man GH mit EK parallel, so erhält man, wegen $EF:FG=EK:GH$ oder $c:x=h:x'$, sofort, $x'=GH=\frac{hx}{c}$, und somit II. $x'=\frac{(a+2b)h}{3(a+b)}$

Digitized by Google

99. Folgesatz. Für $a=0$ verwandelt sich das Trapez in ein Dreieck EDC, und man erhält aus 1. $x=\frac{2}{3}c$, mithin $GF=\frac{1}{3}c$, d. i. der Schwerpunkt eines Dreiecks befindet sich auf der Geraden, welche von der Spitze an die Mitte der gegenüberstehenden Seite gezogen wird, um ein Drittel jener Linie von der Seite entlegen.

100. Folgesatz 2. Für $a=b$ verwandelt sich das Trapez in ein Parallelogramm, und man findet $x=\frac{1}{2}c$, d. i. der Schwerpunkt des Parallelogrammes liegt in seinem Mittelpunkte.

101. Lehrsatz. Der Abstand des Schwerpunktes bei einem Dreiecke von irgend einer beliebig gezogenen Geraden, ist gleich dem dritten Theile der Summe der Abstände seiner drei Spitzen von eben derselben Geraden.

Beweis. In dem Dreiecke ABC (Fig. 13) sei der Schwerpunkt in G, und AA', BB', CC', GG', seien die Abstände der Punkte A, B, C, G von der willkührlich gezogenen Geraden $A'C'$: man ziehe EC mit ihr parallel, und aus der Mitte der Seite AB die Gerade DF zu EC senkrecht; so ist im Trapez $AEIB$ die Gerade $DF=\frac{1}{2}(AE+BI)$, nun ist $CG=\frac{2}{3}CD$ (99), folglich

$$GH=\tfrac{2}{3}DF=\tfrac{1}{3}(AE+BI),$$

addirt man hiezu

$$HG'=\tfrac{1}{3}(A'E+B'I+CC'),$$

so ergibt sich

$$GG'=\tfrac{1}{3}(AA'+BB'+CC').$$

102. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines elliptischen Abschnittes zu finden.

Auflösung. Es ist, wenn der Anfangspunkt im Scheitel der kleinen Axe angenommen wird

$$x=b-\frac{b^2y^3}{3a^2l},\quad y=\frac{a^2(3b-x)x^2}{6b^2l}.$$

Beweis. Nach (91. III.) hat man $ydy=a^2(b-x)dx:b^2$, mithin $y^2dy=a^2(b-x)ydx:b^2$. Dieß gibt $(b-x)ydx=b^2y^2dy:a^2$, also $\int(b-x)ydx=b^2y^3:3a^2$. Es ist aber $\int(b-x)ydx=b\int ydx-\int xydx$, sonach $\int xydx=bl-\frac{b^2y^3}{3a^2}$: hiemit erhält man $x=b-b^2y^3:3a^2$ wie oben.

Ferner hat man nach (91. I.) $y^2dx=a^2(2bx-x^2)dx:b^2$

also $\int y^2 dx = a^2(bx^2 - \frac{1}{3}x^3) : b^2$. Weil aber $y = \int y^2 dx : 2l$ ist, so folgt hieraus sofort der oben angegebene Werth von y, hiebei ist nach (A. 1258), wenn man dort a mit b vertauscht, und $b-x$ statt x setzt

$$l = \frac{a}{2b}(b-x)\sqrt{(2bx-x^2)} + \frac{1}{2}ab\arcsin\frac{b-x}{b} + C.$$

da für $x=0$ die Fläche l verschwindet, so ist $C = -\frac{1}{4}ab\pi$ und daher vollständig

$$l = \frac{a}{2b}(b-x)\sqrt{(2bx-x^2)} + \frac{1}{2}ab\arcsin\frac{b-x}{b} - \frac{1}{4}\pi)$$

103. Folgesatz. Für den elliptischen Quadranten hat man $x=b$, $y=a$ und $\arcsin(b-x) : b = \pi$, sonach

$l = \frac{1}{4}ab\pi$, $x = b - ab^2 : 3l = b - \frac{4}{3}b : \pi = 0.575587b$, oder nahe $x = \frac{19}{33}b$, $y = a^2b : 3l = \frac{4}{3}a : \pi$, oder nahe $\frac{14}{33}a$.

Für die halbe Ellipse aber ist $y=0$ und $x = b - \frac{4}{3}b\pi$ und der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte der Ellipse, d. i. $b - x = \frac{4}{3}b : \pi$.

104. Folgesatz 2. Für einen Kreisabschnitt ergibt sich $a=b=r$ setzend, $x = r - y^3 : 3l$, $y = (3r-x)x^2 : 6l$, wo l den Flächeninhalt des Kreisabschnittes ausdrückt.

105. Folgesatz 3. Führt man hingegen die Abszissenaxe durch die Mitte des zum Kreisabschnitte gehörenden Bogens, so kommt der Schwerpunkt auf diese Gerade zu stehen, mithin ist $y=0$ und $x = r - 8y^3 : 24l$. Man findet ferner den Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte des Kreisbogens oder

$r - x = 8y^3 : 12l = (2y)^3 : 12l$, wo $2y$ die Sehne des Kreisabschnittes und l den Inhalt des beiderseits der Abszissenaxe gelegenen Kreisabschnittes bedeutet, d. i. der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte eines Kreisabschnittes beträgt die dritte Potenz seiner Chorde, getheilt durch den zwölffachen Inhalt desselben.

106. Lehrsatz. Der Schwerpunkt eines Kreissektors befindet sich auf dem den Sektor halbirenden Halbmesser in einer Entfernung vom Mittelpunkte, welche dem doppelten Produkte aus dem Halbmesser in die Sehne getheilt durch das Dreifache der Bogenlänge gleich ist.

Digitized by Google

Beweis. Sei $AB=s$ (Fig. 14) ein Kreisbogen, der mit dem Halbmesser $AC=r$ zwischen den Schenkeln des Winkels ACB beschrieben ist, so entsteht ein Kreissektor ACB, dessen Schwerpunkt gesucht wird. Sei ferner $Mm=ds$ ein Bogenelement, an dessen Endpunkte die Halbmesser CM, Cm gezogen werden; diese begrenzen ein materielles Dreieck CMm, dessen Schwerpunkt nach (99) in g liegt, so daß $Cg=\frac{2}{3}r$ ist. Beschreibt man nun aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser Cg den Bogen $A'B'$, so liegen auf demselben die Schwerpunkte aller materiellen Dreiecke, in welche der Sektor ACB zerfällt werden kann, mithin ist der Schwerpunkt des materiellen Kreisbogens $A'B'$, zugleich auch der Schwerpunkt des Sektors ACB. Heißt nun $AB=s$, die Chorde $AB=c$, so ist Bogen $A'B'=\frac{2}{3}s$, und Chorde $A'B'=\frac{2}{3}c$, und man hat nach (87) $\frac{2}{3}s:\frac{2}{3}c=\frac{2}{3}r:x$, oder $s:c=\frac{2}{3}r:x$, also $x=2cr:3s$.

107. **Folgesatz.** Für den Quadranten ist $s=\frac{1}{2}\pi r$, $c=r\sqrt{2}$, mithin $x=4r\sqrt{2}:3\pi=0.600211r$, oder nahe $x=\frac{3}{5}r$. Für den Halbkreis hingegen hat man $s=\pi r$, $c=2r$, also $x=4r:3\pi=0.424413r$, d. i. $x=\frac{14}{33}r$ nahe.

108. **Aufgabe.** Den Schwerpunkt eines zwischen zwei konzentrischen Kreisbögen enthaltenen Ringstückes zu finden.

Auflösung. Heißen R, C, S Halbmesser, Chorde und Bogenlänge des äußeren, und ist r der Halbmesser des inneren Kreises, so befindet sich der Schwerpunkt des Ringstückes auf dem dasselbe halbirenden Halbmesser in einem Abstande x vom Mittelpunkte wobei

$$41)\quad x=\frac{2C}{3S}\cdot\frac{R^3-r^3}{R^2-r^2}\text{ ist.}$$

Beweis. Sei $AA'B'B$ das Ringstück, C der gemeinschaftliche Mittelpunkt beider Kreisbogen, man setze $AC=R$, $A'C=r$, die Sehnen $AB=C$, $A'B'=c$, die Bogen $AB=S$, $A'B'=s$: sei ferner X die Entfernung des Schwerpunktes vom Mittelpunkte für den Sektor ACB, und eben so bedeuten beziehungsweise x, x dieselben Größen für den Sektor $A'CB'$ und für das Ringstück, so ist (106)

Digitized by Google

I. $X=\frac{2CR}{3S}$, $x=\frac{2cr}{3s}$,

der Sektor $ACB=\frac{1}{2}RS$, $A'CB'=\frac{1}{2}rs$, also Ringstück $=\frac{1}{2}(RS-rs)$. Da nun die Summe der Momente des Ringstückes und des inneren Kreissektors, aus welchen der äußere Kreissektor besteht, dessen Momente in Beziehung auf denselben Punkt gleich sei, so hat man

$$X.\tfrac{1}{2}RS=x.\tfrac{1}{2}rs+x.\tfrac{1}{2}(RS-rs),$$ dieß gibt

$$\text{II. } x=\frac{RSX-rsx}{RS-rs}$$

nun ist $S:s=R:r$, daher III. $s=Sr:R$, und man findet nach Substitution der Werthe für X, x aus I. und des für s aus III. in die Gleichung II. sofort den angegebenen Ausdruck.

109. Folgesatz. Heißt ϱ der mittlere Halbmesser des Ringstückes und b dessen Breite, so erhält man

$$R=\varrho+\tfrac{1}{2}b,\ r=\varrho-\tfrac{1}{2}b, \text{ also}$$

$$\frac{R^2-r^2}{R^2-r^2}=\frac{R^2+Rr+r^2}{R+r}=\frac{12\varrho^2+b^2}{8\varrho}.$$

Sei nun σ der Bogen und k die Chorde, welche zum Halbmesser ϱ gehören, so verhält sich

$S:\sigma=C:k$, also ist $\frac{C}{S}=\frac{k}{\sigma}$, hiedurch wird aus Form. 41)

$$\varrho=\frac{k(12\varrho^2+b^2)}{12\varrho\sigma}.$$

110. Folgesatz. Beim Uebergange des Kreissektors in einen Quadranten hat man $C=R\sqrt{2}$, $S=\frac{1}{2}\pi R$, und es ergibt sich aus Formel 41)

$$42)\ x=\frac{4(R^2+Rr+r^2)\sqrt{2}}{3(R+r)\pi}.$$

111. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines halben elliptischen Ringes zu finden.

Auflösung. Sind A, B und a, b die halben Halbaxen der äußeren und inneren Ellipse, welche den Ring begrenzen, so hat man $x=\frac{4}{3\pi}.\frac{AB^2-ab^2}{AB-ab}$.

Digitized by Google

Beweis. Ist C der Mittelpunkt des halben elliptischen Ringes $AEHFBDA$ (Fig. 15), und man setzt $CB=A$, $CD=B$, $CF=a$, $CH=b$, ferner den Abstand der Schwerpunkte der halben Ellipsen ADB, EHF und des Ringes von dem Mittelpunkte, beziehungsweise gleich X, x, χ, so hat man wegen (A. 1258)

$$ADB=\tfrac{1}{2}\pi.AB,\quad EHF=\tfrac{1}{2}\pi ab,$$

also der Ring $=\tfrac{1}{2}\pi(AB-ab)$: nun ist nach (63)

$$X.ADB=x.EHF+\chi.ADBFHE \text{ oder}$$

$$X.\pi.A.B=x.\pi.a.b+\chi\pi.(A.B-a.b), \text{ mithin}$$

$$\text{I. } \chi=\frac{ABX-abx}{AB-ab}$$

es ist aber nach (103)

$$X=\frac{4B}{3\pi},\quad x=\frac{4b}{3\pi}$$

mit diesen Werthen erhält man aus I.

$$\text{II. } \chi=\frac{4}{3\pi}\cdot\frac{AB^2-ab^2}{AB-ab}$$

112. Folgesatz. Sind die Ellipsen einander ähnlich, d. i. wenn $A:B=a:b$, so folgt $b=aB:A$, und hiemit wird die Gleichung II.

$$\text{III. } \chi=\frac{4B}{3\pi A}\cdot\frac{A^2+Aa+a^2}{A+a}.$$

113. Lehrsatz. Wenn eine Parabel von der Abszissenaxe und von einer im Abstande x gezogenen Ordinate begrenzt wird, so sind die Koordinaten des Schwerpunktes in der ebenen Figur $x=\tfrac{3}{5}x$, $y=\tfrac{3}{8}y$.

Beweis. Die Gleichung der Parabel $y^2=px$ gibt

$$dx=\frac{2ydy}{p},\text{ also } xydx=\frac{2y^4dy}{p^2},\text{ daher}$$

$$\int xydx=\frac{2}{p^2}\int y^4dx=\frac{2y^5}{5p^2}\text{: nun ist } l=\tfrac{2}{3}xy=\frac{2y^3}{3p}\text{ (A. 1255),}$$

mithin erhält man

$$\frac{2y^3}{3p}.\,x=\frac{2y^5}{5p^2},\text{ also } x \text{ wie oben.}$$

Digitized by Google

Ferner hat man $y^2dx=2y^3dy:p$, also

$$ly=\int y^2dx=y^4:2p, \text{ und } y=\tfrac{3}{8}y.$$

114. Aufgabe. Den Schwerpunkt einer Cykloidalfläche zu finden.

Auflösung: Wird die Tangente des Scheitels der Cykloide zur Abszissenaxe genommen, so ergeben sich die Koordinaten des Schwerpunktes aus den Gleichungen

$$ly=\tfrac{1}{2}rl-\tfrac{1}{6}\sqrt{2qr-q^2}^3, \text{ und für } z=\operatorname{arcsinv}(q:r)$$

$$lx=\tfrac{3}{4}rq^2-\tfrac{1}{10}q^3+\tfrac{3}{2}r^2q+\tfrac{1}{4}r^3z^2-\tfrac{1}{2}rz(r-q)\sqrt{(2qr-q^2)}$$

Beweis. Ist DM (Fig. 15) ein Bogen der Cykloide, und man setzt $DP=p$, $PM=q$, und die Koordinaten des Schwerpunktes G der Fläche $DPM=l$, nämlich $DI=x$, $IG=y$; so sind x, y, die gesuchten Größen, welche man so findet:

Nach (A. 1359) ist für die Cykloide, deren Abszissenaxe die Tangente des Scheitels ist,

I. $dp=(2r-q)dq:\sqrt{(2qr-q^2)}$, dieß gibt für $Q=2qr-q^2$

$$q^2dp=qdq\sqrt{Q}, \text{ welchen Ausdruck man auch so schreiben kann}$$

II. $q^2dp=(q-r)dq\sqrt{Q}+rdq\sqrt{Q}$,

nun ist die Fläche III. $l=\int qdp=\int dq\sqrt{Q}$, und nach Int. 150) und 143)

IV. $l=\tfrac{1}{2}(q-r)\sqrt{Q}+\tfrac{1}{2}r^2\operatorname{arcsinv}(q:r)$

weil ferner $\int(q-r)\sqrt{(2qr-q^2)}dq=-\tfrac{1}{3}\sqrt{(2qr-q^2)^3}$ ist, so findet man aus II. $ly=\tfrac{1}{2}\int q^2dp=\tfrac{1}{2}rl-\tfrac{1}{6}\sqrt{(2qr-q^2)^3}$.

Um noch x zu bestimmen, schreibe man die Gleichung I. so:

$$dp=\frac{(r-q)dq}{\sqrt{(2qr-q^2)}}+\frac{rdq}{\sqrt{(2qr-q^2)}}$$

welches nach (A. 911) und Int. 143) gibt

$$p=\sqrt{(2qr-q^2)}+r\operatorname{arcsinv}(q:r)$$

setzt man noch zur Abkürzung $\operatorname{arcsinv}(q:r)=z$, so wird $p=\sqrt{Q}+rz$; multiplizirt man diesen Ausdruck mit q und mit dem der Gleichung I. entnommenen Werthe von dp, so ergibt sich

$$pqdp=Qdq+rzdq\sqrt{Q}, \text{ also ist}$$

V. $\int pqdp=lx=rq^2-\tfrac{1}{3}q^3+r\int zdq\sqrt{Q}$.

Durch theilweise Integration findet man wegen III.

$$\int zdq\sqrt{Q}=zl-\int ldz, \text{ und weil nach (A. 777)}$$

$ldz=ld\operatorname{arcsinv}(q:r)=ldq:\sqrt{Q}$ ist, und indem man den Werth

Digitized by Google

von l aus IV. setzt, wird $ldz=\frac{1}{2}(q-r)dq+\frac{1}{2}r^2zdz$, daher $\int ldz=\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{2}qr+\frac{1}{4}r^2z^2=\frac{1}{4}r^2z^2-\frac{1}{4}Q$. Hiemit erhält man $\int xdq\sqrt{Q}=\frac{1}{4}r^2z^2-\frac{1}{2}xz(r-q)\sqrt{Q}+\frac{1}{4}Q$, und bei Substituirung dieses Werthes in die Gleichung V folgt

$$lx=\int pqdp=\frac{1}{2}qr^2+\frac{3}{4}q^2r-\frac{1}{3}q^3+\frac{1}{4}r^3z^2-\frac{1}{2}r^2z(r-q)\sqrt{Q}$$

wie oben.

115. Folgesatz. Für eine halbe Cykloide ist $q=2r$, hiedurch wird in IV. $l=\frac{1}{2}\pi r^2$, $y=\frac{1}{2}r$, demnach $x=\pi$, und

$$lx=r^3(\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}\pi^2),\quad x=8r(1+\tfrac{3}{16}\pi^2):3\pi$$

für die ganze Cykloide hingegen ist $x=0$, $y=\frac{1}{2}r$.

116. Folgesatz 2. Zur Bestimmung des Schwerpunktes G' der Figur DMQ, sei $DI'=x'$; $I'G'=y'$; das Rechteck $DPMQ$, wo $DP=p$, $PM=q$ ist, hat den Werth $\frac{1}{2}pq^2$ zum Momente hinsichtlich der Axe DT, und $\frac{1}{2}p^2q$ zum Momente in Beziehung auf die Axe DC. Eben so sind ly und lx, ferner $(pq-l)y'$ und $(pq-l)x'$ die Momente der Flächen DPM und DMQ in Beziehung auf dieselben Axen; man hat also $\frac{1}{2}pq^2=ly+(pq-l)y'$ und $\frac{1}{2}p^2q=lx+(pq-l)x'$, aus welchen Gleichungen sich sofort y' und x' ergibt, nachdem man die für y und x bekannten Werthe in ihnen substituirt hat. Man findet so:

$$(pq-l)y'=\tfrac{1}{2}pq^2-\tfrac{1}{2}rl+\tfrac{1}{6}\sqrt{(2pr-q^2)^3}$$

$$(pq-l)x'=\tfrac{1}{2}p^2q-\tfrac{1}{2}r^2q-\tfrac{3}{4}rq^2+\tfrac{1}{3}q^3-\tfrac{1}{4}r^3z^2$$
$$+\tfrac{1}{2}rxz(r-q)\sqrt{(2qr-q^2)}.$$

117. Folgesatz 3. Für die halbe Cykloidalfläche DAC ergib sich hieraus $y'=\frac{7}{6}r$, $x'=(9\pi^2-16)r:18\pi$.

3. Schwerpunkt krummer Oberflächen.

118. Aufgabe. Eine durch ihre Gleichung $y=fx$ gegebene Kurve BC (Fig. 10) drehe sich um die Axe OX, man sucht den Schwerpunkt, der bei dieser Umdrehung entstandenen krummen Oberfläche.

Auflösung. Heißt O der Inhalt der erzeugten Oberfläche, so hat man die Abszisse ihres Schwerpunktes aus den Gleichungen:

$$43)\quad O=2\pi\int yds,\quad xO=2\pi\int yxds.$$

Beweis. Bei der Umdrehung der Kurve AB um die Axe

der x erzeugt jedes Element wie Mm, die Oberfläche eines parallel abgestutzten Kegels, dessen Grundflächen Kreise mit den Halbmessern $PM=y$, $pm=y+dy$, und dessen Seite der Bogen $Mm=ds$ sind, es ist sonach (A. 1650) die Oberfläche dieses abgestutzten Kegels $\pi(PM+pm)Mm=2\pi yds$, also die ganze durch die Rotation des Bogens AB entstandene Oberfläche $O=2\pi\int yds$. Das Moment der vom Element Mm erzeugten Zone dieser Oberfläche in Beziehung auf die Axe der y ist $2\pi\int yxds$; nennt man also χ den Abstand des Schwerpunktes der ganzen Rotationsfläche von der Axe OY, so hat man $\chi O=2\pi\int yxds$; beide Integrale sind zwischen den Grenzen $x=OC=a$ bis $x=OD=a'$ zu nehmen. Da nun sämmtliche materiellen Punkte dieser Oberfläche hinsichtlich der Axe OX symmetrisch gestellt sind, so liegt der Schwerpunkt derselben auf dieser Axe, und es reichen die Gleichungen 43) zur Bestimmung der Lage dieses Schwerpunktes vollkommen aus.

Der Ausdruck $\chi O=2\pi\int xyds$ berechtiget uns zu dem Schlusse, daß, wenn die Axe der y zur Umdrehungsaxe des erzeugten Körpers angenommen wird, welches geschieht, indem man x mit y vertauscht, das statische Moment der Rotationsoberfläche unverändert bleibt.

119. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines abgestutzten Kegels zu finden.

Auflösung. Heißen R, r die Halbmesser der beiden kreisförmigen Grundflächen, und h die Höhe des Kegels, so hat man

$$\chi=h(2R+r):3(R+r).$$

Beweis. Sei die erzeugende Linie AB (Fig. 16) eine Gerade, welche durch die Gleichung $y=ax+b$ vorgestellt werde, so erhält man $dy=adx$ und daher $ds=dx\sqrt{(1+a^2)}$, dieß gibt $\int yds=\sqrt{(1+a^2)}\int(ax+b)dx$, $\int xyds=\sqrt{(1+a^2)}\int(ax^2+bx)dx$.

Integrirt man diese Ausdrücke und setzt $x=h$, so findet man

$$O=2\pi(\tfrac{1}{2}ah^2+bh)\sqrt{(1+a^2)}$$
$$\chi O=2\pi(\tfrac{1}{3}ah^3+\tfrac{1}{2}bh^2)\sqrt{(1+a^2)}$$

ihr Quotient wird $\chi=\tfrac{1}{3}h.\dfrac{2ah+3b}{ah+2b}$.

Da nun R und r die Halbmesser der parallelen Grundflächen

Digitized by Google

des Kegels sind, so hat man, weil $x=0$, $y=c=AO$ gibt, $r=h$ und $R=ah+r$, sonach

$$a=\frac{R-r}{h}, \text{ hiedurch wird } x=\tfrac{1}{3}h.\frac{2R+r}{R+r}.$$

120. Folgesatz. Für die krumme Oberfläche eines ganzen Kegels ist $r=0$ und $x=\frac{2}{3}h$. Für die krumme Oberfläche eines Kreiscylinders wird, $R=r$ setzend, $x=\frac{1}{2}h$.

121. Lehrsatz. Der Schwerpunkt einer hohlen Kugelzone liegt in der Mitte ihrer Höhe.

Beweis. Eine Kugelzone entsteht durch die Rotation eines Kreisbogens um seinen Durchmesser: sei $x^2+y^2=r^2$ die Gleichung des Kreises, also (A. 1218) $ds=-\frac{rdx}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$, hiemit findet man $\int yds=-rx+C$, und da für $x=r$ der Bogen verschwindet, so ist $C=r^2$, und daher $\int yds=r(r-x)$, und eben so ergibt sich $\int xyds=\frac{1}{2}r(r^2-x^2)$. Man erhält also

$$\text{I. } x=\frac{\int xyds}{\int yds}=\frac{\frac{1}{2}r(r^2-x^2)}{r(r-x)}=\tfrac{1}{2}(r+x)$$

Heißt nun die Höhe des Kugelabschnittes h, so ist $h=r-x$ oder $x=r-h$, hiemit findet man II. $x=\frac{1}{2}(2r-h)=r-\frac{1}{2}h$ zum Abstande des Schwerpunktes vom Mittelpunkte, sonach $r-x=\frac{1}{2}h$ zu dessen Abstande vom Scheitel des Kugelabschnittes.

122. Folgesatz. Für die Halbkugel ist $x=0$, und die Gleichung I. gibt $x=\frac{1}{2}r$. Für die ganze Kugel hat man $x=-r$, also $x=0$.

123. Aufgabe. Den Schwerpunkt der Oberfläche eines paraboliſchen Konoids zu finden.

Auflösung. Man hat bei einem durch die Umdrehung eines Bogens AM (Fig. 17) der Parabel um ihre Hauptaxe OX erzeugten Konoids

$$O=\tfrac{4}{3}\pi\sqrt{p}(\tfrac{1}{4}p+x)^3-\tfrac{1}{6}p^3\pi,\quad xO=\pi(24x^2+2px-p)\sqrt{(\tfrac{1}{4}p+x)}:60.$$

Beweis. In der Parabel ist nach (A. 1214) $ds=dx\sqrt{\frac{p+4x}{4x}}$ und (A. 1664) $O=\frac{4}{3}\pi\sqrt{p}(\frac{1}{2}p+x)^3-\frac{1}{6}p^3\pi$. Nun ist $xO=2\pi\int xyds=2\pi\sqrt{p}\int xdx\sqrt{(\frac{1}{4}p+x)}$, und nach Int. 128)

Digitized by Google

für $m=1$

$$\int x dx \sqrt{(1/4 p+x)} = \frac{2x^2\sqrt{(1/4 p+x)}}{5} + \frac{p}{20}\int \frac{x dx}{\sqrt{(1/4 p+x)}}$$

ferner nach Int. 137)

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(1/4 p+x)}} = \frac{2x\sqrt{(1/4 p+x)}}{3} - 1/6 p \int \frac{dx}{\sqrt{(1/4 p+x)}}$$

endlich nach Int. 33)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1/4 p+x)}} = 2\sqrt{(1/4 p+x)}.$$

Durch Verbindung dieser Ausdrücke ergibt sich

$$xO = \pi(2/15 x^2 + 1/30 px - 1/60 p)\sqrt{(1/4 p+x)}.$$

124. Aufgabe. Den Schwerpunkt der Oberfläche eines abgeplatteten Sphäroids zu bestimmen.

Auflösung Wird das Sphäroid durch die Umdrehung eines elliptischen Bogens um dessen kleine Axe erzeugt, so hat man

$O = ak\pi(tgv \sec v + \mathfrak{L} v)$, und $xO = 2/3 \pi a \sqrt{(k^2+x^2)^3} : k$,

wo $tgv = \frac{x\sqrt{(a^2-b^2)}}{b^2}$, und $k = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}$

bedeutet.

Beweis. Nach (A. 1661) hat man O wie oben, und zugleich

$$ds = \frac{a dx \sqrt{(k^2+y^2)}}{ky}.$$

Dieß gibt $xO = 2\pi \int xy ds = \frac{2\pi a}{k} \int x dx \sqrt{(k^2+x^2)}$

es ist aber nach Int. 129) für $m=1$

$$\int x dx \sqrt{(k^2+x^2)} = 1/3 x^2 \sqrt{(k^2+x^2)} + 1/3 k^2 \int \frac{x dx}{\sqrt{(k^2+x^2)}},$$

und nach Int. 34)

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{(k^2+x^2)}} = \sqrt{(k^2+x^2)}, \text{ demnach } xO \text{ wie oben.}$$

125. Folgesatz. Für $x=b$ wird nach (A. 1662) die Oberfläche des halben Sphäroids

$$O = a^2\pi + \frac{ab^2\pi}{\sqrt{(a^2-b^2)}} \lambda \frac{a+\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}$$

und $xO = 2\pi a \sqrt{(k^2+b^2)^3} : 3k$.

Digitized by Google

126. Aufgabe. Den Schwerpunkt der Oberfläche eines länglichen Sphäroids zu bestimmen.

Auflösung. Man hat $O=\frac{b\pi}{a}\left[x\sqrt{(a^2-e^2x^2)}+\frac{a^2}{e}\arcsin\frac{ex}{a}\right]$

und $xO=2b\pi\sqrt{(a^2-e^2x^2)^3}:3ae^2$.

Beweis. Nach (A. 1657) ist O wie oben, und

$$2\pi y ds=-\frac{2b\pi dx}{a}\sqrt{(a^2-e^2x^2)}$$

demnach $xO=2\pi\int xy ds=-\frac{2b\pi}{a}\int x dx\sqrt{(a^2-e^2x^2)}$

welcher Ausdruck nach Int. 129) und 34) sofort in

$xO=2b\pi\sqrt{(a^2-e^2x^2)^3}:3ae^2$ übergeht.

127. Folgesatz. Ist hier $x=a$, so erhält man für die halbe Oberfläche des länglichen Sphäroids

$$O=\pi b\left(b+\frac{a^2}{e}\arcsin e\right),\quad xO=2b^2\pi:3ae^2.$$

128. Aufgabe. Den Schwerpunkt der Oberfläche eines Cykloidalkonoids zu bestimmen.

Auflösung. Dreht sich der Bogen der Cykloide um die Tangente des Scheitels, so hat man $O=\frac{4}{3}\pi\sqrt{2rq^3}$, und

$xO=\frac{4}{3}\pi[pq\sqrt{2qr}+\frac{2}{3}r\sqrt{2r(2r-q)^3}+\frac{4}{15}\sqrt{2r(2r-q)^5}-\frac{32}{15}r^3]$.

Rotirt aber die Cykloide um ihre Axe, so wird

$$O=A\pi p\sqrt{2rq}+\frac{8}{3}\pi\sqrt{2r(2r-q)^3}-\frac{32}{3}\pi r^2$$

und xO wie vorhin (118).

Beweis. In der Cykloide ist nach (A. 1360) $ds=dq\sqrt{\frac{2r}{q}}$

woraus $O=2\pi\int qdq\sqrt{\frac{2r}{q}}=\frac{4}{3}\pi\sqrt{2q^3r}$ folgt. Nun ist

$$xO=2\pi\int pq\sqrt{\frac{2r}{q}}dq=2\pi\int pdq\sqrt{2qr}$$

die theilweise Integration gibt $\int pdq\sqrt{q}=\frac{2}{3}pq^{3/2}-\frac{2}{5}\int q^{3/2}dp$,

und weil $dp=dq\sqrt{\frac{2r-q}{q}}$ (A. 1359), so folgt

$$\int q^{3/2}dp=\int qdq\sqrt{(2r-q)}=-\frac{2}{3}q(2r-q)^{3/2}-\frac{2}{5}\int(2r-q)^{3/2}dq$$

Digitized by Google

d. i. $\int q^{3/2}dp = -\frac{2}{5}q\sqrt{(2r-q)^3} + \frac{8}{15}\sqrt{(2r-q)^5}$

hiedurch verwandelt sich der Ausdruck für xO in

$$xO = \frac{8}{5}\pi pq\sqrt{2qr} + \frac{8}{5}\pi q\sqrt{2r(2r-q)^3} + \frac{16\pi}{45}\sqrt{2r(3r-q)^5} + C$$

weil für $q=0$, auch xO verschwindet, so erhält man $C=-128\pi r:45$ und hiemit xO wie oben.

Im zweiten Falle hat man $O=2\pi\int p\sqrt{\frac{2r}{q}}dq$, welches theilweise integrirt, gibt

$$O = 4\pi p\sqrt{2rq} + \frac{8}{3}\pi\sqrt{2r(2r-q)^3} - \frac{32}{3}\pi r^2$$

hingegen ist jetzt nach Formel 43) $xO=2\pi\int pqds$, und dieser Ausdruck bleibt ungeändert, wenn man p mit q verwechselt; mithin werden auch die statischen Momente der Rotationsflächen, welche durch die Umdrehung des Cykloidalbogens DM (Fig. 15) um die Axe DP oder um die Axe DQ erzeugt werden, gleich bleiben. Durch die Division der Ausdrücke für xO und O ergibt sich in beiden Fällen der Werth von x, welcher die Lage des Schwerpunktes in der zugehörigen Axe bestimmt.

129. Folgesatz. Für eine halbe Cykloide hat man $p=r\pi$, $q=2r$, und man findet im ersten Falle

$$O = \frac{16}{3}\pi r^2,\quad x = r(\pi - \frac{6}{15})$$

im zweiten Falle aber

$$O = 8\pi r^2(\pi - \frac{4}{3}),\quad x = \frac{2}{3}r(\pi - \frac{6}{15}) : (\pi - \frac{4}{3}).$$

4. Schwerpunkt der von Flächen eingeschlossenen Körper.

130. Lehrsatz. Der Schwerpunkt einer Pyramide befindet sich auf der Geraden, welche ihre Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet in einem Abstande von der Grundfläche, welcher dem vierten Theile ihrer Höhe gleich kommt.

Beweis. Gedenkt man sich die Pyramide $ABCDEF$ (Fig. 18) durch Ebenen der Grundfläche parallell in eine unendliche Menge dünner Scheiben getheilt, und man verbindet irgend einen Punkt G der Grundfläche mit der Spitze durch die Gerade AG, so schneidet dieselbe sämmtliche Scheiben in ähnlich liegenden Punkten (A. 1433). Ist also dieser Punkt G der Schwerpunkt der Grundfläche, so wird der Durchschnittspunkt g des Schnittes bdc

Digitized by Google

mit der Geraden AG, der Schwerpunkt des Schnittes sein, es liegt folglich der Schwerpunkt der ganzen Pyramide auf der Geraden AG. Sei nun die Höhe der Pyramide $AH=h$ und $z=Hh$ die Entfernung des Schnittes, dessen Inhalt Z heißen soll, von der Grundfläche, deren Inhalt wir mit G bezeichnen, so hat man nach (A. 1432)

$$G : Z = h^2 : (h-z)^2, \text{ oder } Z = G(h-z)^2 : h^2$$

sei ferner dz die Höhe einer jener Scheiben, in welche die Pyramide getheilt wurde, also Zdz der Inhalt derjenigen Scheibe, welche Z zur Basis hat, so ist $Zzdz$ ihr Moment in Beziehung auf die Grundfläche, und $\int Zdz$ der Inhalt der ganzen Pyramide, sofern das Integrale auf alle Scheiben, in welche dieselbe zertheilt wurde, erstreckt wird. Heißt nun z der Abstand ihres Schwerpunktes von der Basis, so hat man sofort

$$z\int Zdz = \int Zzdz.$$

Diese Gleichung gibt $z = \dfrac{\int Zzdz}{\int Zdz}$ oder nach Substituirung des Werthes von Z

$$z = \frac{\int z(h-z)^2 dz}{\int (h-z)^2 dz}, \text{ d. i. } z = \frac{\frac{1}{2}h^2z^2 - \frac{2}{3}hz^3 + \frac{1}{4}z^4}{h^2z - hz^2 + \frac{1}{3}z^3}$$

und für $z=h$ wird $z = \frac{1}{12}h^4 : \frac{1}{3}h^3 = \frac{1}{4}h$.

131. Folgesatz. Da derselbe Schluß auf Pyramiden mit einer beliebigen Seitenzahl sich ausdehnen läßt, so gilt er auch für Körper, welche von konischen Flächen (A. 1434) begrenzt werden, und man findet die Lage des Schwerpunktes aller Gattungen Kegel, auf der Geraden, welche die Spitze des Kegels mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet, in einem Abstande von der Grundfläche, welcher dem vierten Theile der Höhe des Kegels gleich kommt.

132. Lehrsatz. Der Abstand des Schwerpunktes einer dreiseitigen Pyramide von einer beliebig geführten Ebene ist gleich dem vierten Theile der Summe der Abstände der vier Ecken dieser Pyramide von jener Ebene.

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 19) die dreiseitige Pyramide, und MN eine beliebige Ebene, auf welche von den Ecken der Pyramide die Perpendikel $Aa=a$, $Bb=b$, $Cc=c$, $Dd=d$ gefällt werden; man ziehe durch den der Ebene nächst liegenden Punkt B die

Digitized by Google

Ebene $Bc'd'$ mit der Ebene MN parallel; so ist das Dreieck $Bc'd'=bcd$, weil sie Projektionen desselben Dreieckes BCD auf zwei einander parallele Ebenen vorstellen. Nun werde die Seite DC in E halbirt, und die Gerade BE gezogen, hierauf $BF=\frac{2}{3}BE$ abgeschnitten, so ist F der Schwerpunkt des Dreieckes BCD: ferner verbinde man A mit F durch die Gerade AF, und nehme darauf $FG=\frac{1}{4}AF$, wodurch der Schwerpunkt G der Pyramide bestimmt wird: endlich fälle man aus den Punkten E und F die Perpendikel Ee, Ff, welche das Dreieck $Bc'd'$ in den Punkten e', f' treffen.

In dem Trapeze $Cc'd'D$ hat man, wegen $CE=DE$, die Gerade $Ee'=\frac{1}{2}(Cc'+Dd')$: aber $Cc'=c-b$, $Dd'=d-b$, folglich $Ee'=\frac{1}{2}(c+d-2b)$. Ferner ist in dem Dreiecke BEe' wegen $BF=\frac{2}{3}BE$, auch $Ff'=\frac{2}{3}Ee'=\frac{1}{3}(c+d-2b)$; daher

$$Ff=\tfrac{1}{3}(c+d-2b)+b=\tfrac{1}{3}(b+c+d).$$

Die Gerade AF und ihre Projektion af auf die Ebene MN liegen in einer zur Projektionsebene senkrechten Ebene, es muß also der Punkt g, welcher die Projektion des Schwerpunktes vorstellt, auf der Geraden af zu stehen kommen, und jede an die Gerade Aa gezogene Gerade fH muß der Geraden Gg in einem Punkte wie I begegnen. Macht man also $AH=Ff$, und zieht Hf, so ist $fHAF$ ein Parallelogramm, und da $FG=\frac{1}{4}AF$ ist, so wird auch $fI=\frac{1}{4}Hf$, und $Ig=\frac{1}{4}Ha=\frac{1}{4}(Aa-AH)=\frac{1}{4}(a-Ff)$ addirt man hinzu $GI=Ff$, so folgt $Ig+GI$ oder $Gg=Ff+\frac{3}{4}(a-Ff)=\frac{1}{4}(a+3Ff)$, d. i. $Gg=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$.

133. Lehrsatz. Der Schwerpunkt einer parallel abgestutzten Pyramide befindet sich auf einer die Schwerpunkte beider Grundflächen verbindenden Geraden in einem Abstande von ihrer Mitte, welcher dem Produkte aus dem Quadrate ihrer Höhe, in den Unterschied ihrer Grundflächen getheilt durch den zwölffachen Inhalt der abgestutzten Pyramide gleich ist.

Beweis. Sei $BbdD$ (Fig. 18) die parallel abgestutzte Pyramide, G und g die Inhalte ihrer Grundflächen, und h ihr Abstand von einander. Man bezeichne das Verhältniß zweier homologen Seiten wie BC, bc, mit $S:s$, und man stelle sich vor, die gestutzte Pyramide $BbdD$ sei ergänzt, und es sei x der Abstand

Digitized by Google

des Schwerpunktes vom Scheitel, in der Ergänzungspyramide $Abdf$, X dessen Abstand in der ganzen Pyramide, endlich x derselbe Abstand des Schwerpunktes K vom Scheitel A in der abgestutzten Pyramide: heißen nun noch v und V die Kubikinhalte der Ergänzungspyramide und der abgestutzten Pyramide beziehungsweise, also $v+V$, der Inhalt der ganzen Pyramide, so hat man $AH:Ah=HF:hf=BF:bf=S:s$ oder

$Ah:Hh=s:S-s$, und $AH:Hh=S:S-s$, dieß gibt, weil $Hh=h$ ist,

$$Ah=\frac{hs}{S-s},\quad AH=\frac{hS}{S-s},\text{ folglich (131)}$$

$$x=\tfrac{3}{4}.\frac{hs}{S-s},\quad X=\tfrac{3}{4}.\frac{hS}{S-s}.$$

Andererseits ist, weil die Kubikinhalte ähnlicher Körper sich wie die dritten Potenzen homologer Seiten verhalten, $V+v:v=S^3:s^3$, folglich $v:V=s^3:S^3-s^3$, und $V+v:V=S^3:S^3-s^3$: hieraus folgt

$$v=\frac{Vs^3}{S^3-s^3},\quad V+v=\frac{VS^3}{S^3-s^3}.$$

Nun hat man nach (79)

$X(V+v)=xv+xV$, und weil $AK=AG-GK$ oder

$$x=\frac{hS}{S-s}-GK$$

so erhält man nach Substitution der Werthe von X, x, $V+v$, und v, nachdem man beide Theile mit V dividirt hat, die Gleichung

$$\tfrac{3}{4}.\frac{hS}{S-s}.\frac{S^3}{S^3-s^3}=\tfrac{3}{4}.\frac{hs}{S-s}.\frac{s^3}{S^3-s^3}+\frac{hS}{S-s}-GK,\text{ woraus}$$

$$GK=\frac{3hs^4+4hS(S^3-s^3)-3hS^4}{4(S-s)(S^3-s^3)},\text{ d. i.}$$

$$\text{I. } GK=\tfrac{1}{4}h.\frac{S^4-4Ss^3+3s^4}{(S-s)(S^3-s^3)}=\tfrac{1}{4}h.\frac{S^2+2Ss+3s^2}{S^2+Ss+s^2}$$

Da nach (A. 1430) die beiden Grundflächen der abgestutzten Pyramide ähnliche Figuren sind, so folgt $G:g=S^2:s^2$, dieß gibt

$$S^2=\frac{Gs^2}{g},\text{ und }S=\frac{s\sqrt{G}}{\sqrt{g}},\ Ss=\frac{s^2\sqrt{G}}{\sqrt{g}},$$

hiedurch verwandelt sich der letzte Ausdruck in

Digitized by Google

$$GK=\tfrac{1}{4}h.\frac{G+2\sqrt{Gg}+3g}{G+\sqrt{Gg}+g}.$$

Zieht man nun diesen Ausdruck von der Größe $\frac{1}{2}h$ ab, so erhält man zum Abstande x' des Schwerpunktes von der Mitte der Axe

$$x'=\frac{\frac{1}{4}h(G-g)}{G+g+\sqrt{Gg}}=\frac{\frac{1}{12}h^2(G-g)}{\frac{1}{3}h(G+g+\sqrt{Gg})}$$

und nach (A. 1790)

$$\text{II. } x'=\frac{h^2(G-g)}{12V}.$$

134. Folgesatz. Für einen abgestutzten Kreiskegel ergibt sich aus I., indem man $R^2\pi$ statt G, und $r^2\pi$ statt g setzt

$$GK=\tfrac{1}{4}h.\frac{R^2+2Rr+3r^2}{R^2+\sqrt{Rr}+r^2}$$

und eben so groß ist auch der Abstand des Schwerpunktes von der größeren Grundfläche in einem Cykloidalkegel (A. 1434), wenn R, r die Halbmesser des erzeugenden Kreises in beiden Grundflächen vorstellen.

135. Folgesatz 2. Bei einem abgestutzten elliptischen Kegel hat man $G=AB\pi$, $g=ab\pi$, wenn A, B, a, b die Halbaxen der elliptischen Grundflächen bedeuten, da aber diese Ellipsen einander ähnlich sind, mithin $A:B=a:b$ ist, so folgt $B=Ab:a$ hiemit wird

$$GK=\tfrac{1}{4}h.\frac{A^2+2Aa+3a^2}{A^2+Aa+a^2}$$

und eben denselben Werth findet man für den Abstand des Schwerpunktes von der größeren Grundfläche bei einem paraboliſchen Kegel u. s. f.

136. Folgesatz. Setzt man in der Formel II. $G=g$, so verwandelt sich die abgestutzte Pyramide in ein Prisma, und man erhält $x'=0$, mithin liegt der Schwerpunkt eines Prisma und somit auch der eines Cylinders in der Mitte seiner Axe.

137. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines schief abgeschnittenen dreiseitigen Prisma zu bestimmen.

Auflösung. Heißt F der auf die Kanten senkrechte Quer-

Digitized by Google

schnitt des Prisma und a, b, c sind die Längen seiner Kanten, so ist der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche, auf welcher die Kanten senkrecht stehen

$$x=\frac{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}{4(a+b+c)}$$

Beweis. Sei $ABCC'B'A'$ (Fig. 20) das gegebene Prisma, man setze die drei parallelen auf der Grundfläche $A'B'C'=F$ senkrecht stehenden Kanten $AA'=a$, $BB'=b$, $CC'=c$, und lege durch den der Grundfläche nächst liegenden Punkt B eine Ebene BDE mit der Grundfläche parallel, und durch die Diagonale AE und den Punkt B eine zweite Ebene ABE, so zerfällt der Körper in ein Prisma $DBEC'B'A'$ und in zwei Pyramiden, die ihre Spitzen im Punkte B haben, und deren Grundflächen die Dreiecke ADE und DCE sind. Es heiße der Inhalt der ersteren P und P' jener der anderen Pyramide, so ist nach (A. 1707) $P=\frac{1}{3}(a-b)F$, $P'=\frac{1}{3}(c-b)F$, und der Inhalt des ganzen Körpers $V=\frac{1}{3}F(a+b+c)$. Nun ist der Abstand des Schwerpunktes von der Grundfläche im Prisma $DBEC'B'A'=\frac{1}{2}b$, in der Pyramide $BADE$ nach (132) $=\frac{1}{4}(a+3b)$, und in der Pyramide $BACE=\frac{1}{4}(a+2b+c)$.

Setzt man also das Moment des ganzen Körpers gleich der Summe der Momente einzelner Theile, so erhält man den Abstand des Schwerpunktes in jenem mit x bezeichnend

$$x.\tfrac{1}{3}(a+b+c)F=\tfrac{1}{2}b^2F+\tfrac{1}{4}(a+3b).\tfrac{1}{3}(a-b)F$$
$$+\tfrac{1}{4}(a+2b+c).\tfrac{2}{3}(c-b)F$$

hieraus ergibt sich nach Beseitigung des gemeinschaftlichen Faktors F, und gehöriger Reduktion der obige Ausdruck für x.

138. Folgesatz. Ist $b=c$, so wird $x=(a^2+3b^2+2ab):4(a+2b)$: ist aber $a=0$, so erhält man $x=(b^2+c^2+bc):4(b+c)$, ist endlich $a=0$ und $b=c$, so folgt $x=\frac{3}{8}b$.

139. Aufgabe. Ein Ellipsoid mit drei ungleichen Axen wird durch zwei Ebenen, welche mit einer der koordinirten Ebenen parallel laufen, geschnitten, man sucht den Schwerpunkt des zwischen liegenden Stückes.

Auflösung. Wenn die schneidenden Ebenen auf der Axe der z senkrecht stehen, und die Abstände derselben von der Ebene xy beziehungsweise α, β sind, so befindet sich der Schwerpunkt auf

Digitized by Google

der Axe der z in einem Abstande

$$z = {}^3/_4(\alpha+\beta)\frac{2c^2-(\alpha^2+\beta^2)}{3c^2-(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)}.$$

Beweis. Nach (A. 1688) erhält man zum Durchschnitt Z eines Ellipsoids, dessen drei Hauptaxen die Werthe a, b, c haben, mit einer der Ebene xy in einem Abstande z von derselben parallel geführten Ebene, den Ausdruck I. $Z = ab\pi\sqrt{(c^2-z^2)} : c^2$.

Ist nun dz die unendlich kleine Höhe eines auf der Basis Z errichteten Prisma, so ist Zdz sein Inhalt, und $Zzdz$ sein Moment in Beziehung auf die Ebene xy. Hieraus folgt, daß das Integral $\int Zdz$ von $z=\alpha$ bis $z=\beta$ genommen, den Inhalt des Stückes vom Ellipsoide angeben muß, welches durch die schneidenden Ebenen eingeschlossen ist: und eben so drückt das Integral $\int zZdz$ zwischen den genannten Grenzen genommen, die Summe der Momente aller in jenem Stücke des Ellipsoids enthaltenen unendlich dünnen Scheiben. Heißt also z der Abstand seines Schwerpunktes von der Ebene xy, so erhält man sofort

$$\text{II. } z\int Zdz = \int Zzdz.$$

Substituirt man hierin den Werth von Z aus I. und führt die sehr einfache Integration aus, so ergibt sich

$$\int Zdz = \pi ab(c^2z - {}^1/_3z^3) : c^2$$
$$\int Zzdz = \pi ab({}^1/_2c^2z^2 - {}^1/_4z^4) : c^2.$$

Setzt man nun erstlich $z=\alpha$, sodann $z=\beta$, so erhält man zu diesen Grenzintegralen

$$\int Zdz = \pi ab[c^2(\alpha-\beta) - {}^1/_3(\alpha^3-\beta^3)] : c^2$$
$$\int Zzdz = \pi ab[{}^1/_2c^2(\alpha^2-\beta^2) - {}^1/_4(\alpha^4-\beta^4)] : c^2.$$

Durch ihre Division findet man nach II.

$$z = \frac{{}^1/_2c^2(\alpha^2-\beta^2) - {}^1/_4(\alpha^4-\beta^4)}{c^2(\alpha-\beta) - {}^1/_3(\alpha^3-\beta^3)} = \frac{{}^1/_2c^2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) - {}^1/_4(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{c^2(\alpha-\beta) - {}^1/_3(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$$

$$\text{d. i. } z = {}^3/_4(\alpha+\beta)\frac{2c^2-(\alpha^2+\beta^2)}{3c^2-(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)}.$$

140. Folgesatz. Hieraus ergibt sich der Schwerpunkt des in einer Entfernung z von der Ebene xy gestellten elliptischen Abschnittes, wenn man $\beta=c$, $\alpha=z$ setzt

Digitized by Google

$$z=\tfrac{3}{4}(c+z)\frac{c^2-z^2}{2c^2-z(c+z)}.$$

Für ein halbes Ellipsoid ist $z=0$, also $z=\tfrac{3}{4}c.\tfrac{1}{2}=\tfrac{3}{8}c$.

141. Folgesatz 2. Da die für z gefundenen Ausdrücke von den Werthen der beiden Halbaxen unabhängig sind, so folgt, daß wenn man über dem Durchmesser $2c$ ein Rotationsellipsoid oder auch eine Kugel beschreibt, der Schwerpunkt eines von einer Ebene begrenzten Kugelabschnittes mit dem Schwerpunkte des durch dieselbe Ebene gebildeten elliptoidischen Abschnittes zusammenfällt. Demnach ist für ein halbes Rotationsellipsoid sowohl als auch für eine Halbkugel, wo $c=r$ ist, $z=\tfrac{3}{8}c$.

142. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines ausgehöhlten halben Ellipsoids zu bestimmen.

Auflösung. Seien A, B, C und a, b, c die Halbaxen des äußeren und inneren Ellipsoids, welche ein holes Ellipsoid begrenzen, so findet man den gesuchten Abstand z seines Schwerpunktes

$$z=\tfrac{3}{8}.\frac{ABC^2-abc^2}{ABC-abc}.$$

Beweis. Bezeichnet V, v die Kubikinhalte, und $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{z}'$ die Abstände der Schwerpunkte des äußeren und inneren Ellipsoides, welche durch die Ebene xy begrenzt angenommen werden, von dieser Ebene; so hat man nach (A. 1688) $V=\tfrac{2}{3}ABC\pi$, $v=\tfrac{2}{3}abc\pi$, und nach (140) $\mathfrak{Z}=\tfrac{3}{8}C$, $\mathfrak{z}'=\tfrac{3}{8}c$, demnach wegen $V\mathfrak{Z}=v\mathfrak{z}'+z(V-v)$

$$z=\frac{V\mathfrak{Z}-v\mathfrak{z}'}{V-v}=\tfrac{3}{8}.\frac{ABC^2-abc^2}{ABC-abc}.$$

143. Folgesatz. Für eine ausgehöhlte Halbkugel folgt hieraus $A=B=C=R$ und $a=b=c=r$ setzend

$$z=\tfrac{3}{8}.\frac{R^4-r^4}{R^3-r^3}=\frac{(R^2+r^2)(R+r)}{R^2+Rr+r^2}$$

5. Schwerpunkt der von Rotationsflächen eingeschlossenen Körper.

144. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines durch die Umdrehung einer, zwischen zwei gegebenen Kurven enthaltenen, Fläche um irgend eine Axe erzeugten Körpers zu finden.

Digitized by Google

Auflösung. Der gesuchte Schwerpunkt befindet sich auf der Umdrehungsaxe im Abstande

$$44)\quad x=\frac{\int x(y^2-y_1^2)dx}{\int(y^2-y_1^2)dx}$$

vom Anfangspunkte.

Beweis. Seien $y=fx$, $y_1=Fx$ die Gleichungen der Kurven AB, $A'B'$ (Fig. 11) zwischen welchen, und den Ordinaten CA, DB ihrer Endpunkte die Fläche $AA'B'B$ enthalten ist, durch Umdrehung dieser Fläche um die Axe OX entsteht ein ringförmiger Körper, dessen Inhalt nach (A. 1684) I. $V=\pi\int(y^2-y_1^2)dx$ gefunden wird. Ein jedes Element dieses Körpers hat die Form einer Scheibe, deren Inhalt $\pi(y^2-y_1^2)dx$ den Abstand x von der Axe der y besitzt, es ist daher $\pi x(y^2-y_1^2)dx$ das Moment dieser Scheibe in Bezug auf die Axe OY und II. $\pi\int x(y^2-y_1^2)dx$ ist die Summe dieser Momente. Bezeichnet nun x den Abstand des Schwerpunktes im so erzeugten Körper von der Axe OY, so folgt

$$x\pi\int(y^2-y_1^2)dx=\pi\int x(y^2-y_1^2)dx$$

woraus der obige Ausdruck sich unmittelbar ergibt, beide Integrale sind von $x=OC$ bis $x=OD$ zu nehmen.

145. Folgesatz. Fällt die zweite der beiden Kurven mit der Abszissenaxe zusammen, dann hat man $y_1=0$ und hiernach einfacher 45) $x=\int xy^2dx:\int y^2dx$.

146. Aufgabe. Den Schwerpunkt des durch die Rotation eines Kegelschnittes entstehenden Körpers zu bestimmen.

Auflösung. Ist $y^2=mx+nx^2$ die Gleichung der erzeugenden Kurve, so hat man $x=\frac{1}{2}x.\frac{4m+3nx}{3m+2nx}$.

Beweis. Wird $y^2=mx+nx^2$ in die Formel (145) gesetzt, so erhält man

$$\int xy^2dx=\int x(mx+nx^2)dx=\tfrac{1}{3}mx^3+\tfrac{1}{4}nx^4=\tfrac{1}{12}x^3(4m+3nx)$$
$$\int y^2dx=\int(mx+nx^2)dx=\tfrac{1}{2}mx^2+\tfrac{1}{3}nx^3=\tfrac{1}{6}x^2(3m+2nx)$$

hiemit ergibt sich sogleich x wie oben.

147. Folgesatz. Hieraus erhält man den Abstand des Schwerpunktes in einem Kugelabschnitte vom Scheitel desselben, wenn man $m=2r$, $n=-1$ setzt

Digitized by Google

$$x=\tfrac{1}{2}x.\frac{8r-3x}{6r-2x}$$

woraus zu ersehen ist, daß je kleiner x gegen r ist, desto mehr sich der Werth von x der Grenze $\frac{3}{8}x$ nähert, für $x=r$ ergibt sich aber $x=\frac{5}{8}x$ übereinstimmend mit (141). Es ist also der Abstand des Schwerpunktes vom Scheitel eines Kugelabschnittes nie größer, als $\frac{2}{3}=\frac{16}{24}$ und nie kleiner als $\frac{5}{8}=\frac{15}{24}$ der Höhe desselben.

148. Folgesatz. 2. Für ein paraboliſches Konoid hat man $m=p$, $n=0$ zu setzen: hiedurch wird $x=\frac{2}{3}x$, d. i. der Schwerpunkt eines paraboliſchen Konoids liegt um zwei Drittheile der Höhe vom Scheitel entfernt.

149. Folgesatz 3. Für ein Sphäroid ist $m=2b^2:a$, $n=-b^2:a^2$ sonach $x=\frac{8a-3x}{12a-4x}.x$, ein Ausdruck der sich bei abnehmenden Werthen von x der Grenze $\frac{2}{3}a$ ohne Ende nähert, wie beim Kugelabschnitte (147).

150. Folgesatz. 4. Bei einem hyperboliſchen Konoid ist $m=2b^2:a$ $n=b^2:a^2$, somit $x=\frac{8a+3x}{12a+4x}.x$.

Bei ohne Ende abnehmenden Abszissen wird $x=\frac{2}{3}x$, und bei zunehmenden Werthen von x nähert sich x ohne Ende seiner Grenze $\frac{3}{4}x$, es kann also der Schwerpunkt dieses Körpers nur zwischen $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ seiner Höhe enthalten sein.

151. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines durch die Umdrehung der Cykloidalfläche erzeugten Körpers zu finden.

Auflösung. Dreht sich die Cykloidalfläche DPM (Fig 15) um die Tangente DT ihres Scheitels als Axe, so ergibt sich der Abstand x des so erzeugten Konoids vom Scheitel nach den Gleichungen

$$V=\tfrac{1}{6}\pi r(2q^2-qr-3r^2)\sqrt{Q}+\tfrac{1}{8}\pi r^3 \operatorname{arcsinv}(q:r)$$

$$xV=\pi[\tfrac{1}{5}rq^3-\tfrac{1}{14}q^4+\tfrac{1}{6}rz(2q^2-qr-3r^2)\sqrt{Q}$$
$$+\tfrac{1}{6}r^2q(\tfrac{1}{2}q+3r)+\tfrac{1}{16}r^4z^2]$$

wo Kürze halber $Q=2qr-q^2$, $z=\operatorname{arcsinv}(q:r)$ bedeutet.

Beweis. Für die Abszisse $DP=p$, und Ordinate $PM=q$,

ist nach (A. 1730) der Inhalt des Cykloidalkonoids V wie oben. Nun ist nach (114) $p=\sqrt{Q+rz}$, wo z den eben angegebenen Werth hat: multiplizirt man diesen Ausdruck mit $q^2dp=qdu\sqrt{Q}$ so folgt $pq^2dp=qdq\sqrt{Q+qrzdq}\sqrt{Q}$, also

II $\int pq^2dp=\int qdq\sqrt{Q+r\int qzdq}\sqrt{Q}$: allein nach Int. 151) ist

III $\int qdq\sqrt{Q}=(\frac{1}{5}q^2-\frac{1}{6}qr-\frac{1}{2}r^2)\sqrt{Q+\frac{1}{12}r^3z}$

und durch theilweises Integriren ergibt sich

$$\int qzdq\sqrt{Q}=z\int qdq\sqrt{Q}-\int dz\int qdq\sqrt{Q}$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung I.

IV. $\int qzdq\sqrt{Q}=\frac{1}{60}z(2q^2-qr-3r^2)\sqrt{Q}-\frac{1}{6}(\frac{2}{5}q^2-\frac{1}{5}q^2r-3qr^2)+\frac{1}{12}r^3z^2$

Substituirt man die Werthe aus III. und IV. in die Gleichung II.; so erhält man nach einer leichten Reduktion für $\int pqdq\sqrt{Q}=xV$ den oben angesetzten Werth.

152. Folgesatz. Entsteht das Konoid durch die Umdrehung der halben Cykloide ADT, so setze man $q=2r$, $Q=0$, $z=\pi$, und man erhält $V=\frac{1}{2}r^3\pi^2$, $x=r\,(\frac{32}{9}+\frac{1}{2}\pi^2):\pi$

153. Folgesatz. 2 Dreht sich hingegen die Fläche DMQ um die Axe DC, so ist in (145) $x=q$, $y=p$ zu setzen, dadurch wird $x=\int p^2qdq:\int p^2dq$. Führt man die, jener in (151) ähnliche, Rechnung aus, so ergibt sich für die Rotation der halben Cykloide, der Inhalt $V=\frac{4}{16}\pi r^3(9\pi^2-16)$ und $x=\frac{1}{16}r.\frac{63\pi^2-64}{9\pi^2-16}$.

154. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kugelsektors zu finden.

Auflösung. Heißt r der Kugelhalbmesser und $MK=h$ (Fig. 14) die Höhe des dem Sektor zugehörigen Kugelsegmentes; so ist der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte, oder

$$x=\frac{3}{4}(r-\frac{1}{2}h).$$

Beweis. Man kann den Kugelsektor ACB in unzählige Pyramiden zerfällen, deren Spitzen im Mittelpunkte C der Kugel sich befinden, und deren Grundflächen zusammen, die Kugelfläche AMB ausmachen. Die Schwerpunkte dieser Pyramiden befinden sich sämmtlich in dem Abstande $CA'=\frac{3}{4}.AC=\frac{3}{4}r$ (130) vom Mittelpunkte C, mithin liegen sie an der Oberfläche einer Kugel, die vom Mittelpunkte C aus mit dem Halbmesser CA' innerhalb des

Digitized by Google

Kugelsektors beschrieben wird. Heißt nun die Höhe des Kugelabschnittes AMB, oder $MK=h$, so ist die Höhe des konzentrischen Kugelabschnittes $A'gB'$, nämlich $gL=h'=\frac{3}{4}h$, und es liegt nach (147) der Schwerpunkt desselben auf dem Halbmesser Cg in der Entfernung $gn=\frac{1}{2}h'$; daher wird die Entfernung $Cn=x$ des Schwerpunktes n im Kugelsector vom Mittelpunkte

$$x=\tfrac{3}{4}r-\tfrac{1}{2}h'=\tfrac{3}{4}(r-\tfrac{1}{2}h)$$

155. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines durch die Umdrehung einer gegebenen Kurve um ihre Axe erzeugten körperlichen Ausschnittes zu bestimmen.

Auflösung. Sei AB (Fig. 21) die gegebene Kurve, deren Gleichung in Beziehung auf die sich im Punkte A senkrecht schneidenden Axen AX, AY, $y=fx$ wäre, und es drehe sich die Fläche ABE, um die Axe AX um den Winkel $BED=\omega$, wodurch dann die Kurve AB in die Lage AD kommt, so liegt der Schwerpunkt des so erzeugten körperlichen Ausschnittes innerhalb desselben in einer Ebene AFE, welche den Abschnitt halbirt, in einem Punkte, dessen Koordinaten

$$46)\quad x=\frac{\int y^2x\,dx}{\int y^2dx},\quad y=\frac{4\sin^1/_2\omega\int y^3dx}{3\omega\int y^2dx}\quad \text{sind.}$$

Beweis. Da die Schnitte BDE, bde senkrecht auf der Axe AX Kreisausschnitte sind, deren Inhalt $\frac{1}{2}\omega y^2$ ist; so folgt der Inhalt eines Prisma von der Grundfläche $\frac{1}{2}\omega y^2$ und Höhe dx gleich $\frac{1}{2}\omega y^2dx$, und dessen Moment hinsichtlich der Axe AY gleich $\frac{1}{2}\omega xy^2dx$; heißt also die Abszisse des Schwerpunktes $Ae=x$, so hat man

$$x.\tfrac{1}{2}\omega\int y^2dx=\tfrac{1}{2}\omega\int xy^2dx,\quad \text{oder I;}\quad x=\int\frac{y^2xdx}{\int y^2dx}.$$

Hiedurch ist aber bloß die Ebene bde gefunden, welche durch den Schwerpunkt des Körpers geht. Der Schnitt in dem Abstande x ist offenbar ein Kreissektor, und es liegt sein Schwerpunkt g in demselben Punkte, in welchem der Schwerpunkt des ganzen Körpers vorhanden ist; denn so klein auch ω angenommen wird, stets wird der Schwerpunkt des körperlichen Ausschnittes in die durch die Gleichung I. bestimmte Ebene fallen. Nun befindet sich

Digitized by Google

der Schwerpunkt des Kreisſektors auf dem mittleren Halbmeſſer ef, in welchem die durch ihn geführte Ebene AFE den ganzen Körper in zwei gleiche und kongruente Hälften theilet, daher iſt der Schwerpunkt deſſelben nach (106) in dem Abſtande $y'=eg=2cr:3s$, wenn c die Chorde des Bogens $bd=2r\sin{}^1/_2\omega$, $r=y$ und die Länge des Bogens $bd=s$ geſetzt wird, man hat alſo wegen $s=r\omega=y\omega$, $y'=y\sin{}^1/_2\omega:3\omega$ und der Inhalt eines Prisma von der Höhe dx, welches den Kreisſektor zur Baſis hätte, iſt $^1/_2\omega y^2dx$, und daher das Moment deſſelben in Bezug auf die Axe AX gleich $\frac{4y\sin{}^1/_2\omega}{3\omega}.{}^1/_2\omega y^2dx={}^2/_3y^3\sin{}^1/_2\omega dx$. Die Summe aller Momente der Prismen, aus welchen der körperliche Ausſchnitt beſteht, iſt alſo $={}^2/_3\sin{}^1/_2\omega\int y^3dx$, während das Moment des ganzen Abſchnittes $y.{}^1/_2\omega\int y^2dx$ beträgt: hieraus ergibt ſich

$$y=\frac{4\sin{}^1/_2\omega\int y^3dx}{3\omega\int y^2dx}\text{ wie oben.}$$

156. Folgeſatz. Für einen Kegelausſchnitt, wenn die Höhe des Kegels h und der Halbmeſſer der kreisförmigen Grundfläche R heißt, ergibt ſich wegen $h:R=x:y$, $y=Rx:h$, daher $\int=\frac{3}{4}x$ und

$$y=\frac{4\sin{}^1/_2\omega h\int x^3dx}{3\omega R\int x^2dx}=\frac{\sin{}^1/_2\omega Rx}{\omega R}=\frac{\sin{}^1/_2\omega}{\omega}y.$$

Iſt hier $\omega=\pi$, ſo wird $\sin{}^1/_2\omega=1$ und $y=y:\pi$.

157. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kugelausſchnittes, welcher durch eine theilweiſe Umdrehung eines Kreisbogens zum Vorſchein kommt, zu beſtimmen.

Auflöſung. Man hat

$$x=\frac{8rx-3x^2}{12r-4x},\quad y=\frac{\sin{}^1/_2\omega}{2\omega}.\frac{(x-r)y(3r^2+2y^2)+3r^4z}{8(rx^2-{}^1/_4x^3)}$$

wo $z=\arcsin v(x:r)$ bedeutet.

Beweis. Die Gleichung für den Kreis $y^2=2rx-x^2$ gibt $\int=(8rx-3x^2):(12r-4x)$ wie beim Kugelabſchnitte (147) ferner findet man

$$y=\frac{4\sin{}^1/_2\omega}{3\omega}\int\frac{\sqrt{(2rx-x^2)^3}dx}{rx^2-{}^1/_4x^3}$$

Digitized by Google

Nun ist $\int \vee (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = 2r \int x \vee Q dx - \int x^2 \vee Q dx$, für $Q = 2rx - x^2$ und nach Int. 151) hat man

$$\int x \vee Q dx = (\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{6}rx - \tfrac{1}{8}r^2) \vee Q - \tfrac{1}{8}r^3 \arccos\mathrm{inv}(x:r)$$
$$= \tfrac{1}{6}(2x^2 - rx - 3r^2) \vee Q - \tfrac{1}{8}r^3 z$$

und nach Int. 152) findet man

$$\int x^2 \vee Q dx = (\tfrac{1}{4}x^3 - \tfrac{1}{12}rx^2 - \tfrac{5}{24}r^2x - \tfrac{5}{16}r^3) \vee Q + \tfrac{5}{16}r^4 z,$$

hiedurch ergibt sich, indem man y statt $\vee Q$ setzt

$$y = \frac{4\sin^3\frac{1}{2}\omega}{3\omega} \cdot \frac{[-(3r^3 + 2y^2)(r - x)y + 3r^4 z}{8(rx^2 - \frac{1}{3}x^3)}$$

woraus obige Formel sich sogleich ergibt.

158. Folgesatz. Für $x = r$ erhält man hieraus die Lage des Schwerpunktes vom Abschnitte einer Halbkugel

$$x = \tfrac{5}{16}r, \quad y = 3\sin^3\tfrac{1}{2}\omega . r\pi : 8\omega.$$

159. Aufgabe. In einem paraboloischen Konoid werden durch die Umdrehungsaxe zwei schneidende Ebenen unter einem gegebenen Winkel geführt, man frägt nach der Lage des Schwerpunktes in dem zwischen enthaltenen Ausschnitte.

Auflösung. Es ist $x = \frac{2}{3}x$, $y = 16y\sin^3\frac{1}{2}\omega : 15\omega$.

Beweis. Die Gleichung der Parabel $y^2 = px$ in die Formel I. (155) gesetzt, liefert sogleich $x = \frac{2}{3}x$, und

$$y = \frac{4\sin^3\frac{1}{2}\omega}{3\omega} \cdot \frac{\int y^3 dx}{\int y^2 dx} = \frac{4\sin^3\frac{1}{2}\omega}{3\omega} \cdot {}^4/_5 \vee px = {}^{16}/_{15}\sin^3\tfrac{1}{2}\omega . y.$$

§6. Statische Komplanation und Kubirung der Rotationsflächen.

160. Lehrsatz. Die Oberfläche eines durch Umdrehung einer ebenen Kurve erzeugten Körpers ist gleich der Länge der beschreibenden Kurve, multiplizirt in den von ihrem Schwerpunkte durchlaufenen Kreisbogen.

Beweis. Wir haben nach Formel 37) $ly = \int y ds$, wo l die Länge irgend einer krummen Linie bedeutet, deren Schwerpunkt von der Axe der x um die Größe y absteht. Dreht sich nun diese Kurve um die Axe der x, und es heißt O die bei der vollen Umdrehung erzeugte Oberfläche, O' hingegen der Theil derselben, welcher bei der theilweisen Drehung um den Winkel ω zum Vorschein kommt; so ist offenbar O' derjenige Theil der Oberfläche

Digitized by Google

O als der Drehungswinkel ω von 2π ist, oder $O' : O = \omega : 2\pi$. Dieß gibt $O' = O\omega : 2\pi$, es ist aber nach (118) $O = 2\pi \int y ds$, mithin $O' = \omega \int y ds = \omega l y$, wo ωy die Länge des Kreisbogens bedeutet, welcher vom Schwerpunkte der Kurve während ihrer Drehung beschrieben wird.

161. Folgesatz. Für die Oberfläche eines paraboloischen Konoids hat man aus (90)

$$y l = \frac{\sqrt{(p^2+4y^2)^3} - p^3}{12p}, \text{ also } O = 2\pi y l = \tfrac{4}{3}\pi \sqrt{p(\tfrac{1}{4}\pi + x)^3} - \tfrac{1}{6}\pi p^2$$

übereinstimmend mit (A. 1664).

162. Lehrsatz. Der Inhalt des durch die Umdrehung einer ebenen begrenzten Figur erzeugten Körpers ist gleich dem Produkte aus dem Inhalte der beschreibenden Fläche in den von ihrem Schwerpunkte während der Umdrehung zurückgelegten Kreisbogen.

Beweis. Aus Formel 39) $ly = \tfrac{1}{2}\int (y^2 - y_1^2) dx$, wo l den Flächeninhalt der beschreibenden Fläche vorstellt, welche durch zwei gegebene Kurven und die Ordinaten ihrer Endpunkte eingeschlossen wird, folgt $\int (y^2 - y_1^2) dx = 2ly$. Substituirt man diesen Werth in Formel 44) $V = \pi \int (y^2 - y_1^2) dx$, so erhält man sogleich $V = 2\pi l y$. Findet nun eine bloß theilweise Umdrehung der beschreibenden Fläche um den Winkel ω Statt, so ist offenbar der Inhalt V' des so entstehenden Körpers derjenige aliquote Theil vom Inhalte V wie der Drehungswinkel ω von 2π, dieß gibt $V' = V\omega : 2\pi$, daher erhält man mit Rücksicht auf den so eben gefundenen Werth von V, $V' = \omega l y$.

163. Folgesatz. Für eine Parabel ist nach (113) $y = \tfrac{2}{3}y$, $l = \tfrac{2}{3}xy$, also $ly = \tfrac{1}{4}xy^2$, und $V = \tfrac{1}{2}\pi xy^2 = \tfrac{1}{2}\pi px^2$ der Inhalt eines paraboloischen Konoids übereinstimmend mit (A. 1695).

164. Anmerkung. Vorstehende zwei vom Jesuiten *P. Guldin* aufgestellten Sätze sind unter dem Namen der Guldin'schen Regel bekannt. Man kann sie aber durch nachstehende Betrachtung noch allgemeiner machen, indem man sie auf Nichtrotationsflächen anwendet: Man nehme nämlich an, daß eine ebene Kurve sich bewege, ohne zu gleiten oder sich in ihrer Ebene zu drehen, und zwar so, daß diese Ebene beständig auf einer gegebenen Linie, welche

Digitized by Google

die Richtungslinie heißen soll, senkrecht stehe, die übrigens eine Linie mit einfacher oder doppelter Krümmung sein kann. Bei dieser Bewegung bleibt ein und derselbe Punkt dieser Ebene immer auf der Richtungslinie, und alle anderen Punkte beschreiben krumme Linien, die der Richtungslinie ähnlich sind. Seien l, V, l die Fläche der beschreibenden Kurve, der körperliche Inhalt, der durch diese Oberfläche erzeugt wird, und die Länge der krummen Linie, welche von ihrem Schwerpunkt durchlaufen wird. Wäre l ein Kreisbogen, so würde V ein Stück eines Rotationskörpers sein (162); in jedem Falle aber kann man l in unendlich kleine Theile theilen, von welchen jeder mit dem ihm entsprechenden Krümmungskreis zusammenfällt. Man bezeichne mit ds einen dieser Theile, und durch v den Inhalt des zugehörigen Stückes von V und nehme an, daß die Ebenen, die auf dessen Richtung senkrecht stehen, und durch welche V begrenzt wird, sich nach einer geraden Linie schneiden, die nicht innerhalb der Fläche der erzeugenden krummen Linie liegt; so ist dieses Element v von V ein Stück eines Rotationskörpers, und nach der vorhergehenden Gleichung hat man $v=lds$. Nimmt man daher die Summe aller Werthe von v und bemerkt, daß der Faktor l konstant ist, so folgt daraus, daß der Inhalt V dem Produkte aus l und l gleich ist, wie in dem Falle eines Rotationskörpers.

V. Von der Reibung und Steifigkeit der Seile.

1. Die Reibung.

165. Anmerkung. Da es keine vollkommen glatte und harte Körper gibt, sondern an ihren Oberflächen stets Unebenheiten erscheinen, welche schon dem unbewaffneten Auge als eben so viele Erhöhungen und Vertiefungen sichtbar sind, die bei zwei über einander liegenden Körpern durch das Gewicht des obern wechselseitig in einander gepreßt werden, indem die Erhöhungen des einen mehr oder weniger in die Vertiefungen des andern eingreifen; so folgt daß der eine Körper an den andern nicht anders sich fortschieben läßt, als wenn diese Erhabenheiten weggerissen, verschoben, abgebrochen und die Oberflächen hiedurch abgeglättet werden, oder

Digitized by Google

wenn der fortzuschiebende Körper darüber gehoben und hinweg bewegt wird. Hiedurch entsteht ein Widerstand, zu dessen Ueberwältigung eine gewisse Kraft erforderlich ist, die in manchen Fällen sehr bedeutend werden kann.

166. Erklärung. Unter Reibung versteht man jenes Hinderniß der Bewegung, welches immer Statt hat, so oft zwei feste Körper mit ihren Flächen einander berühren. Man unterscheidet zwischen der gleitenden, wälzenden und drehenden Reibung. Die erstere findet Statt, wenn ein Körper auf einem andern, wie z. B. eine Schleife auf der Erde fortgleitet; die andere hingegen, wenn ein Körper auf einem anderen ruhenden gewälzt wird, die letztere, wenn eine feste Axe in einem holen Cylinder, oder aber, wenn dieser auf einer Axe, wie bei den Rädern eines Wagens, sich dreht.

167. Folgesatz. Im ersten Falle müssen die in einander greifenden Unebenheiten der sich berührenden Flächen abgerissen oder abgeglättet werden, oder der Körper geht über dieselben wie über eben so viele schiefe Ebenen hinweg: natürlich gehört hiezu eine größere Kraft, welche diesen Reibungswiderstand gewältiget, als wenn der obere Körper über die untere Fläche gewälzt wird, wo die in einander greifenden Unebenheiten gleichsam aus einander gehoben werden; woraus sich denn leicht der geringere Grad der wälzenden Reibung vor der gleitenden erklären läßt. Bei der Bewegung der Zapfen in Lagern und überhaupt bei der drehenden Bewegung, wird die Kraft bei der Ueberwindung der Reibung noch durch den Hebelsarm der Speichen eines Rades oder Welle unterstützt, auch ruht nicht der ganze bewegte Körper auf dem andern, sondern es drehen sich bloß seine beiden Ende in den Lagern, wodurch die Anzahl der Berührungspunkte somit der Widerstand merklich geringer wird, wie bei der wälzenden Reibung.

168. Lehrsatz. Die Reibung ruhender Körper ist größer als die der bewegten, und ist hauptsächlich dem Gewichte derselben proportional.

Beweis. Denn bei schnell bewegten Körpern werden zwar in derselben Zeit mehrere Unebenheiten ihrer Oberflächen mit einander

in Berührung kommen, als bei langsam bewegten und ruhenden Körpern: dagegen aber bei ersteren, wegen der Schnelligkeit der Bewegung, viele Unebenheiten übersprungen werden, und überhaupt wegen der kürzeren Zeit der Berührung diese Unebenheiten nicht so in einander dringen können, als bei einer langsamen Bewegung und Ruhe. Daß aber die Größe der Reibung dem Gewichte proportional sei, erhellet so: wäre der oberhalb gelegene Körper ohne alles Gewicht, so würde er auf den Unebenheiten des anderen aufliegen und die geringste Kraft wäre vermögend, ihn zu bewegen. Nur das Gewicht eines Körpers ist die Ursache, daß die Erhöhungen seiner Oberfläche mehr oder weniger in die Vertiefungen des andern Körpers eindringen und überhaupt desto tiefer eingreifen, je größer der Druck oder das Gewicht des oben aufliegenden Körpers ist. Dieser Druck vertheilt sich gleichförmig auf die Berührungsflächen beider Körper. Enthält also die Fläche eines Körpers m Flächeneinheiten, und eine andere Fläche desselben Körpers nur n solcher Einheiten, so wird der Druck auf einzelne Flächeneinheiten und folglich auch die Reibung derselben in beiden Fällen in dem Verhältnisse von $m:n$ stehen, und demnach ungeändert bleiben, man mag den Körper mit seiner größeren oder kleineren Fläche der Reibung unterwerfen. Der Reibungswiderstand wächst also bei gleicher Beschaffenheit der Oberfläche mit dem Gewichte des aufliegenden Körpers.

169. Folgesatz. Heißt Q das Gewicht des Körpers und P die erforderliche Kraft, um den auf einer Ebene gestellten Körper in Bewegung zu setzen; so hat man $P=\mu Q$, wo μ eine bei Körpern derselben Gattung konstante Größe bedeutet, und der Reibungskoeffizient genannt wird.

170. Lehrsatz. Die Reibung zweier gleichartigen Körper ist größer als wenn der eine derselben mit einem ihm ungleichartigen in Berührung tritt.

Beweis. Die Anziehungskraft der Materie, welche bei großen Massen auch noch in großen Entfernungen derselben merklich ist, mit diesen Entfernungen aber im verkehrten quadratischen Verhältnisse derselben abnimmt, und unter den Namen der Gravitation

Digitized by Google

überhaupt bekannt ist, und bei den Erdkörpern mit Schwere bezeichnet wird, äußert sich bei kleinen Massen, wenn diese mit einander in Berührung treten, als Adhäsion, und wächst rasch mit abnehmenden Entfernungen beider Flächen. Diese Anziehung ist nun unter denselben Umständen bei gleichartigen Körpern größer als bei ungleichartigen, sonach muß auch der als Reibung bezeichnete Widerstand zwischen den Oberflächen von Körpern derselben Art größer werden, als zwischen denen verschiedener Art, welches auch die Erfahrung bestätiget.

171. Aufgabe. Den Reibungskoeffizienten durch Versuche zu bestimmen.

Auflösung. Erste Methode. Man stelle den zu untersuchenden Körper auf einen horizontalen Tisch, befestige an jenem in der horizontalen Richtung durch den Schwerpunkt des Körpers eine Schnur, und am Rande des Tisches eine Rolle so, daß die Schnur, welche über diese läuft, eine horizontale Lage erhält, am andern freien Ende der Schnur hänge man eine Schale zur Aufnahme der Gewichte auf; bringt man nun in die Schale Gewichte unter, indem man stets kleinere Gewichte auflegt, und ihre Summe durch ein größeres ersetzt, so wird eine gewisse Last im Stande sein, den Körper auf der horizontalen Ebene fortzuziehen, d. i. den Reibungswiderstand dieses Körpers zu überwinden. Heißt nun Q das bekannte Gewicht des Körpers, und P die Summe der Einsatzgewichte nebst dem Gewichte der Rolle, so ist der Quotient $Q:P=\mu$ der gesuchte Reibungskoeffizient.

Zweite Methode. Man wählt zwei ebene, an einem Rande mit einem Scharniere und gegenüber mit einem messingenen, in Grade abgetheilten Bogen, versehene Bretter, deren einem man, wenn das andere horizontal gestellt wird, eine beliebige Neigung gegen einander mittelst einer, am Gradbogen angebrachten Stellschraube ertheilen kann. Wird nun auf dem geneigten Brette der zu untersuchende Körper aufgestellt, und die Ebene immer mehr und mehr geneigt, so kommt man zu einer solchen Lage der schiefen Ebene, wo das Bestreben der Last, hinabzugleiten, der Reibung des Körpers gleich kommen muß. Sei dann α der Neigungs-

Digitized by Google

winkel *CAB* (Fig. 22) beider Bretter, das Gewicht *Q* des aufgelegten Körpers werde durch die durch seinen Schwerpunkt *G* vertikal gezogene Geraden *GH* vorgestellt, welche durch die Verzeichnung des Rechteckes *GIHK* in die Seitenkräfte *GI* und *GK* zerfällt, deren erstere das Bestreben äußert, den Körper längst der schiefen Ebene *AC* zu bewegen, die letztere aber auch einen Druck auf dieselbe erzeugt, welcher dem Reibungswiderstände proportional ist. Man hat aber $GI = P = GH \sin GHI = Q \sin\alpha$, und $GK = Q\cos\alpha$; hieraus folgt $Q\sin\alpha = \mu Q\cos\alpha$, oder $\mathrm{tg}\alpha = \mu$, d. i. der Reibungswiderstand ist dem Gewichte des Körpers multiplizirt in den Sinus des Neigungswinkels der Ebene, und der Reibungskoeffizient dessen Tangente gleich.

172. Anmerkung. Die umständlichsten Versuche über die Reibung wurden von *Morin* angestellt, in der Schrift: Nouvelles experiences sur le frottement faites à Metz en 1831 — 1833 par *Arthur Morin*. Paris 1833 — 1835. 3 Quarthefte, bekannt gemacht, aus welchen wir Folgendes entlehnen:

1. Die Reibung vergrößert sich mit der Rauhigkeit der sich reibenden Flächen, wird daher durch passende Schmiermittel vermindert, als Oehl oder Talg bei Metallen, Seife bei Holz u. s. f.

2. Die Reibung ist unter übrigens gleichen Umständen dem Drucke proportional, und bei ungleichartigen Metallen geringer als bei gleichartigen.

3. Bei gleichem Drucke ist unter übrigens gleichen Umständen die Größe der Reibung unabhängig von der Größe der sich reibenden Flächen.

4. Die Reibung der Ruhe ist größer als die Reibung der Bewegung, und die gleitende größer als die wälzende.

5. Die verschiedene Geschwindigkeit der Körper bei der Reibung hat keinen Einfluß auf die Größe derselben.

173. Anmerkung 2. Folgende zwei Tafeln liefern die Werthe des Reibungskoeffizienten der gleitenden und drehenden Reibung trockener Substanzen und bei eingelegten Schmiermitteln:

Digitized by Google

I. Tafel. Gleitende Reibung

für trockene Substanzen bei Schmiermitteln

Reibende Körper	bei Ruhe	Bewegung	Reibende Körper bei eingelegten Talg	bei Ruhe	Bewegung
Eichen auf Eichen	3/7	1/9	Eichen auf Eichen	2/5	1/17
Kiefern auf Kiefern	7/12	1/6	Kupfer auf Eisen	1/10	1/11
Ulmen auf Ulmen	6/13	1/10	Eisen auf Eisen	—	1/10
Eichen auf Kiefern	2/3	3/19	Eisen auf Eichen	—	1/35
Eisen auf Eisen	2/7	2/7	Kupfer auf Eichen	—	1/41
Kupfer auf Eisen	3/17	1/6			
Eisen auf Eichen	1/5	1/6			
Kupfer auf Eichen	2/11	1/12			
Messing auf Eisen	4/23	—			

II. Tafel. Wälzende Reibung

für trockene Substanzen mit Talg geschmierter Körper

Kupfer auf Eisen	2/11	2/13	Steineiche a. Guajak	1/16	1/26
Eisen auf Guajak	1/15	1/20	Steineiche a. Ulme	—	1/33
			Kupfer a. Eisen	1/11	2/23
			Eisen a. Guajak	1/20	1/21
			Buchsbaum a. Guajak	—	1/23
			Buchsbaum a. Ulme	—	1/29

Beispiel. Wie groß ist die gleitende Reibung eines 6 Centner schweren kiefernen Balkens der auf eichenen Dielen aufliegt?

Für Ruhe ist $\mu = 2/3$, für Bewegung aber $\mu = 3/19$ mithin im ersten Falle 200, im zweiten Falle 94 Pfunde.

174. Aufgabe. Ein Balken vom gegebenen Gewichte und Länge stützt sich gegen eine vertikale Mauer einerseits und gegen einen horizontalen Fußboden anderseits, wie klein darf der Neigungswinkel sein, damit die Reibung den Balken gerade noch vor dem Herabgleiten bewahre.

Auflösung. Sei l die Länge AB (Fig. 23) des Balkens, P sein Gewicht in dessen Schwerpunkte G vereiniget, BC sei die vertikale Mauer, AC der horizontale Boden, μ und μ' die bezüglichen Reibungskoeffizienten, und $BAC = \alpha$ der gesuchte Neigungswinkel, so ist $\operatorname{tg}\alpha = (1 - \mu\mu') : 2\mu$.

Beweis. Da der Balken auf der horizontalen Ebene nur aufliegt, so kann er nicht im Gleichgewichte bleiben, wenn er nicht senkrecht gegen dieselbe gedrückt wird, sei X die Kraft, mit welcher der Punkt A, Y die Kraft, mit welcher der Punkt B auf die beziehlichen Ebenen gedrückt wird, so findet im Punkte A eine Reibung μX, im Punkte B eine Reibung $\mu' Y$ Statt. Glitte nun der Balken wirklich herab, so würde sich A von C entfernen, dagegen B dem Punkte C nähern, also wirkt die Reibung in entgegengesetzter Richtung, nämlich im Punkte A von A nach C, und im Punkte B von C gegen B hin. Es sind also in der Ebene BAC die 5 Kräfte X, Y, μX, $\mu' Y$ und P thätig, und es findet nach (64) Gleichgewicht statt, wenn

I. $-\mu X+Y=0$, II. $\mu' Y+X-P=0$, und

III. $\frac{1}{2}Pl\cos\alpha-\mu' Yl\cos\alpha-Yl\sin\alpha=0$, d. i. ihre Momentensumme der Null gleich ist. Aus I. ergibt sich

IV. $Y=\mu X$ und mit diesem Werthe gibt II. $P=X(1+\mu\mu')$, und nach Substitution dieser Werthe in III. erhält man

$\frac{1}{2}(1-\mu\mu')\cos\alpha=\mu\sin\alpha$, woraus der Werth für α zum Vorschein kommt. Zugleich hat man

$$X=\frac{P}{1+\mu\mu'},\quad Y=\frac{\mu P}{1+\mu\mu'}.$$

175. Folgesatz. Ist $\mu=0$, so ist $\operatorname{tg}\alpha=0$, und es könnte ohne Reibung in A nie ein Gleichgewicht bestehen, außer bei $\alpha=\frac{1}{2}\pi$. Ist aber $\mu'=0$, d. i. wenn keine Reibung in B statt hat, dann ist der Druck X in A dem ganzen Gewichte des Balkens gleich.

176. Aufgabe. Ein Balken sei an eine vertikale Wand schief angelehnt, man sucht den kleinsten Winkel, den seine Projektion auf diese Wand mit dem Durchschnitt derselben und dem Horizonte machen kann, damit der Balken durch bloße Reibung von dem völligen Umsturze gesichert bleibe.

Auflösung. Sei AB (Fig. 24) der gegebene Balken, welcher bei A und B so gestellt ist, daß er mit seiner Projektion AC auf den Horizont MN einen Winkel $BAC=\alpha$, und mit seiner Projektion BC auf die Wand NR einen Winkel $ABC=\beta$ bildet, so erhält man den Winkel $BCD=\varphi$, wenn er gerade nicht stürzen soll, aus der Gleichung $\operatorname{cot}\varphi=\mu\operatorname{cot}\alpha$.

Digitized by Google

Beweis. Man bezeichne mit l die Länge des Balkens, setze die senkrechte Entfernung des Stützpunktes A von der Wand, nämlich $AC=a$, so ist $BC=\sqrt{(l^2-a^2)}$, und $\cos\alpha=a:l=\sin\beta$; beim Herabgleiten des Balkens beschreibt das Ende B einen Kreisbogen vom Halbmesser BC, die Reibung wirkt daher nach BH senkrecht auf BC. Heißt nun X' der senkrechte Druck auf die Wand NR, also $\mu X'$ die hiedurch entstehende Reibung, welche nach BH wirkt, so zerfällt dieselbe in die Seitenkräfte $\mu X'\sin\varphi$; und $\mu X'\cos\varphi$, nach den Richtungen BI und BF parallel den Axen AY, AZ, und eben so zerlege man den Druck im Punkte A in die Seitenkräfte X, Y, Z parallel den Axen AX, AY, AZ so erhält man die 7 Kräfte P, X, Y, Z, X', $\mu X'\sin\varphi$, $\mu X'\cos\varphi$ welche an dem Balken AB im Gleichgewichte stehen, wenn nach (67)

I. $X-X'=0$, II. $Y-\mu X'\sin\varphi=0$, III. $Z+\mu X'\cos\varphi-P=0$,

IV. $X'\cos\varphi\sqrt{(l^2-a^2)}-\mu X'a\sin\varphi=0$,

V. $\frac{1}{2}aP-\mu X'a\cos\varphi-X'\sin\varphi\sqrt{(l^2-a^2)}=0$,

VI. $\frac{1}{2}P\cos\varphi\sqrt{(l^2-a^2)}-\mu X'\sqrt{(l^2-a^2)}=0$.

Aus der Gleichung IV. ergibt sich sofort

$$\cot\varphi=\frac{a\mu}{\sqrt{(l^2-a^2)}}=\mu\cot\alpha,$$

und aus VI. der Druck auf die Wand $X'=P\cos\varphi:2\mu$; aus den Gleichungen I., II., III. hingegen findet man $X=X'$, $Y=\frac{1}{4}P\sin 2\varphi$ $Z=P(1-\frac{1}{2}\cos^2\varphi)$.

177. Aufgabe. Die Reibung zu finden, welche ein um den Bogen eines festen unbeweglichen Cylinders geführtes und durch ein gegebenes Gewicht gespanntes Seil an der Oberfläche desselben erzeugt.

Auflösung. Heißt φ die Bogenlänge des Cylinders, um welche das Seil geführt ist, Q das Gewicht, mit welchem das eine Ende des Seiles gespannt ist, so hat man die Reibung

$$P=Qe^{\mu\varphi}.$$

Beweis. Um den Bogen AM (Fig. 25) des Cylinders AMD sei das Seil AM geführt, dessen eines Ende A mit dem Gewichte Q gespannt erhalten wird, sei ferner Mm ein unendlich

Digitized by Google

kleiner Bogen, T die Spannung des Seiles im Punkte M nach der Richtung der Tangente MT, also $T+dT$ die Spannung des Seiles am Punkte m nach einer der Tangente mt entgegengesetzten Richtung, endlich sei N der durch beide Kräfte am Bogenelement Mm erzeugte Druck, und μN die hiedurch hervorgebrachte Reibung. Der Winkel, welchen die Kraft T mit der Axe CX einschließt, ist offenbar $\frac{1}{2}\pi-\varphi$, und die Kraft $T+dT$ am Punkte m macht mit der Axe CX einen Winkel $mtC=\frac{1}{2}\pi-(\varphi+d\varphi)$. Denkt man sich nun alle vier Kräfte T, $T+dT$, N, μN, weil das Element Mm unendlich klein ist, einen und denselben Punkt angreifend, und in die den Axen parallele Seitenkräfte zerlegt, so erhält man für das Gleichgewicht dieser Kräfte die zwei Gleichungen:

$$T\sin\varphi+N\cos\varphi+\mu N\sin\varphi-(T+dT)\sin(\varphi+d\varphi)=0$$
$$-T\cos\varphi+N\sin\varphi-\mu N\cos\varphi+(T+dT)\cos(\varphi+d\varphi)=0.$$

Substituirt man hierin statt $\sin(\varphi+d\varphi)$ und $\cos(\varphi+d\varphi)$ ihre Werthe $\sin\varphi+\cos\varphi d\varphi$ und $\cos\varphi-\sin\varphi d\varphi$, so verwandelt sich diese Gleichung, nach Hinweglassung der verschwindenden Glieder $\cos\varphi dTd\varphi$ und $-\sin\varphi dTd\varphi$ in

$$\text{I. } N\cos\varphi+\mu N\sin\varphi-T\cos\varphi d\varphi-dT\sin\varphi=0$$
$$\text{II. } N\sin\varphi-\mu N\cos\varphi-T\sin\varphi d\varphi+dT\cos\varphi=0.$$

Multiplizirt man die Gleichung I. mit $\cos\varphi$ und II. mit $\sin\varphi$, so gibt die Summe der Produkte den Ausdruck III. $N-Td\varphi=0$, multiplizirt man aber I. mit $\sin\varphi$ und II. mit $\cos\varphi$, und nimmt den Unterschied dieser Produkte, so folgt eben so IV. $\mu N=dT$, oder $\mu Td\varphi=dT$, woraus man sogleich $\mu d\varphi=dT:T$ erhält. Das Integrale des letzten Ausdruckes ist aber $\mu\varphi+C=\lambda T$, wo C eine Konstante bedeutet, oder aber

$$e^{\mu\varphi}.e^{c}=T, \text{ d. i., man hat } T=Ae^{\mu\varphi}$$

unter A den Werth e^{c} verstanden. Zur Bestimmung der Konstante A dient die Bedingung, daß für $\varphi=0$, $T=Q$ wird, dieß gibt $Q=A$, und sonach vollständig $T=Qe^{\mu\varphi}=P$.

178. *Folgesatz.* Wickelt man das Seil $n$mal um den Cylinder herum, so nimmt die Reibung rasch zu, denn man erhält für $\varphi=2n\pi\pi$, $P=Qe^{2\mu n\pi\pi}$.

Digitized by Google

Ist z. B. $\mu = 1/3$, $r = 1$ und $n = 0$, $1/4$, $1/2$, 1, 2, 4, 6, so wird P beziehungsweise 1, 1.688, 2.85, 8.121, 65.944, 4348.5, 286789 fache der Last Q.

2. Steifigkeit der Seile.

179. Erklärung. Die Kraft, mit welcher ein um einen Cylinder geführtes Seil dem Biegen widersteht, nennt man seine Steifigkeit.

180. Folgesatz. Dadurch, daß sich ein steifes Seil nicht genau an die Oberfläche des Cylinders anlegt, kommt der Angriffspunkt der daran hängenden Last etwas weiter von der Umdrehungsaxe des Cylinders zu stehen: hiedurch wird ihr statisches Moment größer, und ein Theil der bewegenden Kraft wird zur Ueberwindung dieses Hindernisses verwendet.

181. Lehrsatz. Die Steifigkeit der Seile ist ihrer Spannung und dem Quadrate ihres Durchmessers direkt, dem Halbmesser des Cylinders aber, um welchen sie gewickelt werden, umgekehrt proportional.

Beweis. Je mehr ein Seil gespannt ist, desto steifer ist es, während minder gespannte Seile sich leichter an die Oberfläche des Cylinders anlegen, und eben so, je größer der Querschnitt eines Seiles ist, desto eine größere Kraft wird erfordert, die Steifigkeit sämmtlicher Fäden, aus denen das Seil besteht, zu gewältigen. Allein um einen Cylinder vom größeren Durchmesser läßt sich ein Seil leichter wickeln, als um einen andern, dessen Durchmesser kleiner ist, weil es beim letzteren mehr gekrümmt werden muß, als beim ersteren. Heißen also

F, F', F'', f die Steifigkeiten der Seile

Q, Q', Q', Q' die spannenden Gewichte

$\delta, \delta, \delta', \delta'$ die Durchmesser der Seile

r, r, r, r' die Halbmesser der Cylinder, um welche die Seile gewickelt werden, so erhält man bei Vergleichung dieser Größen

$$F : F' = Q : Q'$$
$$F' : F'' = \delta^2 : \delta'^2$$
$$F'' : f = r' : r \quad \text{folglich}$$
$$F : f = Q\delta^2 r' : Q'\delta'^2 r, \text{ dieß gibt}$$

$$F=\frac{fr'}{Q'\delta'^2}\cdot\frac{Q\delta^2}{r}=k.\frac{Q\delta^2}{r}.$$

Wird nun zu einem gegebenen Q', δ', r' das zugehörige f durch Versuche bestimmt, so kann man den Faktor k numerisch darstellen, und hiemit F in anderen Fällen angeben.

182. Anmerkung. Die Steifigkeit eines Seiles hängt zwar vorzüglich von seiner Dicke und von der Größe des Cylinders ab, um welchen es gewickelt ist, allein es kommen auch noch andere Umstände dabei in Betracht. Es lehret nämlich die Erfahrung, daß es unmöglich ist, Seile von überall gleicher Stärke und Drehung anzufertigen, wodurch nicht nur Seile, von demselben Stoffe gefertigt, unter übrigens gleichen Umständen einen ungleichen Grad der Steifigkeit aufweisen, sondern auch, daß selbst ein und dasselbe Seil in allen seinen Theilen nicht dieselbe Steifigkeit besitze. Hiebei ändert sich die Steifigkeit mit der Temperatur und Feuchtigkeit der Luft und mit der Dauer ihrer Benützung. In der Statik von Eytelwein, Band I. S. 437, findet man die über diesen Gegenstand angestellten Versuche einer nähern Prüfung unterzogen, deren Ergebniß ist, daß man in den meisten Fällen sich begnügen könne, die Berechnung der Steifigkeit nach der Formel zu richten: $F=kQ\delta^2:r$, wo r den Halbmesser des Cylinders, um welchen das Seil geführt ist, in Fußen, δ die Dicke des Seiles in Linien, Q das an seinem Ende hängende Gewicht in Pfunden, und k einen numerischen Koeffizienten bedeutet, dessen Mittelwerth 1:3500 für preußisches, und 1:2900 für Wiener Fußmaß ist. Wäre also z. B. $\delta=q$ Wiener Linien, $r=1/6$, $Q=60$ Pfunde, so ergibt sich $F=10.4$ Pfunde.

Streng genommen, gelten die Resultate, welche Versuche über die Steifigkeit der Seile liefern, nur für das Seil, womit die Versuche angestellt wurden, oder sie können höchstens als Näherungswerthe für solche Seile angesehen werden, die scheinbar mit dem erstern gleiche Beschaffenheit haben.

Digitized by Google

VI. Festigkeit der Körper.

183. Erklärung. Die Kraft, welche erfordert wird, um die Trennung der Theile in einem festen Körper zu bewirken, ist das Maß seiner Festigkeit. Diese Trennung besteht entweder in dem Auseinanderreißen der Theile, oder in dem Zerbrechen des Körpers, oder in dem Zusammendrücken desselben, oder endlich in dem Verdrehen des Körpers. Je nach diesen Umständen führt die Festigkeit eigene Namen.

1. Absolute Festigkeit.

184. Erklärung. Man nennt absolute Festigkeit diejenige Kraft, mit welcher ein Prisma von irgend einer festen Substanz einer andern Kraft widersteht, welche nach der Länge des Körpers wirkend, denselben zu zerreißen strebt. Ihr Maß ist das Gewicht, welches am untern Ende des seiner Länge nach am oberen Ende vertikal befestigten Körpers angebracht werden muß, um denselben auseinander zu reißen.

185. Lehrsatz. Die absoluten Festigkeiten zweier prismatischen Körper von derselben Art und Beschaffenheit verhalten sich wie ihre Querschnitte.

Beweis. Drückt man die Querschnitte zweier prismatischen Körper durch S und s und ihre absoluten Festigkeiten durch A und a aus, so folgt, wenn $S=ns$ ist, oder wenn im Querschnitte des ersten Körpers $n$mal so viel Theile zu zerreißen sind, als im andern Körper, daß auch $A=na$ sei, d. i. es wird sich verhalten $A:a=S:s$.

186. Folgesatz. Kennt man also die absolute Festigkeit a eines Körpers vom gegebenen Querschnitte s, so ergibt sich hieraus die absolute Festigkeit eines andern Körpers von derselben Art, $A=aS:s=kS$, unter dem Koeffizienten k die Größe $a:s$ verstanden, wo also k das Gewicht vorstellt, durch welches die Einheit des Querschnittes eines Körpers von derselben Materie zerrissen wird.

187. Anmerkung. Zu Versuchen über die absolute Festigkeit dienen Vorrichtungen, über welche man sich in Eytelwein's Statik

Digitized by Google

Band II. S. 190 und in Gerstner's Mechanik, Band I. S. 260 berathen kann. Die Ergebnisse solcher Versuche weichen von einander bald mehr, bald weniger ab, was ohne Zweifel von der verschiedenen Beschaffenheit der Körper, wenn auch von gleichnamiger Materie herrührt. Unter diesen Umständen sollen hier nur die absoluten Festigkeiten der am häufigsten gebräuchlichen Körper, nach der in Eytelweins Statik enthaltenen, wie bekannt, mit der größten Sorgfalt, theils aus eigenen, theils von Anderen angestellten Versuchen zusammengestellten Tafel angegeben werden. Die Flächeneinheit ist hier ein Wiener Quadratzoll, und die Einheit des Gewichtes ein Wiener Handelspfund.

Buchenholz (Rothbuchen)	18414	Eisendraht	49767
Eichenholz, Sommereiche vom Kerne	21905	Kiefer vom Kerne	17623
Eichenholz, zwischen Kern und Splint	18068	— — harzig	13308
Eichenholz vom Splint	12155	— zwischen Kern u. Splint	17189
— Steineiche	18216	Kiefer — harzig	10310
Eisen, deutsches, gegossenes	58002	— vom Splint	15086
— gutes, geschmiedet	64275	Seile von Hanf gedreht	7411
— gem. —	58717	Stahl, gem. biegsamer	96450
— osmünder	60800	— bester biegsamer	106274
— schwedisches	63202	— — zu Scheermess.	133959
— schlesisches	64350	Tannenholz (Rothtanne)	8992
		— (Weißtanne)	12682

188. Anmerkung 2. Sollen die angeführten Körper für die Dauer die aufgehängte Last tragen können, wie z. B. bei ihrer Anwendung in Gebäuden und Maschinen, so darf man für Holz und Seile nur den dritten Theil, für Eisen aber nur die Hälfte ihrer absoluten Festigkeit nehmen. Es ist also für die (187) angegebenen Werthe von k bei Holz $A=\frac{1}{3}kS$, bei Eisen $A=\frac{1}{2}kS$. Sind aber die Prismen, an welche Lasten aufgehängt werden sollen, von beträchtlicher Länge, so muß noch ihr Gewicht mit in Rechnung gebracht werden, weil dasselbe gleichfalls zum Zerreißen beiträgt.

Digitized by Google

189. Aufgabe. Die Gestalt eines Körpers von durchgängig gleicher Festigkeit zu finden, wenn derselbe eine gegebene Last zu tragen hat.

Auflösung. Der gesuchte Körper ist ein logistisches Konoid, dessen Querschnitte von dem unteren Ende an, wo die Last hängt, immerfort zunehmen. Heißt h das Gewicht des Körpers für die Einheit des Volums, s sein Querschnitt am unteren Ende, und S der Querschnitt im Abstande x, so ist für eine angehängte Last P nahe

$$S=\frac{(12P^2+6hsPx+h^2s^2x^2)s}{12P^2-6hsPx+h^2s^2x^2}$$

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 26) die Gestalt eines Körpers von durchgängig gleicher Festigkeit, EF seine Axe, in deren Verlängerung die Last P angebracht ist, man bezeichne mit s den unteren Querschnitt CD, und mit S den Querschnitt MN in der Entfernung $FP=x$ von jenem, das Gewicht des Körpers $MNCD$ heiße Q. Wächst x um dx, so nimmt Q um $dQ=hSdx$ zu: man hat also (185) $P:P+Q=s:S$, daher $P+Q=PS:s$, oder wenn man differentiirt $dQ=PdS:s$, also $PdS:s=hSdx$. Hieraus folgt $\frac{dS}{S}=\frac{hsdx}{P}$, und wenn man integrirt, erhält man $\lambda S=\frac{hsx}{P}+C$, und da für $x=0$ $S=s$ ist, so hat man $C=\lambda s$, somit vollständig $\lambda\frac{S}{s}=\frac{hsx}{P}$. Setzt man Kürze halber $hsx:P=y$, so folgt $\lambda\frac{S}{s}=y$, oder $\frac{S}{s}=e^y$: allein nach (A. 642) ist $e^y=1+y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}!y^3+\frac{1}{4}!y^4+\ldots$, die Summe dieser Reihe ist nahe $(12+6y+y^2):(12-6y+y^2)$: hiedurch wird nach Substitution des Werthes für y, der Ausdruck für S wie oben.

190. Anmerkung. Man kann darnach für jeden beliebigen Abstand x den zugehörigen Querschnitt S des Körpers berechnen, und derselbe wird dann mit dem Gewichte P belastet, eine durchgängig gleiche Festigkeit weisen. Sollen also Lasten aus tiefen Schachten aufwärts gehoben werden, so müssen die dabei in An-

Digitized by Google

wendung kommenden Ketten oder Seile eine dem in (189) angeführten Gesetze entsprechende Gestalt besitzen: und hier zeigt sich der bedeutende Vorzug eiserner Ketten vor Seilen, weil nebstdem, daß gleich starke Ketten leichter, dauerhafter und wohlfeiler sind als Bergseile, die ersteren so verfertiget werden können, daß eine jede Klafter die gehörige der daran hängenden Last entsprechende Stärke erhält, während Bergseile nur von gleicher Stärke gemacht werden, und also immer im Verhältniß der ihnen angehängten Last zu schwer, und einmal an irgend einer Stelle schadhaft geworden, nicht mehr herzustellen sind.

191. Anmerkung. 2. Da das Eisen bei dem Maschinen- und Bauwesen immer neue Anwendungen gewinnt, so hat man in neueren Zeiten über die Tragungsfähigkeit desselben zahlreiche Versuche angestellt, und hiebei folgende Ergebnisse gefunden: Eine prismatische Stange von Eisen oder Stahl dehnt sich bei ihrer Belastung aus, die Ausdehnung ist hiebei der Belastung proportional, wenn die letztere eine gewisse Grenze nicht überschreitet, und die Stange nimmt genau ihre vorige Länge wieder an, sobald die Belastung entfernt wird. Innerhalb einer gewissen Grenze der Belastung verhalten sich eiserne Stangen als vollkommen elastische Körper. Werden sie aber mit größeren Gewichten belastet, als jene Grenze aufweiset, so ziehen sie sich zwar bei beseitigter Belastung zusammen, weichen jedoch in ihrer Länge von ihrer ursprünglichen Länge desto mehr ab, je mehr die Belastung jene Grenze der vollkommenen Elastizität überschritten hat, d. i. eiserne Stangen, deren Belastung die Grenzen der vollkommenen Elastizität überschreitet, nehmen eine bleibende Ausdehnung an, und die Unterschiede ihrer totalen und bleibenden Ausdehnungen sind nur noch den Belastungen proportional.

192. Folgesatz. Für die Anwendung des Eisens zu Kettengliedern ergibt sich hieraus die wichtige Regel, daß man die eisernen Schienen, welche zu Kettengliedern verbunden werden sollen, vorerst einer Belastung unterwerfe, welche größer ist, als diejenige, welche sie bei ihrem nachherigen Gebrauche zu tragen haben, weil dann die bleibende Ausdehnung, welche sie bei dieser vorläufigen Probe erhalten, ungeändert bleibt, welche Lasten ihr auch später-

Digitized by Google

hin aufgelegt werden mögen. Eine Anzahl solcher zu einer Kette vereinigten Glieder wird dann ihre absolute Länge behalten, wenn auch die bekannte, größtmögliche Belastung ihr auferlegt wird, sobald diese zufällige Belastung aufhört, und man hat nicht zu besorgen, daß die belasteten Ketten in der Folge schlapp werden.

193. Aufgabe. Aus den beobachteten Ausdehnungen, welche eine eiserne Stange bei zwei verschiedenen Belastungen erleidet, die absolute Festigkeit derselben zu bestimmen.

Auflösung. Heißen Q, Q' die Belastungen, bei denen eine eiserne Stange die Ausdehnungen β, β' beziehungsweise erleidet, so hat man zu ihrer absoluten Festigkeit den Ausdruck $A=M^2:4N$, wo Kürze halber

$$M=\frac{Q\beta'^2-Q'\beta^2}{\beta'^2\beta-\beta^2\beta'},\quad N=\frac{Q\beta'-Q'\beta}{\beta'^2\beta-\beta^2\beta'}$$ ist.

Beweis. So lange die Belastung Q die Grenze nicht übersteigt, innerhalb deren die eiserne Stange ihre vollkommene Elastizität behält, ist nach (191) $Q=M\beta$. Wie aber die Belastung der Stange jene Grenze überschritten hat, erhält die Stange eine bleibende Ausdehnung, und die Belastung ist dann noch dem Unterschiede zwischen der beobachteten Ausdehnung β und der bleibenden Ausdehnung proportional, bezeichnen wir diesen Unterschied mit $M-N\beta$, wo M und N Koeffizienten vorstellen, deren numerische Werthe bei jeder Gattung von Eisen durch Versuche zu bestimmen sind, so erhält man I. $Q=(M-N\beta)\beta=M\beta-N\beta^2$. Für eine andere Belastung Q' sei β' die zugehörige totale Ausdehnung der Stange, so hat man gleichfalls II. $Q'=M\beta'-N\beta'^2$. Aus diesen Gleichungen findet man

$$M=\frac{Q\beta'^2-Q'\beta^2}{\beta'^2\beta-\beta^2\beta'},\quad N=\frac{Q\beta'-Q'\beta}{\beta'^2\beta-\beta^2\beta'}.$$

Nimmt man nun an, α sei die größte Ausdehnung der Stange, welche ihrer absoluten Festigkeit zugehört, d. i., welche die Stange vor ihrem Zerreißen anzunehmen vermag, so ist den beiden Gleichungen gemäß III. $A=M\alpha-N\alpha^2$. Durch Differentiirung erhält man $dA=d\alpha(M-2N\alpha)$, und für den Fall des Maximums

IV. $\alpha=\frac{M}{2N}$, hiedurch wird $A=\frac{M^2}{4N}$.

Digitized by Google

194. Folgesatz. Die Gleichung $Q=M\beta-N\beta^2$ gibt nach Substitution des Werthes von $N=M:2\alpha$ aus IV. $Q=\frac{1}{2}M\beta(2-\beta:\alpha)$ während die Gleichung III. für denselben Werth von N, $A=\frac{1}{2}M\alpha$ liefert. Dividirt man diese Ausdrücke mit einander, so erhält man V. $\frac{Q}{A}=\frac{\beta}{\alpha}\left(2-\frac{\beta}{\alpha}\right)$, oder $Q=A\beta\left(2-\frac{\beta}{\alpha}\right)$ und bei Entgegenhaltung dieses Ausdruckes mit I. erhält man

VI. $M=\frac{2A}{\alpha}$, $N=\frac{A}{\alpha^2}$.

195. Folgesatz 2. Analog der Gleichung V. folgt auch

$$\frac{Q'}{A}=\frac{\beta'}{\alpha}\left(2-\frac{\beta'}{\alpha}\right)$$

woraus man durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$\beta'^2-2\beta'\alpha+\frac{Q'\alpha^2}{A}=0$, erhält VII. $\beta'=\alpha\left[1\pm\sqrt{\left(1-\frac{Q'}{A}\right)}\right]$

wo nur das untere Vorzeichen gilt, weil doch β' stets kleiner als α sein muß.

Nun ist die der Last Q' proportionale Ausdehnung wegen $Q'=M\beta'$, $\beta'=Q':M$, und dem Ausdrucke VI. gemäß $\beta'=\alpha Q':2A$; zieht man diese Gleichung von VII. ab, so ergibt sich die nach Beseitigung des Gewichtes Q' bleibende Ausdehnung der Stange

$$\delta=\alpha\left[1-\sqrt{\left(1-\frac{Q'}{A}\right)}-\frac{Q'}{2A}\right]=\tfrac{1}{2}\alpha\left[1-\sqrt{\left(1-\frac{Q'}{A}\right)}\right]^2$$

Ist $Q'=A$, so wird $\delta=\frac{1}{2}\alpha$, mithin hat die Stange für die Belastungen von $Q=0$ bis $Q'=A$ eine Ausdehnung $\beta'=\frac{1}{2}\alpha$, welche allein den Belastungen proportional ist.

2. Respektive Festigkeit.

196. Erklärung. Respektive Festigkeit ist der Widerstand, welchen ein prismatischer, irgend wie befestigter Körper, wenn er von einer in der auf seine Länge senkrechten Richtung wirkenden Kraft, die ihn zu zerbrechen strebt, angegriffen wird. Der Querschnitt des Körpers, in welchem der Bruch erfolgt, heißt die Brechungsfläche, und die Kante, um welche der abgebrochene Theil sich bewegt, die Brechungsaxe des Körpers. Bei Körpern, die

Digitized by Google

von krummen Flächen eingeschlossen sind, ist die Brechungsaxe ein materieller Punkt.

197. Erklärung. Der Körper, dessen respektive Festigkeit untersucht wird, kann entweder mit einem seiner Ende in einer lothrechten Mauer, in einer horizontalen, auf die Mauer senkrechten Lage befestiget werden, und die Kraft, welche ihn zu zerbrechen strebt, wirkt am andern Ende des Körpers lothrecht, dann heißt der Abstand des Angriffspunktes dieser Kraft von der Mauer die Länge des Körpers: oder der Körper kann mit seinen beiden Enden in zwei lothrechten einander parallelen Mauern befestiget sein, oder aber auf zwei festen Unterlagen frei aufliegen, und die Kraft, welche ihn zu brechen strebt, wirkt in einem gegebenen mittleren Punkte senkrecht auf die Länge des Körpers, durch welchen Punkt bei erfolgendem Bruche die Brechungsfläche hindurchgeht. Man nennt in diesem Falle Länge des Körpers denjenigen Theil desselben, welcher zwischen beiden Mauern oder Unterlagen enthalten ist, und den Abstand des Angriffspunktes der Kraft von einer der Unterlagen ihren Hebelsarm.

198. Erklärung. Jeder Körper besteht aus Fasern, die gewöhnlich nach der Länge des Körpers fortlaufen, und mehr oder weniger elastisch sind. Betrachtet man zuerst den Fall, in welchem der Körper einerseits in einer lothrechten Wand steckt, so ist offenbar die Wirkung des an seinem anderen Ende aufgehängten Gewichts ein Bestreben, die oberen Fasern auszudehnen und die unteren zusammenzudrücken. Die Ausdehnung der Fasern wird von oben nach unten, und die Zusammendrückung in umgekehrter Richtung abnehmen, und zwischen den Schichten ausgedehnter und zusammengedrückter Fasern wird eine Schicht befindlich sein, in welcher weder Ausdehnung noch Zusammendrückung Statt findet: man nennt sie eine neutrale Schicht, und ihren Durchschnitt mit einer durch die Länge und den Schwerpunkt des Körpers gezogenen vertikalen Ebene die neutrale Axe des Körpers.

199. Folgesatz. Die neutrale Axe des Körpers liegt in der Mitte der Höhe des Körpers, wenn sich seine Fasern mit gleicher Leichtigkeit ausdehnen als zusammendrücken lassen. Findet die Ausdehnung der Fasern leichter Statt, als ihre Zusammendrückung,

Digitized by Google

so befindet sich die neutrale Axe unter, im entgegengesetzten Falle über der Mitte der Höhe. Fände aber gar keine Zusammendrükkung sondern Ausdehnung Statt, so kömmt die neutrale Axe an der untersten Fläche des Körpers zu stehen.

200. Erklärung. Im andern Falle, wo beide Ende des prismatischen Körpers gestützt sind, und das aufgehängte Gewicht in einem mittleren Punkte den Körper zu brechen strebt, werden die Fasern unter der neutralen Axe ausgedehnt, über derselben aber zusammengedrückt. Ein Körper, dessen Fasern dieser Veränderung fähig sind, heißt ein biegsamer oder elastischer Körper, im Gegenfalle aber ein harter Körper. Bei harten Körpern erfolgt ein Bruch, wenn sämmtliche Fasern der Brechungsfläche plötzlich reißen.

201. Aufgabe. Die Formel für die respektive Festigkeit eines Körpers zu bestimmen.

Auflösung. Sei AMB (Fig. 27) die Brechungsfläche, AB die Gerade, um welche bei der Brechung des Körpers die Drehung des abgebrochenen Theils vor sich geht, so ist, wenn diese Gerade zur Abszissenaxe genommen wird, und die Kraft, welche den Bruch erzeugt, R heißt, und am Hebelsarme l wirkt, bei einem harten Körper $Rl=\frac{1}{2}k\int y^2dx$, und bei einem biegsamen Körper $Rl=\frac{k}{3q}\int y^3dx$, wo k die absolute Festigkeit des Körpers für die Flächeneinheit, und q den Abstand der entferntesten Faser von der Brechungsaxe, die hier als neutrale Schichte genommen wird, vorstellt.

Beweis. Sei für eine beliebige Abszisse $AP=x$ die Ordinate der die Brechungsfläche umgebenden Kurve AMB, $PM=y$: betrachtet man das Element dieser Fläche $NOon$, und setzt $PO=z$, so ist der Inhalt desselben $dx.dz$, also die absolute Festigkeit der in demselben enthaltenen Fasern $kdxdz$ (186), und das Moment derselben hinsichtlich der Drehungsaxe $kzdxdz$. Integrirt man diesen Ausdruck in Beziehung auf z, die Größe x als konstant genommen, so ergibt sich die Summe der Momente der Festigkeiten aller im Raume $POop$ begriffenen Fasern $kdx\int zdz=\frac{1}{2}kdx.z^2$: setzt man aber hier $z=y$, oder integrirt man die Formel $kzdxdz$

Digitized by Google

von $z=0$ bis $z=y$, so gibt der Ausdruck $\frac{1}{2}ky^2dx$ die Summe der Momente für die Festigkeiten der Fasern im Raume $PMmp$. Hieraus ergibt sich der Widerstand der Brechungsfläche APM gegen das Zerbrechen $\frac{1}{2}kfy^2dx$. Wirkt nun die Kraft R, durch welche der Körper zerbrochen wird, am Hebelsarme l senkrecht auf die Richtung der Fasern, so hat man bei einem festen Körper, wo alle Fasern der Brechungsfläche im Momente des Bruches reißen, und keine Biegung des Körpers dem Bruche vorangeht

$$47)\quad Rl=\tfrac{1}{2}kfy^2dx.$$

Bei einem biegsamen Körper erfolgt erst der Bruch, nachdem die am höchsten in der Brechungsfläche befindliche Faser D (Fig. 27), deren Abstand von der Brechungsaxe $CD=q$ ist, ihre größte Ausdehnung erhalten hat, reißt diese, so werden auch die tiefer gelegenen Fasern sich immer mehr ausdehnen und reißen. Sei also k die absolute Festigkeit des Körpers für die Flächeneinheit demnach k die Kraft, mit welcher die Faser in D (Fig. 28) im Augenblicke des erfolgenden Bruches gespannt wird, die Folge davon, wenn man sich die Figur 28 als den Längendurchschnitt des Körpers vorstellt, ist die Ausdehnung dieser Faser in den unendlich kleinen Bogen $DD'=\alpha$, welcher als eine gerade Linie genommen werden kann; setzt man nun die entsprechende Spannung der Fasern bei N gleich k', ihre Ausdehnung $NN'=\alpha'$, so ist $k:k'=\alpha:\alpha'=q:z$, also $k'=kz:q$, es ist daher bei biegsamen Körpern der Widerstand der Fasern bei N, in dem Augenblicke, wo der Bruch erfolgt, $k'dzdx=kzdzdx:q$.

Das Moment desselben für die Drehungsaxe AB (Fig. 27) ist also $z.\frac{kdx}{q}zdz=\frac{kdx.z^2dz}{q}$, und sonach $\frac{kdx}{q}\int z^2dz$ ist die Summe der Momente aller Fasern in dem Raume $NOon$. Integrirt man diesen Ausdruck von $z=0$ bis $z=y$, so erhält man zur Summe der Momente, für die Fläche $POop$ $\frac{kdx}{3q}y^3$, setzt man hierin den Werth von y als eine Funktion von x, und integrirt abermals zwischen $x=0$ bis $x=AB$, so findet man für die Fläche AMB

$$48)\quad Rl=\frac{k}{3q}\int y^3dx.$$

Digitized by Google

202. **Folgesatz.** Ist der Querschnitt des Prisma ein Rechteck von der Breite b und Höhe h, so ist in beiden Fällen, ob der Körper hart oder biegsam ist, $y=h$ unveränderlich; daher in Formel 47) $Rl=\frac{1}{2}kbh^2$, und in Formel 48), wo nebstdem $q=h$ wird, erhält man $Rl=\frac{1}{3}kbh^2$. Sind also in zwei vierkantigen Balken von gleichnamiger Materie R', R ihre respektiven Festigkeiten, H, h ihre Höhen, B, b die Breiten, L, l die Längen; so hat man analog im ersten Falle $R'L=\frac{1}{2}kBH^2$ und $RL=\frac{1}{3}kBH^2$ im anderen Falle, demnach stets $R':R=\frac{BH^2}{L}:\frac{bh^2}{l}$ d. i. die respektiven Festigkeiten zweier vierkantigen Balken von gleichnamiger Materie verhalten sich direkt wie ihre Breiten und Quadrate der Höhen, und verkehrt wie ihre Längen.

203. **Anmerkung.** In der vorstehenden Darstellung wurde zwar vorausgesetzt, daß die neutrale Axe in die unterste Fläche des Balkens falle: allein sobald der Körper ein Parallelopiped ist, so hat die Lage der neutralen Axe auf die respektive Festigkeit des Körpers keinen Einfluß. Um dieses einzusehen, sei $ABCD$ (Fig. 29) die Brechungsfläche mit den Abmessungen $AB=b$, $BC=h$, deren neutrale Schicht in ab gelegen sei, und also cd (Fig. 30) sei die Lage der durch den Punkt a gezogenen neutralen Axe. Die Gerade AE sei die Projektion der Brechungsfläche, bevor ein Bruch erfolgt, und $E'A'$ sei die Lage der Brechungsfläche im Augenblicke des Bruches. Die Gerade KK' stelle die vertikale Seite der Wand vor, in welche der Balken $FEAG$ befestiget ist. Nimmt man cd zur Momenten-Axe, und setzt $aE=nh$, wo n einen echten Bruch vorstellt, so findet man, wie vorhin (201), den Widerstand der im Raume EaE' ausgedehnten Fasern $\frac{k}{3q}\int y^2dx$, oder weil hier $q=nh=y$ konstant ist, so wird derselbe $\frac{1}{3}kbn^2h^2$: und der Widerstand der im Raume $A'aA$ zusammengedrückten Fasern, wenn derselbe auf die Flächeneinheit mit x angedeutet wird, und man $q=(1-n)h=y$ macht, gleich $\frac{1}{3}x(1-n)^2bh^2$; somit ist der Gesammtwiderstand dem Zerbrechen entgegen

$$Rl=\tfrac{1}{3}[kn^2+x(1-n)^2]bh^2$$

Digitized by Google

Da die eingeklammerte Größe für einerlei Materie unveränderlich bleibt, so hat man für

$$\nu = {}^1/_3[kn^2 + \varkappa(1-n)^2]$$

sofort $Rl = \nu bh^2$, wie oben (202), wo die neutrale Schicht in der Brechungsaxe gelegen war.

204. *Folgesatz.* Hieraus folgt, daß bei vierkantigen Balken von einerlei Materie und Beschaffenheit, aber verschiedenen Abmessungen, der Quotient $\nu = \frac{Rl}{bh^2}$, den man den Brechungskoeffizienten nennt, einen unveränderlichen Werth haben muß.

205. *Anmerkung.* Die Unveränderlichkeit des Brechungskoeffizienten würde in aller Schärfe Statt finden, wenn die Balken die aus gleichnamiger Materie bestehen, auch wirklich durchaus gleichartig wären. Allein da das Letztere nie der Fall ist, so werden die aus Versuchen auszumittelnden Brechungskoeffizienten nie ganz gleich sein, und man muß sich begnügen, aus mehreren genauen Versuchen einen Mittelwerth für ν zu bestimmen. Folgende Tafel liefert die Brechungskoeffizienten ν, wenn die Abmessungen des einerseits befestigten vierkantigen Balkens b, h, l in Wiener Zollen, und die am freien Ende desselben aufgehängte Last in Wiener Pfunden gegeben ist. Sie ist das Ergebniß der mit großer Sorgfalt von Eytelwein, *Rondelet* und *Tredgold* angestellten Versuche.

I. Holzgattungen.	Werthe von ν.	II. Andere Stoffe.	Werthe von ν.
Rothbuchen	3989	Schmiedeisen in Stäben	30376
Steineiche	3480	— mittleres	17089
Sommereiche	3393	Weißgraues Gußeisen	3683
Erlenholz	2921	Dunkelgraues —	6025
Weißbuchen	2545	Marmor	263 bis 319
Kiefern	2438	Sandstein	107 bis 112
Weißtannen	2318	Kalkstein	142
Rothtannen	1736	Ziegel	37 bis 44

Uebrigens, wenn die Tragfähigkeit dieser Körper für die Dauer verlangt wird, so darf bei Holz nur der zehnte, bei Gußeisen der vierte und Schmiedeisen und Steinen nur der dritte Theil der für den Bre-

Digitized by Google

chungskoeffizienten angesetzten Werthe genommen werden. Obgleich Gußeisen etwa 4mal stärker als Eichenholz und 6mal stärker als Kiefernholz ist, so wird dessen Anwendung bei Brücken und Dachstühlen seiner Sprödigkeit wegen, nicht rathsam.

206. Aufgabe. Wenn ein beiderseits befestigter Balken in irgend einem seiner Punkte von einer gegebenen Last angegriffen wird, die Pressungen auf die Unterlagen zu finden.

Auflösung. Sei $AB=l$ (Fig. 31) die Länge des beiderseits in den Mauern CC', DD' horizontal befestigten Balkens, M der Angriffspunkt einer Last Q, die in dem Abstande $AM=a$ angebracht ist, so sind die Pressungen in A und B beziehungsweise

$$\frac{(l-a)Q}{l} \text{ und } \frac{aQ}{l}.$$

Beweis. Denn heißt x die Pressung im Punkte A, also x eine Kraft, die nach der Richtung AC angebracht, der Last Q das Gleichgewicht hielte, so wären ihre statischen Momente in Bezug auf die Unterlage in B, lx und $(l-a)Q$, es ist also $x=(l-a)Q:l$ und eben so folgt der Druck y auf die Unterlage in B, $y=aQ:l$.

207. Folgesatz. Soll nun die Last Q in M angebracht, den Balken zerbrechen, so hätte man hinsichtlich des Punktes A

$$\frac{(l-a)Q}{l}=\nu\frac{bh^2}{a} \quad (204)$$

und hinsichtlich des Punktes B

$\frac{aQ}{l}=\nu\frac{bh^2}{l-a}$, woraus in beiden Fällen $Q=\frac{\nu lbh^2}{a(l-a)}$ folgt. Ist hier $a=\frac{1}{2}l$, oder hängt die Last in der Mitte des Balkens, so erhält man $Q=\frac{4\nu bh^2}{l}$,

d. i. ein beiderseits gestützter Balken trägt in seiner Mitte belastet viermal so viel, als wenn er bloß einerseits befestigt wäre.

208. Folgesatz 2. Stellen wir uns vor, der Balken AB (Fig. 32) werde um den Punkt A um einen Winkel $BAR=\alpha$ gedreht und in der schiefen Lage bei A und B gestützt. Die Last Q, welche ihn vorhin im Punkte M (Fig. 31) angriff, werde durch eine Kraft N ersetzt, welche senkrecht zu seiner Richtung

Digitized by Google

AB wirkt, und die durch die Gerade MN ihrer Größe und Richtung nach vorgestellt werden soll; durch Verzeichnung des Rechtecks $PMNQ$, dessen Diagonale MQ vertikal ist, ergibt sich nun $MN=MQ\cos\alpha$ oder $N=Q\cos\alpha$. Heißt also wie vorhin $AM=a$, $AB=l$, so ist nach (207) $N=\frac{vlbh^2}{a(l-a)}$, mithin wird $Q=\frac{vlbh^2}{a(l-a)\cos\alpha}$ diejenige Last, welche einen schief liegenden Balken zu zerbrechen vermag.

3. Balken von größter respektiver Festigkeit.

209. Aufgabe. Aus einem cylindrischen Stamme einen vierkantigen Balken zu hauen, dessen respektive Festigkeit ein Größtes ist.

Auflösung. Man theile den Durchmesser AB (Fig. 33) des Kreises, welcher als Querschnitt des cylindrischen Stammes zum Vorschein kommt, in den Punkten D, E in drei gleiche Theile, errichte in denselben die Perpendikel DF, EG nach den entgegengesetzten Seiten bis auf den Umfang des Kreises, und verbinde die Endpunkte A, B des Durchmessers mit den Punkten F, G, so ist das Rechteck $AFBG$ der Querschnitt eines Balkens, von der Breite AF, Höhe BF, welcher die größte respektive Festigkeit besitzt.

Beweis. Heißt b die Breite, h die Höhe des gesuchten Querschnittes, so soll nach (207) dessen respektive Festigkeit vbh^2 ein Maximum werden. Man hat aber, wenn der Durchmesser des Kreises D heißt, für $b=x$, $h=y$, und $x^2+y^2=D^2$, also $y^2=D^2-x^2$, und daher wird $bh^2=x(D^2-x^2)=D^2x-x^3$ welcher Ausdruck ein Maximum wird, wenn sein Differentiale verschwindet, also $D^2-3x^2=0$ ist. Hieraus folgt $x^2=\frac{1}{3}D^2$ und $x=\frac{1}{3}D\sqrt{3}$, hiemit wird $y=D\sqrt{\frac{2}{3}}$. Das Verhältniß der Grundlinien des Balkens zu seiner Höhe ist demnach $b:h=x:y=1:\sqrt{2}$ welches mit der angegebenen Konstruktion übereinstimmt. Es ist nämlich $AF_q=AD.AB=\frac{1}{3}D^2$, und $BF_q=BD.AB=\frac{2}{3}D^2$, also

$$AF=\tfrac{1}{3}D\sqrt{3},\quad BF=D\sqrt{\tfrac{2}{3}}.$$

210. Aufgabe. Aus einem dreiseitigen Prisma soll ein vierkantiger Balken von größter Festigkeit herausgeschnitten werden.

Digitized by Google

Auflösung. Sei ABC (Fig. 34) der Querschnitt des gegebenen Prisma, $AC=b$ die Grundlinie, $BD=a$ die Höhe des Dreieckes, so trage man $DI=\frac{2}{3}a$ auf, ziehe EF auf BD senkrecht, und verzeichne das Rechteck $HEFG$, welches sofort den Querschnitt des stärksten Balkens abgibt.

Beweis. Sei $HG=x$ die Breite und $HE=y$ die Höhe des gesuchten Balkens, setze $AH=m$, $GC=n$, $AD=p$, $DC=q$, so ist $m:y=p:a$, $n:y=q:a$, also

$$m=\frac{py}{a},\quad n=\frac{qy}{a},\quad \text{und}\quad m+n=\frac{y(p+q)}{a}=\frac{by}{a}$$

Hieraus folgt $x=b-(m+n)=b(a-y):a$, und

$$xy^2=\frac{b(a-y)y^2}{a}=by^2-\frac{by^3}{a}$$

die Differentiirung gibt nun die Bedingung

$$2ay-3y^2=0,\quad \text{also}\quad y=\tfrac{2}{3}a,\quad x=\tfrac{1}{3}b.$$

211. Aufgabe. Aus einem cylindrischen Stamme, dessen Querschnitt eine halbe Ellipse ist, den festesten vierkantigen Balken zu bestimmen.

Auflösung. Heißt die Grundlinie des Querschnittes $2b$, die Höhe a, so ist die Breite des Balkens $2y=\frac{2}{3}b\sqrt{3}$ und die Höhe $x=a\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Beweis. Aus der Gleichung der Ellipse $a^2y^2=b^2(a^2-x^2)$ ergibt sich die Grundlinie $2y=2b\sqrt{(a^2-x^2)}:a$, und da die Höhe des Balkens x heißt, so muß das Produkt

$$2yx^2=2b\sqrt{(a^2x^4-x^6)}:a$$

ein Maximum werden. Hieraus folgt die Bedingung $4a^2x^3-6x^5=0$ oder $x=a\sqrt{\frac{2}{3}}$, und $2y=2b\sqrt{(a^2-\frac{2}{3}a^2)}:a=2b\sqrt{\frac{1}{3}}$ wie oben.

212. Folgesatz. Ist $a=b=r$, so ergibt sich

$$x=r\sqrt{\tfrac{2}{3}},\quad 2y=2r\sqrt{\tfrac{1}{3}}\quad \text{wie in (209)}$$

Vertauscht man aber in (211) a mit b, so erhält man für einen elliptischen Cylinder, dessen Querschnitt $2a$ zur Grundlinie und b zur Höhe hat, $x=b\sqrt{\frac{2}{3}}$, $2y=2a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

213. Aufgabe. Aus einem paraboliſchen Cylinder den stärksten vierkantigen Balken zu bestimmen.

Digitized by Google

Auflösung. Sei der Querschnitt des Stammes eine Parabel mit der Höhe a und Grundlinie $2b$, so hat man die Höhe des gesuchten Balkens $\frac{4}{5}a$, und dessen Grundlinie $2b\sqrt{\frac{1}{5}}$.

Beweis. Aus der Gleichung der Parabel folgt für Abszissen vom Scheitel $x:a=y^2:b^2$, also $y^2=\frac{b^2x}{a}$: ist nun $a-x$ die gesuchte Höhe des Balkens, so muß $2(a-x)^2y=2(a-x)^2b\sqrt{\frac{x}{a}}$ ein Maximum werden. Man hat aber, wenn man vorerst $(a-x)^2$ entwickelt, und gliederweise mit $\sqrt{(x:a)}$ multiplizirt, sodann differentiirt,

$$d\left[(a-x)^2b\sqrt{\frac{x}{a}}\right]=\frac{2b}{\sqrt{a}}(\tfrac{1}{2}a^2x^{-1/2}-3ax^{1/2}+\tfrac{5}{2}x^{3/2})dx$$

setzt man diesen Ausdruck $=0$, so wird

$$a^2-5ax+5x^2=0, \text{ also } x=\frac{(3+2)a}{5}$$

der Werth mit dem unteren Zeichen gibt ein Maximum, woraus die Höhe des Balkens $a-x=\frac{4}{5}a$, und $2y=2b\sqrt{\frac{1}{5}}$ folgt.

214. Aufgabe. Aus einem cylindrischen Stamme, dessen Querschnitt ein Kreisabschnitt ist, den stärksten Balken zu bestimmen.

Auflösung. Sei der Kreisabschnitt ABD (Fig. 35) der Querschnitt des Stammes, man setze den Halbmesser $AC=r$, den Winkel $ACD=\alpha$, und $A'B'=2y$ sei die gesuchte Breite des Balkens, $EE'=x$ die Höhe desselben, mit welchen der zu bestimmende Winkel $DCA'=\varphi$ zusammenhängt, so erhält man

$$\cos\varphi=\tfrac{1}{6}[\cos\alpha+\sqrt{(24+\cos^2\alpha)}]$$
$$2y=2r\sin\varphi, \text{ und } x=r(\cos\varphi-\cos\alpha).$$

Beweis. Es ist $A'B'=2r\sin\varphi$, $CE'=r\cos\varphi$, und $CE=r\cos\alpha$, und daher $EE'=x=r(\cos\varphi-\cos\alpha)$. Nun hat man

$$2yx^2=2r\sin\varphi.r^2(\cos\varphi-\cos\alpha)^2=2r^3\sin\varphi(\cos\varphi-\cos\alpha)^2$$

zum Ausdrucke, von welchem die Festigkeit des Balkens abhängt. Durch Differentiirung desselben erhält man

$$2r^3(\cos\varphi-\cos\alpha)[-2\sin^2\varphi+\cos^2\varphi-\cos\alpha\cos\varphi]d\varphi,$$

welcher in Null übergeht für

Digitized by Google

$\cos\varphi = \cos\alpha$, und $-2+3\cos^2\varphi-\cos\alpha\cos\varphi=0$

Aus der ersten Gleichung folgt $\varphi=\alpha$, welches einem Minimum entspricht, aus der anderen Gleichung aber erhält man

$\cos\varphi = \frac{1}{6}[\cos\alpha+\sqrt{(24+\cos^2\alpha)}]$, wodurch sich

$2y=2r\sin\varphi$ und $x=r(\cos\varphi-\cos\alpha)$ bestimmen läßt.

215. Folgesatz. Setzt man $DE'=x'$, $DE=h$, $CE=\delta$, $AE=c$; so folgt $y=\sqrt{(2rx'-x'^2)}$, und $x'=h-x$, also

$$y=\sqrt{[2r(h-x)-(h-x)^2]} \text{ und}$$

$$2yx^2=2x^2\sqrt{[h(2r-h)-(2r-2h)x-x^2]}$$

$$=2\sqrt{[h(2r-h)x^4-2(r-h)x^5-x^6]}$$

und weil $h(2r-h)=AE_q=c^2$ und $r-h=\delta$ ist, so erhält man $2yx^2=2\sqrt{(c^2x^4-2\delta x^5-x^6)}$, folglich

$$d(2yx^2)=\frac{d(c^2x^4-2\delta x^5-x^6)}{\sqrt{(c^2x^4-2\delta x^5-x^6)}}$$

und für den Fall eines Maximums wird $4c^2x^3-10\delta x^4-6x^5=0$, dieß gibt $x=-\frac{5}{6}\delta+\frac{1}{6}\sqrt{(24c^2+25\delta^2)}$.

216. Folgesatz 2. Soll aber $A'B'$ die Höhe und EE' die Grundlinie des stärksten Balkens werden, dann ist

$$4xy^2=4x(c^2-2\delta x-x^2)$$

mithin die Bedingungsgleichung $c^2-4\delta x-3x^2=0$, woraus sich $x=\frac{1}{3}[-2\delta+\sqrt{(3r^2+\delta^2)}]$ ergibt.

217. Aufgabe. Aus einem cylindrischen Stamme, dessen Querschnitt ein Kreisausschnitt ist, den stärksten Balken zu bestimmen.

Auflösung. Sei der Kreissektor ACB (Fig. 36) der gegebene Querschnitt, man ziehe die Sehne AB, und übertrage ihren dritten Theil von A nach m, halbire Am in n und nD in E, und ziehe EF zu CD senkrecht, so ist EF die Breite des Balkens und eine durch E mit CD parallel gezogene Gerade EH die Höhe desselben.

Beweis. Setzt man den Winkel $ACD=\alpha$, $ECD=\varphi$, und nimmt $EF=2y$ als Grundlinie, $IK=x$ als Höhe des Balkens, und setzt $CI=z$, so ist $y=r\sin\varphi$, $z=r\cos\varphi$, $KH=CK\operatorname{tg}\alpha$, also

$CK=KH\cot\alpha=x\cot\alpha=z-x$, daher

$x=z-x\cot\alpha=r\cos\varphi-r\sin\varphi\cot\alpha$, hiemit erhält man

Digitized by Google

$2yx^2=2r^3\sin\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi\cot\alpha)^2$, welches ein Maximum wird, wenn das Differentiale dieses Ausdruckes, oder

$$(\cos\varphi-\sin\varphi\cot\alpha)[(\cos\varphi-\sin\varphi\cot\alpha)\cos\varphi$$
$$-2\sin\varphi(\sin\varphi+\cos\varphi\cot\alpha)]d\varphi=0,$$

hieraus ergeben sich die Bedingungen:

$\cos\varphi-\sin\varphi\cot\alpha=0$, dieß gibt $\varphi=\alpha$ ein Minimum, und

$$\cos^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi\cot\alpha-2\sin^2\varphi-2\sin\varphi\cos\varphi\cot\alpha=0,$$

nämlich es ist $\sin^2\varphi+\sin\varphi\cos\varphi\cot\alpha=\frac{1}{2}$, und weil

$\sin^2\varphi=\frac{1}{2}(1-\cos2\varphi)$, und $\sin\varphi\cos\varphi=\frac{1}{2}\sin2\varphi$ ist, so wird

$\sin(\alpha-2\varphi)=\frac{1}{2}\sin\alpha$, oder $2r\sin(\alpha-2\varphi)=\frac{1}{2}AB$,

überträgt man also den dritten Theil der Sehne AB von A nach m, halbirt Am im Punkte n, so wird $nD'=\alpha-2\varphi$, wenn ferner nD in E halbirt wird, so findet man $ED=r\varphi$, und hiemit $EF=2r\sin\varphi=2y$.

218. Folgesatz. Soll aber EF die Höhe und EH die Breite des Balkens werden, so erhält man für die Festigkeit

$$4y^2x=4r^3\sin^2\varphi(\cos\varphi-\sin\varphi\cot\alpha)$$

woraus man auf eine ähnliche Weise findet $\sin(\alpha-2\varphi)=-\frac{1}{2}\sin\alpha$ oder $\sin(2\varphi-\alpha)=\frac{1}{2}\sin\alpha$.

219. Folgesatz 2. Man kann aber auch verlangen, daß die Grundlinie des Balkens GH (Fig. 37) mit dem Halbmesser des Sektors übereinfalle, und EH dessen Höhe auf jenem Halbmesser senkrecht wäre. Sei also $EHGF$ der verlangte Querschnitt des Balkens, man setze $EH=x$, $GH=y$, $AC=r$, $CG=z$, den Winkel $ACB=\alpha$, $ECH=\varphi$, so ist $x=r\sin\varphi$, $CH=z+y=r\cos\varphi$, und $CG=z=x\cot\alpha$, mithin

$y=r\cos\varphi-z=r\cos\varphi-x\cot\alpha=r\cos\varphi-\sin\varphi\cot\alpha$. Dieß gibt

$$x^2y=r^3\sin^2\varphi(r\cos\varphi-r\sin\varphi\cot\alpha)=r^3(\sin^2\varphi\cos\varphi-\sin^3\varphi\cot\alpha)$$
$$d(x^2y)=r^3(-\sin^3\varphi+2\sin\varphi\cos^2\varphi-3\sin^2\varphi\cos\varphi\cot\alpha)d\varphi$$

hieraus findet man für die größte Festigkeit $\sin(2\varphi-\alpha)=\frac{1}{2}\sin\alpha$.

Die Konstruktion dieser und der in (218) gegebenen Formel läßt sich so richten: man ziehe BD auf AC senkrecht, trage $\frac{2}{3}$ derselben von B bis m als Sehne auf, so daß $\frac{2}{3}BD=$ Sehne Bm, halbire den Bogen Bm in n, und den Bogen An in E, so ist die Senkrechte EH die Höhe des Balkens, und die dem Halbmesser AC parallel gezogene EF dessen Grundlinie.

Digitized by Google

4. Respektive Festigkeit prismatischer Balken vom gegebenen Querschnitte.

220. Lehrsatz. Wenn die Brechungsfläche eines Prisma ein Dreieck ist, so ist die respektive Festigkeit bei einer harten Materie zweimal so groß als bei einer biegsamen.

Beweis. Sei erstlich das rechtwinkliche Dreieck ABD (Fig. 38) die Brechungsfläche eines biegsamen Prisma, man bezeichne AB mit b, BD mit a und setze für einen beliebigen Punkt M, $AP=x$, $PM=y$, so ist nach Formel 48) $lR=k\int{}^1/_2y^3dx : q$. Wegen $x:y=b:a$ folgt $y=ax:b$, und $q=a$, daher wird

$$lR=\frac{k}{3a}\int\frac{a^3x^3dx}{b^3}=\frac{ka^2x^4}{12b^3},$$ also für $x=b$

$lR={}^1/_{12}ka^2b$. Ist aber das Prisma ein unbiegsamer Körper, so erhält man eben so aus Formel 47) $lR={}^1/_6ka^2b$, mithin ist lR in diesem Falle doppelt so groß als im Falle eines biegsamen Körpers.

Sei ferner irgend ein Dreieck ADC die Brechungsfläche des Prisma, fällt man das Perpendikel DB, so erhält man zwei rechtwinklige Dreiecke ADB, DBC, deren respektive Festigkeiten beziehungsweise R' und R'' heißen sollen. Ist nun $AB=b'$, $BC=b''$, so folgt für den Fall eines biegsamen Körpers

$R'l={}^1/_{12}ka^2b'$, und $R''l={}^1/_{12}ka^2b''$, demnach für $b=b'+b''$

$Rl=R'l+R''l={}^1/_{12}ka^2(b'+b'')={}^1/_{12}ka^2b$, und eben so im Falle eines harten Körpers $Rl=R'l+R'l={}^1/_6ka^2(b'+b'')={}^1/_6ka^2b$.

221. Aufgabe. Die Brechungsfläche eines Prisma sei ein Trapez und von den beiden parallelen Seiten desselben sei die größere die Brechungsaxe, die respektive Festigkeit des Körpers zu finden.

Auflösung Ist das Prisma biegsam, so hat man $Rl=ka^2(b+3b'):12$, im Gegenfalle aber ist $Rl={}^1/_6ka^2(b+3b')$ wo b, b' die parallelen Grundlinien und a ihren Abstand von einander bedeutet.

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 39) das Trapez die Brechungsfläche eines Prisma, zieht man daselbst die Perpendikel DE, CF, so zerfällt es in die rechtwinkligen Dreiecke ADE, CFB, und in das Rechteck $DEFC$: setzt man also $AE=c$, $BF=d$, $EF=b'$, und $c+b'+d=b$, endlich $DE=CF=a$, so hat man für die Bre-

Digitized by Google

chungsfläche ADE die respektive Festigkeit eines biegsamen Körpers $=\frac{1}{12}k^2a^2c$
für $DEFC$ nach (203) $=\frac{1}{6}ka^2b'$
für CFB $=\frac{1}{12}ka^2d$
dieses zusammengenommen gibt die respektive Festigkeit der trapezförmigen Brechungsfläche $Rl=\frac{1}{12}ka^2(c+4b'+d)=\frac{1}{12}ka^2(b+3b')$.

Ist der Körper aber hart, so findet man eben so

$$Rl=\tfrac{1}{6}ka^2(b+3b').$$

222. Aufgabe. Die Brechungsfläche eines prismatischen Balkens sei ein Trapez, dessen parallele Seiten auf der Brechungsaxe senkrecht stehen, die respektive Festigkeit desselben zu bestimmen.

Auflösung. Ist das Prisma biegsam, so hat man $Rl=\frac{1}{12}kb(a^2+a'^2)(a+a'):a'$, und im Gegenfalle

$$Rl=\tfrac{1}{6}kb(a^2+aa'+a'^2).$$

Beweis. Sei die Brechungsfläche eines Prisma das Trapez $ABCD$ (Fig. 40), AD die Brechungsaxe, man verlängere dessen Seiten BC, AD bis zu ihrem Zusammentreffen im Punkte E, setze $AD=b$, $AB=a$, $CD=a'$, $EA=x$, also $ED=b+x$. Wäre nun das Dreieck ECD die Brechungsebene, so hätte man nach (220) für die Brechungsaxe DE die respektive Festigkeit $R'l=\frac{1}{12}ka'^2(b+x)$, und für die Brechungsebene EAB ergibt sich dieselbe, wenn man in der Formel (220) $Rl=\frac{ka^2x^4}{12b^3}$, a' statt a und $b+x$ statt b setzt, weil auch hier die Faser im obersten Punkte C zuerst reißen muß

$$R''l=\frac{ka'^2x^4}{12(b+x)^3}\text{; demnach ist}$$

$$Rl=R'l-R''l=\tfrac{1}{12}k\left[a'^2(b+x)-\frac{a'^2x^4}{(b+x)^3}\right]$$

Man hat aber wegen der ähnlichen Dreiecke EBA, ECD $b+x:x=a':a$ und $x:b=a:a'-a$, sonach

$$\frac{x}{b+x}=\frac{a}{a'},\quad x=\frac{ab}{a'-a},\quad b+x=\frac{a'b}{a'-a}$$

mit diesen Werthen reduzirt sich der eingeklammerte Ausdruck auf

$$Rl = \tfrac{1}{12}\frac{kb}{a'}\left(\frac{a'^4 - a^4}{a' - a}\right) = \frac{kb}{12a'}(a'^3 + a'^2a + a'a^2 + a^3)$$

woraus sofort der obige Ausdruck folgt.

Im Falle eines nicht biegsamen Körpers ergibt sich für die Festigkeit der Brechungsebene

$$\left.\begin{matrix} ECD \\ EAB \end{matrix}\right\} \text{ die Größe } \left\{\begin{matrix} \tfrac{1}{6}ka^2(b+x) \\ \tfrac{1}{6}ka'^2x \end{matrix}\right.$$

mithin $Rl = \tfrac{1}{6}k[a^2(b+x) - a'^2x] = \tfrac{1}{6}kb(a^2 + aa' + a'^2)$.

223. Aufgabe. Die respektive Festigkeit eines prismatischen Körpers zu bestimmen, wenn die Brechungsfläche ein Dreieck ist, dessen Spitze allein in der Brechungsaxe liegt, und dabei eine der Seiten des Dreiecks auf der Brechungsaxe senkrecht steht.

Auflösung. Sei das Dreieck BCD (Fig. 40) die Brechungsfläche des Prisma, so ist bei derselben Bezeichnung wie vorhin

$$Rl = \tfrac{1}{12}kb(a^2 + aa' + a'^2).$$

Beweis. Verlängert man die Seite BC bis E an die Brechungsaxe und zieht AB auf ED senkrecht, so ist die Festigkeit für die Brechungsebene ECD oder $R'l = \tfrac{1}{12}k(b+x)a'^2$ und die Festigkeit für die Brechungsebene EBD

$$R''l = k\frac{(b+x)a^3}{12a'}, \text{ folglich}$$

$$Rl = R'l - R''l = \frac{k(b+x)}{12}\left(a'^2 - \frac{a^3}{a'}\right) = \frac{k(b+x)a^3}{12a'}(a'^3 - a^3)$$

nun ist $\dfrac{b+x}{a'} = \dfrac{b}{a'-a}$, sonach R wie oben.

224. Folgesatz. Wenn aber das Dreieck ABC (Fig. 41) mit seiner Spitze C wie immer auf der Brechungsaxe DE aufliegt, und man zieht CF zu DE senkrecht, bezeichnet ferner AD mit a, BE mit a', DC mit b, EC mit b', so ist nach §222) für die Brechungsebene $DABC$ die respektive Festigkeit

$$R'l = \frac{k(b+b')}{12a'}(a^3 + a'^3)(a + a')$$

für den Theil BCE ist $R''l = \tfrac{1}{12}kb'a'^2$, und für den Theil ACD ist $R'''l = \tfrac{1}{12}kba^3 : a'$, daher ist die respektive Festigkeit für die

Brechungsebene ACB, $R=R'-R''-R'''$, und

$$Rl=\frac{k}{12a'}[(b+b')(a^2+a'^2)(a+a')-a'^3b'-a^3b]$$

$$=\frac{k}{12a'}(ab'+a'b)(a^2+aa'+a'^2)$$

Setzt man nun $b+b'=B$, und Kürze halber $CF=h$, so hat man wegen $B:b'=a'-a:a'-h$, und $B:b=a'-a:h-a$, sofort

$$ab'=\frac{a(a'-h)B}{a'-a},\ a'b=\frac{a'(h-a)B}{a'-a}$$

demnach $ab'+a'b=Bh$, und

$$Rl=\frac{kBh}{12a'}(a^2+aa'+a'^2).$$

225. Folgesatz 2. Mittelst der vorstehenden Sätze (220 bis 224) ist man im Stande, die respektive Festigkeit prismatischer Körper zu bestimmen, deren Brechungsfläche irgend ein von geraden Linien eingeschlossenes Polygon ist, indem man das Polygon durch Diagonalen, welche vom höchsten Punkte der Brechungsfläche an die einzelnen Spitzen der Figur gezogen werden, in Dreiecke und Trapeze zerfällt, und sodann die respektive Festigkeit einzelner Theile untersucht.

226. Aufgabe. Die Brechungsfläche eines Körpers sei ein Halbkreis, und sein Durchmesser die Brechungsaxe, man sucht dessen respektive Festigkeit.

Auflösung. Es ist, wenn r den Halbmesser des Kreises bezeichnet, $Rl=\frac{1}{8}kr^3\pi$.

Beweis. Sei der Halbkreis ABD (Fig. 42) die Brechungsfläche eines biegsamen cylindrischen Körpers, der Durchmesser $AB=2r$ seine Brechungsaxe, man setze für einen Punkt M, $CP=x$, $PM=y$, so hat man in der Formel 48)

$$Rl=\frac{k}{3q}\int y^3dx,\ y^2=r^2-x^2,\ q=r$$

zu setzen, und man erhält $lR=k\int dx\sqrt{(r^2-x^2)^3}:3r$.

Nun ist nach Int. 157) für $r=\frac{3}{2}$, $a=r^2$, $b=-1$

$$\int dx\sqrt{(r^2-x^2)^3}=\tfrac{1}{4}x\sqrt{(r^2-x^2)^3}+\tfrac{3}{4}r^2\int dx\sqrt{(r^2-x^2)}$$

und nach Int. 431)

Digitized by Google

$\int dx \sqrt{(r^2-x^2)^3} = \frac{1}{4}x\sqrt{(r^2-x^2)} + \frac{1}{8}r^2 \arcsin(x:r)$

durch Verbindung dieser Ausdrücke ergibt sich $\int dx \sqrt{(r^2-x^2)^3}$
$= \frac{1}{4}x(r^2-x^2)\sqrt{(r^2-x^2)} + \frac{3}{8}r^2x\sqrt{(r^2-x^2)} + \frac{3}{8}r^4 \arcsin(x:r)$
oder

I. $\int dx \sqrt{(r^2-x^2)^3} = \frac{1}{8}x(5r^2-2x^2)\sqrt{(r^2-x^2)} + \frac{3}{8}r^4 \arcsin(x:r)$

hiemit wird

II. $Rl = \frac{kx}{24r}(5r^2-2x^2)\sqrt{(r^2-x^2)} + \frac{kr^3}{8} \arcsin \frac{x}{r}$

Für $x=r$ findet man hieraus die Festigkeit eines Körpers, dessen Brechungsfläche ein Kreisquadrant ist

$$Rl = \frac{1}{8}kr^3 . \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{16}kr^3\pi$$

Das Doppelte hievon gibt die Festigkeit für den Halbkreis wie oben.

227. Folgesatz. Für die Brechungsfläche $PMDC$ des Prisma, dessen Abszisse $CP=a$ ist, erhält man aus II. die Festigkeit

$$Rl = \frac{ka}{24r}(5r^2-2a^2)\sqrt{(r^2-a^2)} + \frac{kr^3}{8} \arcsin \frac{a}{r}$$

Setzt man diesen Ausdruck $=C$, so ergibt sich die Festigkeit des halben Kreisabschnittes APM, $x=r$ setzend, $Rl = \frac{1}{16}kr^3\pi - C$.

228. Aufgabe. Die respektive Festigkeit eines biegsamen Prisma zu bestimmen, wenn die Brechungsfläche ein Halbkreis und die Brechungsaxe eine zum Durchmesser parallele Tangente ist.

Auflösung. Es ist $Rl = kr^3(15\pi - 32) : 24$.

Beweis. Für die Abszisse $CP=x$ ist $PM=y=\sqrt{(r^2-x^2)}$, demnach $P'M=z=r-\sqrt{(r^2-x^2)}$, und man findet die respektive Festigkeit für die Brechungsfläche $PCMD$, wenn man von der Festigkeit für die Fläche $PP'DC$ die Festigkeit für die Fläche $P'MD$ abzieht. Nun ist nach Formel 48)

$$Rl = \frac{k}{3q}\int(y^3 - [r-\sqrt{(r^2-x^2)}]^3)dx$$

und hier ist $y=r$, $q=r$, und da

$[r-\sqrt{(r^2-x^2)}]^3 = r^3 - 3r^2\sqrt{(r^2-x^2)} + 3r(r^2-x^2) - \sqrt{(r^2-x^2)^3}$,

so folgt $r^3 - [r-\sqrt{(r^2-x^2)}]^3 = -3r^3 + 3rx^2 + (4r^2-x^2)\sqrt{(r^2-x^2)}$

hiemit wird

Digitized by Google

$$Rl=\frac{k}{3r}\int[-3r^3+3rx^2+(4r^2-x^2)\sqrt{(r^2-x^2)}]dx$$

$$=\frac{k}{3r}(-3r^3x+rx^3)+\frac{k}{3r}\int(4r^2-x^2)\sqrt{(r^2-x^2)}dx$$

Es ist aber $(4r^2-x^2)\sqrt{(r^2-x^2)}=\sqrt{(r^2-x^2)^3}+3r^2\sqrt{(r^2-x^2)}$ und nach Gleichung I. (227) ist

$$\int dx\sqrt{(r^2-x^2)^3}=\tfrac{1}{8}x(5r^2-2x^2)\sqrt{(r^2-x^2)}+\tfrac{3}{8}r^4\arcsin(x:r)$$

ferner nach Int. 134) hat man

$$3r^2\int dx\sqrt{(r^2-x^2)}=\tfrac{3}{2}r^2x\sqrt{(r^2-x^2)}+\tfrac{3}{2}r^4\arcsin(x:r)$$

hieraus folgt

III. $$\int(4r^2-x^2)\sqrt{(r^2-x^2)}dx=\tfrac{1}{8}x(17r^2-2x^2)\sqrt{(r^2-x^2)}+\tfrac{15}{8}r^4\arcsin(x:r).$$

mithin ist die respektive Festigkeit für die Fläche *PCMD*

IV. $$Rl=\frac{k}{3r}[-3r^3x+rx^3+\tfrac{1}{8}x(17r^2-2x^2)\sqrt{(r^2-x^2)}+\tfrac{15}{8}r^4\arcsin(x:r).$$

Für $x=r$ ergibt sich hieraus die Festigkeit des Quadranten

$$Rl=\tfrac{1}{4}k(-2r^3+\tfrac{15}{16}\pi r^3)=kr^3(15\pi-32):48$$

und das Doppelte hievon gibt die Festigkeit des Halbkreises wie oben.

229. *Folgesatz.* Die respektive Festigkeit für die Brechungsfläche *ACD* hinsichtlich der Brechungsaxe *DT* ist $kr^3(15\pi-32):48$ für die Brechungsebene *AA'DC* aber, welche ein Quadrat ist, hat man $\frac{1}{4}kr^3$, demnach ist die respektive Festigkeit für die Brechungsfläche *AA'D*

$$Rl=\frac{kr^3}{3}-\frac{kr^3}{48}(15\pi-32)=kr^3\left(\frac{5\pi}{16}+1\right)$$

230. *Folgesatz* 3. Zieht man aber von der respektiven Festigkeit für die Brechungsfläche *PMDC* die respektive Festigkeit für das Dreieck *PMC* ab, so erhält man die Festigkeit des Kreisausschnittes *MCD*: wird diese doppelt genommen, so ergibt sich die respektive Festigkeit eines Kreissektors *MCM'*, dessen Brechungsaxe eine Tangente des mittleren Punktes *D*-seines Bogens ist.

231. *Aufgabe.* Die Brechungsfläche eines biegsamen Prisma

Digitized by Google

sei ein Kreis, und die Tangente des Kreises die Brechungsaxe, man sucht die respektive Festigkeit.

Auflösung. Diese ist $Rl = \frac{5}{6}kr^3\pi$.

Beweis. Sei AT (Fig. 43) die Tangente eines Punktes A am Umfange des gegebenen Kreises die Brechungsaxe, man ziehe den Durchmesser DE mit derselben parallel, und setze

$AP = CP = x$, $PM = PM' = y$, $P'M = y'$, $P'M' = z$, so ist $z = r - y$, $y' = r + y$, und $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$. Die Festigkeit für die Brechungsfläche $AM'MF$ ist der Unterschied der Festigkeiten für die Flächen $AP'MF$ und $AP'M'$; setzt man also in der Formel 48) $Rl = kf y^3 dx : 3q$ einmal y', ein zweitesmal z statt y, so ergibt sich die Festigkeit für die Brechungsfläche $AM'MF$ oder

$Rl = kf(y'^3 - z^3)dx : 3q = kf[(r+y)^3 - (r-y)^3]dx : 3q$. Aber es ist $(r+y)^3 - (r-y)^3 = 6r^2y + 2y^3 = (6r^2 + 2y^2)y = [6r^2 + 2(r^2 - x^2)]\sqrt{(r^2 - x^2)} = (8r^2 - 2x^2)\sqrt{(r^2 - x^2)}$, hiemit wird

$Rl = \frac{2k}{3q} f(4r^2 - x^2)\sqrt{(r^2 - x^2)}dx$, und nach dem Ausdrucke III. (228)

$$= \frac{2k}{3q}\left[\tfrac{1}{6}x(17r^2 - 2x^2)\sqrt{(r^2 - x^2)} + \tfrac{15}{8}r^4 \arcsin\frac{x}{r}\right]$$

Setzt man hier $q = 2r$, und $x = r$, so ergibt sich die Festigkeit für die Brechungsfläche eines Halbkreises ADF, $Rl = \frac{5}{16}kr^3\pi$, und für den ganzen Kreis $Rl = \frac{5}{8}kr^3\pi$.

232. Folgesatz. Bei einem andern Cylinder, dessen Querschnitt ein Kreis mit dem Halbmesser r' wäre, hätte man $R'l = \frac{5}{8}kr'^3\pi$, somit $R : R' = r^3 : r'^3$, oder die respektiven Festigkeiten zweier Cylinder verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

233. Aufgabe. Die respektive Festigkeit einer cylindrischen Röhre zu bestimmen.

Auflösung. Heißt F der Inhalt ihres Querschnittes, r und ϱ die Halbmesser der zwei konzentrischen Kreise, welche den kreisförmigen Ring begrenzen, so hat man $Rl = kF(5r^2 + \varrho^2) : 8r$.

Beweis. Die konzentrischen Kreise $ADFE$, $adfe$ (Fig. 43) mögen den Durchschnitt einer cylindrischen Röhre mit der Brechungsebene vorstellen: man setze $AC = r$, $aC = \varrho$, $AP' = x$,

Digitized by Google

$P'm'=z, Pm=y, P'm=y'$, so ist $z=r-y, y'=r+y, y=\sqrt{(\varrho^2-x^2)}$. Man bezeichne die respektive Festigkeit der Röhre mit R, des festen Cylinders für die Brechungsfläche $ADFE$ mit R', und für die Brechungsfläche $adfe$ mit R'' bei der gemeinschaftlichen Brechungsaxe AT, so hat man $Rl=(R'-R'')l$ und nach (231) $R'l=\frac{5}{8}kr^3\pi$. Um noch $R''l$ zu bestimmen, bemerke man, daß die Festigkeit des Theils $am'mf$ der Unterschied sei zwischen der Festigkeit des Stückes $AP'mf$ und $AP'm'a$, daß sonach in der Formel 48) $Rl=k\int y^3dx:3q$ die Integration zwischen den Grenzen $y=y'$ und $y=z$ zu richten ist. Nun ist y'^3-z^3
$=(r+y)^3-(r-y)^3=6r^2y+2y^3=2[3r^2\sqrt{(\varrho^2-x^2)}+\sqrt{(\varrho^2-x^2)^3}]$
und also

$$R''l=\frac{2k}{3q}[3r^2\int dx\sqrt{(\varrho^2-x^2)}+\int dx\sqrt{(\varrho^2-x^2)^3}]$$

Man hat aber nach Int. 134)

$$\int dx\sqrt{(\varrho^2-x^2)}=\tfrac{1}{2}x\sqrt{(\varrho^2-x^2)}+\tfrac{1}{2}\varrho^2\arcsin(x:\varrho)$$

und nach dem Ausdrucke I. in (226)

$$\int dx\sqrt{(\varrho^2-x^2)^3}=\tfrac{1}{8}x(5\varrho^2-2x^2)\sqrt{(\varrho^2-x^2)}+\tfrac{3}{8}\varrho^4\arcsin(x:\varrho)$$

Hiedurch ergibt sich

$$R''l=\frac{k}{q}\left[r^2x\sqrt{(\varrho^2-x^2)}+r^2\varrho^2\arcsin\frac{x}{\varrho}\right]$$
$$+\frac{k}{12q}\left[x(5\varrho^2-2x^2)\sqrt{(\varrho^2-x^2)}+3\varrho^4\arcsin\frac{x}{\varrho}\right]\text{ d. i.}$$

$$R''l=\frac{k}{12q}\left[x(12r^2+5\varrho^2-2x^2)\sqrt{(\varrho^2-x^2)}+3\varrho^2(4r^2+\varrho^2)\arcsin\frac{x}{\varrho}\right]$$

Für $x=\varrho$ erhält man hieraus $q=2r$ setzend, für den Halbkreis adf, $R''l=\frac{1}{16}k(4r^2+\varrho^2)\varrho^2\pi:r$, dieß gibt für den ganzen Kreis $R''l=\frac{1}{8}k(4r^2+\varrho^2)\varrho^2\pi:r$. Man hat also

$$Rl=\tfrac{5}{8}kr^3\pi-\tfrac{1}{8}k(4r^2+\varrho^2)\varrho^2\pi:r$$
$$=\tfrac{1}{8}k\pi(5r^4-4r^2\varrho^2-\varrho^4):r=\tfrac{1}{8}k\pi(5r^2+\varrho^2)(r^2-\varrho^2):r$$

Heißt nun F die Fläche des Kreisringes, also $F=\pi(r^2-\varrho^2)$, so wird $Rl=\frac{1}{8}kF(5r^2+\varrho^2):r$.

234. Folgesatz. Ein voller Cylinder vom gleichen Querschnitt mit dem Querschnitte der Röhre besitzt eine Festigkeit $\mathfrak{R}l=\frac{5}{8}k\pi\sqrt{(r^2-\varrho^2)^3}=\frac{5}{8}kF\sqrt{(r^2-\varrho^2)}$, mithin wird

Digitized by Google

$R : \mathfrak{R} = 5r^2 + \varrho^2 : 5r\sqrt{(r^2 - \varrho^2)}$, und man sieht, daß eine Röhre von gleichem Gewichte und Querschnitte mit einem vollen Cylinder desto fester ist, je kleiner der Unterschied der Halbmesser in den konzentrischen Kreisen der Röhre ist. Wäre z. B. $\varrho = 99r : 100$, so hätte man $R = 8{,}5\mathfrak{R}$. Die Natur, welche den Knochen bei Menschen und Thieren, den Halmen im Getreide und den Stengeln der Blumen und Pflanzen eine röhrenförmige Gestalt verlieh, hat zugleich dafür gesorgt, daß ihre Gebilde die größtmögliche Festigkeit erhalten.

235. Aufgabe. Die Brechungsfläche eines cylindrischen Körpers sei eine Ellipse, durch deren Scheitel die Brechungsaxe senkrecht auf der großen Axe der Ellipse hindurchgeht, die respektive Festigkeit des Körpers zu bestimmen.

Auflösung. Sind a, b die beiden Halbaxen der Ellipse, so hat man $Rl = {}^5/_8 ka^2 b\pi$.

Beweis. Sei die Ellipse $ADBC$ (Fig. 44) die Brechungsfläche des cylindrischen Körpers, die Tangente AT dessen Brechungsaxe. Führt man in dem Abstande $CP = x$ die Gerade MP' senkrecht auf AT, so ist die Festigkeit für die Brechungsfläche $MBAM'$ der Unterschied der Festigkeiten für die Brechungsflächen $MBAP'$ und $AP'M'$. Heißt also $PM = y$, $P'M = y'$, $P'M' = z$, so hat man in Formel 48) das Integrale zwischen den Grenzen $y = y'$ und $y = z$ zu nehmen. Es ist aber, weil hier die Abszissen auf der kleinen Axe der Ellipse genommen werden,
$y = a\sqrt{(b^2 - x^2)} : b$, $y' = a + y$, $z = a - y$, sonach
$y'^3 - z^3 = (a+y)^3 - (a-y)^3 = 6a^2y + 2y^3$, und weil nach Int. 134) und (I. 226) $\int dx\sqrt{(b^2 - x^2)} = {}^1/_2 x\sqrt{(b^2 - x^2)} + {}^1/_2 b^2 \arcsin(x : b)$
$\int dx\sqrt{(b^2 - x^2)^3} = {}^1/_8 x(5b^2 - 2x^2)\sqrt{(b^2 - x^2)} + {}^3/_8 b^4 \arcsin(x : b)$
so erhält man bei Substitution dieser Werthe

$$Rl = \frac{k}{3q}\left[\frac{17a^3b^2x - 2a^3x^3}{4b^3}\sqrt{(b^2 - x^2)} + {}^{15}/_4 a^3 b \arcsin(x : b)\right]$$

Für die halbe Ellipse ist $x = b$, und $q = 2a$, mithin
$Rl = {}^5/_{16} ka^2 b\pi$, das Doppelte hievon gibt Rl wie oben.

236. Folgesatz. Vertauscht man hier a mit b, so ergibt sich die Festigkeit des cylindrischen Körpers, wenn derselbe mit seiner

Digitized by Google

kleinen Axe auf der Brechungsaxe aufliegt, $Rl = \frac{5}{8} kab^2\pi$, und für $a = b$ findet man die Festigkeit eines Kreiscylinders vom Halbmesser a, $Rl = \frac{5}{8} ka^3\pi$ wie oben (231).

237. Erklärung. Ein Körper, dessen jeder Querschnitt als Brechungsfläche genommen, denselben Widerstand der Kraft, welche ihn zu zerbrechen strebt, entgegenstellt, heißt ein Körper vom gleichen Widerstande.

238. Lehrsatz. Wenn die Querschnitte eines Körpers vom gleichen Widerstande Rechtecke sind, deren Höhen durchaus gleich sind, so hat derselbe die Gestalt eines dreiseitigen Keiles; wofern aber die Breiten unveränderlich sein sollen, so ist der Körper ein paraboliſcher Cylinder mit vertikalen Grundflächen.

Beweis. Da in beiden Fällen die Querschnitte, welche senkrecht auf die Länge des Körpers geführt werden, Rechtecke sind; so hat man nach (203), wenn die veränderliche Länge des Körpers mit z, und im ersten Falle die gleichfalls veränderliche Breite mit x, im andern Falle aber die veränderliche Höhe mit y bezeichnet wird, sofort $R = \nu k x h^2$ im ersten, und $R = \nu k b y^2$ im zweiten Falle, woraus sogleich erhellet, daß im ersten Falle R ungeändert bleibt sobald $x : z$ es ist, d. i. wenn die Grundfläche ABC (Fig. 45) des keilförmigen Körpers ein Dreieck ist, und im zweiten Falle, wenn $y^2 : z$ konstant ist, oder die vertikalen Grundflächen ABC, $A'B'C'$ (Fig. 46) Parabeln vorstellen.

239. Aufgabe. Wenn die Querschnitte eines Körpers von gleichem Widerstande Kreise sind, seine Gestalt zu verzeichnen.

Auflösung. Sei ACD (Fig. 47) der Längendurchschnitt des Körpers vom gleichen Widerstande, dessen sämmtliche Querschnitte Kreise sind, die ihre Mittelpunkte auf der gegebenen Geraden $AB = l$ haben. Man theile AB bei E und F in drei gleiche Theile, sodann halbire man AE in G, und AG im Punkte H. In diesen Theilungspunkten errichte man die Ordinaten HH', GG', EE', u. s. f. senkrecht auf AB, deren Größe aus der Gleichung $y = \sqrt[3]{\frac{8Rz}{5k\pi}}$ sich ergibt, wo $y = PM$, $z = BP$ ist, so begrenzt das durch die Umdrehung der Kurve AMC um die Axe AB erzeugte Konoid einen Körper von gleichem Widerstande.

Digitized by Google

Beweis. Da hier die Querschnitte durchgängig Kreise sein sollen, so ist für diese Brechungsfläche die Festigkeit nach (231) $Rl=\frac{1}{4}\pi kr^3$; setzt man also die veränderliche Länge $l=x$ und den gleichfalls veränderlichen Halbmesser $r=y$, so wird $Rx=\frac{1}{4}\pi ky^3$, woraus y sich wie oben ergibt.

240. **Lehrsatz.** Eine beiderseits gestützte eiserne Schiene erhält in jedem Querschnitte dieselbe Festigkeit, wenn ihre untere Fläche durch einen elliptischen Cylinder begrenzt ist.

Beweis. Sei ACB (Fig. 48) eine in den Punkten A und B gestützte Schiene: auf der Entfernung $CP=x$ von der Mitte C befinde sich die Last Q, so ist das Tragungsvermögen dieses Körpers im Punkte P nach (207) $Q=\frac{\nu lbh^2}{a(l-a)}=\frac{4\nu lbh^2}{l^2-4x^2}$, indem man statt a hier $\frac{1}{2}l-x$ und statt $l-a$ die Größe $\frac{1}{2}l+x$ setzt. Setzen wir nun bei dem zu bestimmenden Körper die Breite b konstant, und die veränderliche Höhe $PM=y$, so gibt die vorstehende Gleichung

$$\text{I.}\quad y^2=Q.\frac{l^2-4x^2}{4\nu bl}.$$

Für $x=0$ ergibt sich hieraus die Höhe $CD=c$ in ihrer Mitte

$$\text{II}\quad c^2=Q.\frac{l^2}{4\nu bl}$$

und durch die Division dieser Gleichungen findet man

$$\frac{y^2}{c^2}=\frac{l^2-4x^2}{l^2},\text{ oder }y^2=\frac{4c^2}{l^2}(\tfrac{1}{4}l^2-x^2)$$

welcher Ausdruck zeigt, daß die untere Begrenzungslinie des Körpers $AMDB$ eine Ellipse mit den Halbaxen $\frac{1}{2}l$ und c sei.

241. **Folgesatz.** Da in der Anwendung die Schiene bei A und B schon eine gewisse Höhe $AA'=BB'=h$ (Fig. 49) besitzen muß, um einer auf ihr bewegten Last zu widerstehen, so findet man für $CP=x$, $PM=h+y$ und nach I.

$$\text{III.}\quad (h+y)^2=Q.\frac{l^2-4x^2}{4\nu bl}\text{ und nach II. }c^2=R.\frac{l^2}{4\nu bl},\text{ somit}$$

$$\left(\frac{h+y}{c}\right)^2=\frac{l^2-4x^2}{l^2},\text{ oder }h+y=\frac{2c}{l}\sqrt{(\tfrac{1}{4}l^2-x)}.$$

Für $y=0$ erhält man

Digitized by Google

$$h=\frac{2c}{l}\sqrt{(\tfrac{1}{4}l^2-x^2)}, \text{ und } x=\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}$$

dieser Werth gibt die Entfernung $x=CE$ an, bei welcher die bedingte Höhe h anfängt, und bis zu den beiden Unterlagspunkten unverändert beibehalten werden muß.

242. Aufgabe. Die respektive Festigkeit und die Lage der Brechungsfläche in einem Kreiskegel zu bestimmen.

Auflösung. Setzt man in einem Kreiskegel ACB (Fig. 50), welcher mit seiner Grundfläche AB in einer vertikalen Wand befestiget, und im Punkte F von einer Last Q, die ihn zu zerbrechen strebt, angegriffen wird, die Halbmesser $AD=R$, $EF=r$, und $DF=h$, $FC=l$, so erhält man die Festigkeit

$$Q=\frac{135k\pi r^3(R-r)}{32h}$$

und den Abstand $PF=x$ der Brechungsfläche Mm oder $x=\frac{1}{2}l$.

Beweis. Es sei Mm ein Kreis vom Halbmesser $PM=y$ die Brechungsfläche des Kegels, so ist $y=(l+x)r:l$, und $l=rh:(R-r)$ mithin nach (231)

$$Qx=\tfrac{5}{8}k\pi y^3=\frac{5k\pi(l+x)^3r^3}{8l^3}, \text{ also } Q=\frac{5k\pi(l+x)^3r^3}{8l^3x}$$

Der Balken bricht offenbar dort, wo die kleinste Last erfordert wird; setzt man also $d[(l+x)^3:x]=0$, oder $3x(l+x)^2-(l+x)^3=0$ so findet man $x=\frac{1}{2}l$ und hiemit ergibt sich

$$Q=\frac{135k\pi r^3}{32l}=\frac{135k\pi r^3(R-r)}{32h}.$$

243. Anmerkung. Hiemit stimmt die gemeine Beobachtung beim Windbruche der Bäume recht gut zusammen. Nadelhölzer, deren Stämme nahe die Gestalt eines Kegels haben, brechen in der Gegend der tiefsten Aeste immer auf einer größeren Höhe vom Boden. Laubholzbäume aber, deren Stämme sich mehr der cylindrischen Form nähern, brechen tiefer an der Wurzel, oder werden durch den Wind sehr häufig sammt der Wurzel aus der Erde gerissen.

Digitized by Google

5. Respektive Festigkeit gebogener Balken.

244. Erklärung. Wird ein prismatischer Balken an einem oder auch an beiden Enden horizontal befestiget, so wird derselbe bei einer hinreichend großen Länge schon durch sein eigenes Gewicht, und um so mehr, wenn er mit einem andern Gewichte belastet ist, eine Krümmung annehmen, wodurch einige Fasern desselben ausgedehnt, andere zusammengedrückt werden. Die Krümmung, welche hiebei die neutrale Schicht, die weder ausgedehnt noch zusammengedrückt wird, erhält, nennt man die elastische Kurve. Ihr Durchschnitt mit der Vertikalen durch den Befestigungspunkt heißt der Scheitel. Zieht man durch den tiefsten Punkt der Kurve eine Gerade horizontal, bis sie die durch den Scheitel geführte vertikale Linie schneidet, so heißt das Stück der letzteren, zwischen dem Scheitel und jenem Durchschnittspunkte der Pfeil der Kurve.

245. Erklärung. Wenn zwei mit einem Ende befestigte Prismen von derselben Form und mit gleichen Abmessungen durch Aufhängung eines und desselben Gewichtes gekrümmt werden, ohne die Eigenschaft zu verlieren, bei Entfernung des Gewichtes die vorige Gestalt wieder anzunehmen, so sagt man, jenes der beiden Prismen ist elastischer, deren Krümmung größer ist. Es ist sonach die Elastizität zweierlei, eine absolute und eine relative. Die erstere bezieht sich auf die Materie, aus welcher das Prisma gefertigt ist, ohne Rücksicht auf die Gestalt des Körpers, die andere ist die einem Körper von gegebener Gestalt und Größe inwohnende Elastizität. So spricht man von der absoluten Elastizität des Elfenbeins, von der relativen Elastizität einer zweizölligen elfenbeinernen Kugel u. s. f.

246. Lehrsatz. Die relative Elastizität einer elastischen Ruthe ist in jedem ihrer Punkte gleich der absoluten Elastizität getheilt durch den Krümmungshalbmesser dieses Punktes.

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 51) die in der Wand NN' befestigte Ruthe, EF ihre neutrale Schicht, sie werde durch ein Gewicht Q, welches bei D angehängt ist, so gebogen, daß sie in die Lage $AB'D'C$ versetzt wird. Es sei dann $GIKL$ ein Theil von dem Längendurchschnitte der Ruthe, $M'L'=s$ dessen Länge,

$GI=h$ die Höhe, und h die Breite, zieht man durch den Punkt L' der neutralen Schicht die Gerade KL zu GI parallel, so ist $HL=\alpha$ die Verlängerung der Faser in G, und Kk die Verkürzung der Faser in I, während die Faser $M'L'$ durch die Biegung weder ausgedehnt noch zusammengedrückt wird. Heißt nun k die Kraft, welche die Verlängerung α in der Faser von der Länge s erzeugt, so hat man $\alpha=mks$, wo m einen durch die Erfahrung bestimmten Koeffizienten bedeutet, dieß gibt $k=\alpha:ms$. Da nun nach (203) bei einem vierkantigen Balken die respektive Festigkeit $Rl=\frac{1}{3}kbh^2$ ist, hieraus für einen Hebelsarm $PF'=x$ der Last Q $Qx=\frac{1}{3}kbh^2=\alpha bh^2:3ms$. Es ist aber, wenn man die auf $M'L'$ senkrechten Geraden GI, Hh verlängert, bis sie sich in O schneiden, $L'O=r$ der Krümmungshalbmesser der elastischen Kurve, und man hat $OL':M'L'=HL':HL$, oder weil $HL'=nh$ ist, wo n wie in (203) einen Bruch bedeutet, so wird $r:s=nh:\alpha$, dieß gibt $\frac{\alpha}{s}=\frac{nh}{r}$, und daher $Qx=\frac{nbh^3}{3mr}=\frac{n}{3m}\cdot\frac{bh^3}{r}$ oder 49) $rQx=e^2bh^3$ der Koeffizient e^2 hängt lediglich von der Materie der Ruthe ab, und ist, was wir absolute Elastizität nennen. Für einen Körper, dessen Abmessungen b, h zur Einheit genommen werden, muß das Moment Qx der herabhängenden Last, der relativen Elastizität das Gleichgewicht halten, heißt also diese E^2, so folgt aus der letzten Gleichung 50) $E^2=e^2;r.=Qx$

247. Aufgabe. Die Gleichung der elastischen Linie zu finden, wenn die elastische Ruthe gewichtlos und an einem Ende befestigt am anderen Ende aber durch ein Gewicht gebogen wird.

Auflösung. Weicht die Ruthe nur wenig von ihrer anfänglichen Lage ab, so hat man $y=Q(3a^2x-x^3):6e^2$, wenn a die Länge der Ruthe, Q das angehängte Gewicht und e^2 die absolute Elastizität bedeutet.

Beweis. Die in der Wand NN' eingeklemmte Ruthe EF (Fig. 52) werde durch das in F angehängte Gewicht Q in die Lage EF' versetzt. Man ziehe durch den Punkt F' die Abszissenaxe BF' horizontal, und setze $F'P=x$, $PM=y$, die Länge der Ruthe $EF=F'B=a$ und den Pfeil $EB=\delta$, ferner ziehe man die Tangente MT, welche mit der verlängerten Abszissenaxe BF' einen

Winkel $MTP=v$ einschließt. Nach (A. 1212) ist der Krümmungshalbmesser

$$r=-\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dxd^2y}=\frac{-ds^3}{dxd^2y}$$

weicht nun die gebogene Ruthe EF' sehr wenig von ihrer anfänglichen Lage EF ab, eine Voraussetzung, welche in der Folge stillschweigend gemacht wird, so läßt sich nahe $ds=dx$ setzen, und man erhält

$$r=-\frac{dx^3}{dxd^2y}=-\frac{dx^2}{dy}.$$

Substituirt man diesen Werth von r in die Formel 50), so ergibt sich $\frac{e^2d^2y}{dx}=-xQdx$, dessen Integrale $\frac{e^2dy}{dx}=-\frac{1}{2}Qx^2+0$ ist. Zur Bestimmung der Konstante C dient die Bedingung, daß nach (A. 1162) $dy:dx=\operatorname{tg}v$, und $v=0$ für $x=a$ ist, man hat sonach $C=\frac{1}{2}Qa^2$, sogleich $\frac{e^2dy}{dx}=\frac{1}{2}Q(a^2-x^2)$ oder $e^2dy=\frac{1}{2}Q(a^2-x^2)dx$.

Wird abermals integrirt, so findet man

$e^2y=\frac{1}{2}Q(a^2x-\frac{1}{3}x^3)$, und 51) $y=\frac{Q}{6e^2}(3a^2x-x^3)$

248. **Folgesatz.** Die gewichtslose, mit einem Ende befestigte und am anderen Ende belastete elastische Ruthe bildet sonach näherungsweise eine Linie der dritten Ordnung. Ihre größte Ordinate oder den Pfeil findet man aus Formel 51) $x=a$, $y=\delta$ setzend, 52) $\delta=a^3Q:3e^2$, und weil nach Formel 50) $e^2=Qrx$ ist, so wird hiedurch

53) $\delta=\frac{a^3}{3rx}$, und somit 54) $r=\frac{a^3}{3\delta x}$

Dieser Ausdruck gibt zu erkennen, daß im Punkte F', wo $x=0$, $r=\infty$ ist, und daß mit zunehmenden Werthen von x die Werthe von r abnehmen, d. i. die gebogene Ruthe ist in dem Angriffspunkte der Last geradlinig, ihre Krümmung nimmt von Punkt zu Punkt zu, und ist im Scheitel der Kurve am größten.

Der Krümmungshalbmesser im Scheitel folgt aus Formel 54) für $x=a$, 55) $r=a^2:3\delta$.

249. Aufgabe. Die Gleichung der elastischen Linie zu finden.

Digitized by Google

wenn die elastische Ruthe gleichförmig belastet und mit einem Ende befestiget wird.

Auflösung. Man hat für kleine Biegungen der elastischen Ruthe, deren Gewicht für die Längeneinheit $=g$ ist, die Gleichung

$$56)\quad y=\frac{g}{24e^2}(4a^2x-x^4).$$

Beweis. Da g das Gewicht der Längeneinheit der Ruthe ist, so folgt ag als Gewicht der ganzen Ruthe und gx als Gewicht desjenigen Theils, welcher zur Abszisse x gehört, indem man hier, wie vorhin (247) die Bogenlänge $F'M$ der zugehörigen Abszisse PF' gleich setzt. Da der Schwerpunkt des Bogens $F'M$ im Abstande $\frac{1}{2}x$ liegt, so ist das Moment dieses Bogens $\frac{1}{2}x.gx=\frac{1}{2}gx^2$, und daher nach der Formel 50) hat man 57) $e^2:r=\frac{1}{2}gx^2$. Setzt man hier, wie (247) $r=-dx^2:d^2y$, und substituirt diesen Werth statt r in der Formel 57), so folgt

$\frac{e^2d^2y}{dx}=-\frac{1}{2}gx^2dx$, welches integrirt $\frac{e^2dy}{dx}=-\frac{1}{6}gx^3+C$, liefert, und da für $x=a$, $v=0$ wird, so ergibt sich vollständig

$$\frac{e^2dy}{dx}=\tfrac{1}{6}g(a^3-x^3)\quad\text{und}\quad e^2dy=\tfrac{1}{6}g(a^3-x^3)dx.$$

Eine zweite Integration liefert sofort
$e^2y=\frac{1}{6}(a^3x-\frac{1}{4}x^4)$, oder y wie oben Formel 56).

250. Folgesatz. Für $x=a$ wird $y=\delta$, demnach
58) $\delta=a^4g:8e^2$. Bezeichnet man das Gewicht der ganzen Ruthe mit Q, also $Q=ag$, so folgt der Pfeil der gleichförmig belasteten Ruthe

$$59)\quad \delta=\frac{a^3Q}{8e^2},$$

während nach Formel 52) bei der gewichtslosen mit dem nämlichen Gewichte Q an ihrem Ende belasteten Ruthe der Pfeil, der nun δ' heißen mag, $\delta'=a^3Q:3e^2$ war, d. i. die größte Biegung im Scheitel der ersteren Ruthe ist nur $\frac{3}{8}$ der Biegung der anderen.

251. Folgesatz 2. Wollte man am Ende F' einer gewichtslosen Ruthe ein Gewicht Q' anhängen, welches die Ruthe im Scheitel E eben so krümmt, als ob ein Gewicht Q gleichförmig

Digitized by Google

an derselben vertheilt wäre, so muß in beiden Fällen der Krümmungshalbmesser des Scheitels denselben Werth erhalten. Nun ist derselbe bei der gleichförmig belasteten Ruthe nach Formel 57)

$$r=\frac{2e^2}{gx^2}, \text{ also für } x=a \quad 60)\ r=\frac{2e^2}{a^2g}=\frac{2e^2}{aQ}$$

weil $Q=ag$ ist, und bei der gewichtslosen mit dem Gewichte Q' an ihrem Ende belasteten Ruthe nach Formel 50), wenn man Q mit Q' vertauscht, und $x=a$ setzt, $r=e^2:aQ'$. Dieß gibt $2e^2:aQ=e^2:aQ'$, folglich $Q'=2Q$, d. i. wenn eine am freien Ende eines mit dem anderen Ende befestigten Balkens aufgehängte Last in demselben eine bestimmte Biegung bewirkt, so gehört dazu die doppelte Last, wenn die letztere gleichförmig nach der Länge des Balkens vertheilt ist, um ihm dieselbe Biegung zu ertheilen.

252. Folgesatz. 3. Den Krümmungshalbmesser der gleichförmig belasteten Ruthe zu finden, hat man nach Formel 58)

$e^2=\frac{a^4g}{8\delta}$, und nach Formel 57) $r=\frac{2e^2}{gx^2}$, dieß gibt

61) $r=\frac{a^4}{4\delta x^2}$, und im Scheitel, wo $x=a$ ist, $r=a^2:4\delta$. Mit diesem Werthe von r ergibt sich aus Formel 49), wenn man dort $Q=ag$, $x=a$ setzt

$$62)\ e^2=a^4g:4b\delta h^3.$$

253. Anmerkung. Man kann also die absolute Elastizität durch Versuche mit Balken von gegebenen Abmessungen a, b, h, δ bestimmen, indem man dieselben einerseits befestiget, und nachdem sie durch ihr eigenes Gewicht sich gebogen haben, die beobachteten Werthe dieser Größen in Formel 62) substituirt. Aus den Eytelwein'schen Versuchen findet man im Mittel für preußische Zolle und Berliner Handelspfunde, folgende Ergebnisse, die zugleich in Wiener Maße übertragen wurden.

	Preuß.	Wiener Maße	
Kiefernholz	$e^2=157315$	132309	$\log e^2=5.1215903$
Sommereichen	197969	166501	5.2214174
Steineichen	198611	167041	5.2228235

Digitized by Google

	Preuß.	Wiener Maße	
Rothtannen	$e^2=110811$	93197	$\log e^2=4.9694031$
Weißtannen	161486	135816	5.1329550
Rothbuchen	192727	162092	5.2097634
Weißbuchen	156754	131837	5.1200398
Erlenholz	159820	134416	5.1284513

254. Aufgabe. Die krumme Linie einer an beiden Enden befestigten, durch ihr eigenes Gewicht gebogenen elastischen Ruthe zu finden.

Auflösung. Sei $AB=c$ (Fig. 53) die Länge der Ruthe, welche gleichförmig belastet, nach der Kurve AMB gebogen wird, man setze für einen Punkt M der Kurve $AP=x$, $PM=y$, so hat man 63) $y=\frac{g}{24e^2}(x^4-2cx^3+c^3x)$ die Gleichung der elastischen Kurve.

Beweis. Da hier nur eine geringe Biegung vorausgesetzt wird, so hat man, wenn g das Gewicht der Längeneinheit bedeutet, das Gewicht des Bogens $AM=gx$, und das Gewicht der ganzen Ruthe $AMB=gc$. Die Stützen bei A und B werden jede mit dem Gewichte der halben Ruthe gedrückt, und man kann diese entfernen, sobald man an ihrer Stelle eine Kraft $Q=\frac{1}{2}gc$ vertikal aufwärts anbringt, ohne das Gleichgewicht zu stören. Nun ist das Gewicht des Bogens $MDB=(c-x)g$, und dessen Moment in Beziehung auf den Punkt M gleich $\frac{1}{2}(c-x)^2g$, ferner ist das Moment der Kraft im Punkte B gleich $\frac{1}{2}c(c-x)g$, demnach hat man, weil die Richtungen dieser Kräfte entgegengesetzt sind, zur Summe der Momente $\frac{1}{2}c(c-x)g-\frac{1}{2}(c-x)^2g=\frac{1}{2}x(c-x)g$ welcher die relative Elastizität der Ruthe im Punkte M das Gleichgewicht hält, d. i. man hat $\frac{e^2}{r}=\frac{e^2d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2}x(c-x)g$, und wenn man diesen Ausdruck mit dx multiplicirt, und sodann integrirt, folgt

$\frac{e^2dy}{dx}=(\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}cx^2)g+C$. Da für $x=c$, $\frac{dy}{dx}=tgv$ wird, so

Digitized by Google

ist $C=e^2 tgv-\frac{1}{6}c^3g+\frac{1}{4}c^3g=e^2 tgv+2c^3g:24$, daher, wenn durchgängig mit $24dx$ multiplizirt wird, folgt

$$24e^2dy=2(2x^3-3cx^2+c^3)gdx+24e^2 tgvdx$$

wird nochmals integrirt, so erhält man

$$24e^2y=(x^4-2cx^3+2c^3x)g+24e^2xtgv,$$

wo keine Konstante hinzutritt, weil offenbar x mit y verschwindet. Um noch die Größe tgv zu eliminiren, setze man $x=c$, wodurch $y=0$ wird, und man erhält $24e^2tgv=-c^3g$, und hiemit wird die letzte Gleichung $24e^2y=(x^4-2cx^3+c^3x)g$ wie oben.

255. Folgesatz. Ist die Ordinate in der Mitte $CD=\delta$, so hat man für $x=\frac{1}{2}c$, $y=\delta$, demnach

$$24e^2\delta=\frac{5c^4g}{16}, \text{ oder } 64)\ 24e^2=\frac{5c^4g}{16\delta}$$

und hiefür verwandelt sich die Formel 63) in

$$y=\frac{16\delta}{5c^4}(x^4-2cx^3+c^3x).$$

Setzt man in diesem Ausdrucke $c-x$ statt x, so erhält man die zur Abszisse $c-x$ zugehörige Ordinate y'

$$y'=\frac{16\delta}{5c^4}(x^4-2cx^3+c^3x)=y,$$

d. i. die Kurve AMB ist hinsichtlich der durch ihre Mitte gezogenen Axe CD symmetrisch gestellt.

256. Folgesatz. 2. Den Pfeil $CD=\delta$ zu finden, mache man in Formel 63) $x=\frac{1}{2}c$, und man erhält

$$65)\ \delta=5c^4g:384e^2.$$

Differentiirt man aber die Gleichung 63) zweimal hinter einander, so ergibt sich

$$\frac{dy}{dx}=\frac{16\delta}{5c^4}(4x^3-6cx^2+c^3),\ \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{192\delta(c-x).x}{5c^4}$$

sonach erhält man den Krümmungshalbmesser

$$66)\ r=-\frac{dx^2}{d^2y}=\frac{5c^4}{192\delta(c-x)x}$$

Dieser Ausdruck gibt für $x=0$ und $x=c$, $r=\infty$, von $x=0$ bis $x=\frac{1}{2}c$ nimmt r ab, und es wird r für $x=\frac{1}{2}c$ ein Kleinstes, daher geht die Ruthe bei den befestigten Enden in eine Gerade

Digitized by Google

über, von diesen Punkten aus gegen die Mitte nimmt die Krümmung zu, und wird in der Mitte am größten.

Der zugehörige Krümmungshalbmesser ist 67) $r=5c^3:48\delta$.

257. Lehrsatz. Bei einer gleichförmig belasteten, beiderseits eingeklemmten Ruthe ist die größte Senkung in der Mitte nur fünf Achtel derjenigen, welche entsteht, wenn dieselbe Last bei einer gewichtslosen Ruthe in der Mitte angebracht wird.

Beweis. Sei ACB (Fig. 53) eine gewichtslose Ruthe, welche im Punkte C mit einem Gewichte Q belastet wird, wodurch die Ruthe nach der Kurve ADB gebogen werde. Der Druck, den die Unterlage in A und B erleiden, ist $\frac{1}{2}Q$, und das Gleichgewicht wird nicht gestört, wenn man den Punkt D sich fest vorstellt, und im Punkte A eine Kraft $\frac{1}{2}Q$ nach der Richtung AN anbringt. Dann hat man aber den Fall einer gewichtslosen Ruthe, deren Länge $\frac{1}{2}c$ ist, und welche mit einem Ende D eingeklemmt, und am anderen Ende A aber mit einem Gewichte $\frac{1}{2}Q$ belastet wird; es ist daher nach Formel 51), wenn man statt Q, a beziehungsweise $\frac{1}{2}Q$, $\frac{1}{2}c$ setzt, die Gleichung des Astes AMD

$$y=\frac{Q}{12e^2}(\tfrac{3}{4}c^2x-x^3), \text{ oder } 68)\ y=\frac{Q}{48e^2}(3c^2x-4x^3).$$

Setzt man hier den Pfeil $CD=\delta'$, so folgt hieraus für $x=\frac{1}{2}c$, 69) $\delta'=Qc^3:48e^2=8Qc^3:384e^2$. Es ist aber nach Formel 65) für $Q=cg$, $\delta=5c^3Q:384e^2$, mithin ergibt sich

$$\delta:\delta'=5:8.$$

258. Lehrsatz. Eine gleichförmig belastete und beiderseits befestigte Ruthe erhält in ihrer Mitte dieselbe Krümmung, wie eine gewichtslose an beiden Enden eingeklemmte Ruthe, wenn die Hälfte der Last in ihrer Mitte vereinigt angebracht wird.

Beweis. Für die gleichförmig dichte Ruthe ist der Krümmungshalbmesser in ihrer Mitte nach Formel 67) $r=5c^2:48\delta$, und aus Formel 65) hat man $48\delta=5c^4g:8e^2$, sonach erhält man für ihre Mitte $r=8e^2:c^2g=8e^2:cQ$. Andererseits ist für eine gewichtslose Ruthe, deren Länge $\frac{1}{2}c$ und Belastung am Ende Q' ist, wenn man in Formel 55) $\frac{1}{2}c$ statt a, und δ' statt δ setzt, $r=c^2:12\delta'$ und nach Formel 69) hat man $12\delta'=Q'c^3:4e^2$; hiemit ergibt sich

Digitized by Google

$r=4e^2:cQ'$. Hält man die beiden Werthe von r gegen einander, so folgt: $\frac{8e^2}{Qc}=\frac{4e^2}{cQ'}$, daher $Q=2Q'$.

259. Folgesatz. Ist eine Last P auf einem beiderseits gestützten Balken gleichförmig nach dessen Länge ausgebreitet, so ist, wenn Q die Last vorstellt, welche in seiner Mitte angebracht, den Balken zu brechen vermag, $P=2Q$, daher nach (207) $P=8vbh^2:l$.

260. Folgesatz 2. Um noch das Gewicht des Balkens in Rechnung zu bringen, setze man g das Gewicht des Balkens für die Längeneinheit, dann ist lg das Gewicht des ganzen Balkens und $\frac{1}{2}l^2g$ dessen Moment in Beziehung auf eine der Unterlagen. Heißt nun P die Last, die der Balken für den Fall des Bruches zu tragen hat, so wird bei einem, an einem Ende befestigten Balken $Pl+\frac{1}{2}l^2g=vbh^2$, und bei einem beiderseits gestützten Balken $Pl+\frac{1}{2}l^2g=4vbh^2$, sonach wird die Belastung des Balkens

$P=\frac{vbh^2}{l}-\frac{1}{2}lg$ im ersten, und $P=\frac{4vbh^2}{l}-\frac{1}{2}lg$ im andern Falle.

261. Erklärung. Das Tragungsvermögen eines Balkens heißt die Last, welche einem Balken mit Sicherheit aufgelegt werden kann, ohne daß derselbe, selbst nach einer längern Zeit, gebrochen wird.

262. Anmerkung. Nach Gerstner ist das Tragungsvermögen eines vierkantigen Balkens $Q=\tau bh^2$, und seinen Versuchen zufolge ist das Tragungsvermögen bei Fichten- und Tannenholz größer als jenes bei Eichen- und Buchenholz. Heißt τ der Koeffizient des Tragungsvermögens, so ist nach demselben, wenn die Abmessungen des beiderseits gestützten Balkens nämlich Länge, Breite und Höhe in Wiener Zollen genommen werden, und eine Biegung in der Mitte von $\frac{1}{288}$, d. i. $\frac{1}{4}$ Zoll auf eine Klafter angenommen wird, der Werth von τ:

für Eichenholz	17608	für Tannenholz	25688
— Buchenholz	19024	— Schmiedeeisen	184036
— Fichtenholz	23460	— Gußeisen	94741

263. Aufgabe. Aus einem kreisrunden Stamme den stärksten vierkantigen Balken mit Rücksicht auf dessen zulässige Biegung zu bestimmen.

Digitized by Google

Auflösung. Heißt $2x$ die Breite, $2y$ die Höhe des Balkens, so findet man $x=\frac{1}{2}r$, $y=\frac{1}{2}r\sqrt{3}$.

Beweis. Soll nämlich der Querschnitt eines Balkens von größter Tragungsfähigkeit gefunden werden, so muß im Ausdrucke (262) bh^3 oder $16xy^3$ ein Maximum werden. Nun ist $d(xy^3)=3y^2xdy+y^3dx$, mithin $ydx+3xdy=0$, dieß gibt $dy=-ydx:3x$. Die Gleichung des Kreises $x^2+y^2=r^2$ liefert $ydy=-xdx$, also $dy=-xdx:y$. Durch Gleichstellung beider Ausdrücke ergibt sich

$\frac{ydx}{3x}=\frac{xdx}{y}$, oder $y^2=3x^2$, und $y=x\sqrt{3}$: wird dieser Werth in die Gleichung des Kreises gesetzt; so erhält man $x=\frac{1}{2}r$, und sonach $y=\frac{1}{2}r\sqrt{3}$.

6. Rückwirkende Festigkeit der Körper.

264. Erklärung. Man versteht unter rückwirkender Festigkeit eines Körpers dasjenige Gewicht, welches dem, seiner Länge nach vertikal aufgestellten Körper, dessen eines Ende auf einen festen, horizontalen Boden sich stützt, aufgelegt werden muß, um ihn zu zerdrücken.

265. Aufgabe. Die Formel für die rückwirkende Festigkeit eines Körpers zu finden.

Auflösung. Heißt l die Länge des Körpers, b die größte, h die kleinste Seite des Querschnitts, so ist $Ql^2=\pi^2e^2bh^3$.

Beweis. Sei AB (Fig. 54) eine elastische Ruthe, deren Querschnitte Rechtecke sind, mit der Breite b, Höhe h, ist nun $b>h$, und wird die obere Fläche A der Ruthe mit einem Gewichte Q belastet, während das andere Ende B sich gegen eine feste horizontale Ebene BC so stützt, daß es nicht ausweichen kann, so nimmt die so belastete Ruthe eine gebogene Gestalt AMB an, bei welcher wir annehmen, daß die Biegung nur klein, und die Länge der Ruthe von der ursprünglichen Länge $AB=l$ nicht unterschieden ist. Die Biegung erfolgt nothwendig in der Ebene der Abmessung h, auf welche die Abmessung b senkrecht steht. Sei für irgend einen Punkt M der Kurve AMB $AP=x$, $PM=y$, der Krümmungshalbmesser $MO=r$, und wenn man die Tangente MT

dieses Punktes führt, so heiße der Winkel $MTC=v$. Das Moment der Last Q für den Punkt M, welche am Hebelsarme $PM=y$ wirkt, ist Qy, und die relative Elastizität desselben Punktes $=e^2bh^3:r$, weil hier wie in (254) die Biegung der elastischen Ruthe, deren Breite b, Höhe h ist, nach der letzteren Abmessung vor sich geht. Man hat also für das Gleichgewicht $ryQ=e^2bh^3=E^2$. Setzt man hier statt r wie in (247) seinen genäherten Werth $-dx^2:d^2y$, so folgt sogleich

$$\frac{E^2d^2y}{dx^2}=-Qy$$

also, da dx konstant ist, wenn auf beiden Seiten mit dy multiplizirt wird

$$\frac{E^2d^2ydy}{dx^2}=-Qydy \text{ oder } \frac{E^2}{dx^2}\int d^2ydy=-Q\int ydy$$

$$\text{und } \frac{E^2dy^2}{2dx^2}=-\tfrac{1}{2}Qy^2+C$$

Allein $\frac{dy}{dx}=\text{tg}MAP=\cot v$, also $\frac{1}{2}E^2\cot^2 v=-\frac{1}{2}Qy^2+C$.

Für $y=0$ wird $v=\alpha$, wenn der Winkel DBC, welchen die Berührende des gestützten Endes B mit dem horizontalen Boden einschließt, durch α bezeichnet wird, man hat also $\frac{1}{2}E^2\cot^2\alpha=C$ und somit vollständig

$$\frac{E^2dy^2}{dx^2}=E^2\cot^2\alpha-Qy^2$$

Hieraus folgt $dx=\frac{Edy}{\sqrt{(E^2\cot^2\alpha-Qy^2)}}$, und nach Int. 65)

$$x=\frac{E}{\sqrt{Q}}\arcsin\frac{y\sqrt{Q}}{E\cot\alpha}.$$

Durch Umkehrung dieses Ausdruckes nach (A. 710) ergibt sich

$$\frac{y\sqrt{Q}}{E\cot\alpha}=\sin\frac{x\sqrt{Q}}{E}, \text{ oder } y=\frac{E\cot\alpha}{\sqrt{Q}}\sin\frac{x\sqrt{Q}}{E}$$

Da für $y=0$, $\sin\frac{x\sqrt{Q}}{E}=0$, demnach $\frac{x\sqrt{Q}}{E}=0$, oder $\frac{x\sqrt{Q}}{E}=\pi$ wird, so hat man bei der ersten Annahme $x=0$, welche dem Ende A zugehört, bei der andern wird aber $x=l$ und daher

Digitized by Google

$\frac{l\sqrt{Q}}{E}=\pi$ gesetzt, gibt $Q=\frac{\pi^2E^2}{l^2}=\frac{\pi^2e^2bh^3}{l^2}$, wo e^2 die absolute Elastizität des Körpers vorstellt, aus dem die Ruthe gefertigt ist, und da der hier für Q gefundene Werth von der Größe des Winkels α unabhängig ist, so gibt er zugleich die kleinste Kraft an, welche den Bruch zu bewirken vermag.

266. Folgesatz. Heißt für einen andern Körper von gleichnamiger Materie L die Länge, B die Breite, H die Höhe seines Querschnittes und R dessen rückwirkende Festigkeit, so hat man eben so $R=\frac{\pi^2e^2BH^3}{L^2}$, demnach $R:Q=BH^3l^2:bh^3L^2$, d. i. die rückwirkenden Festigkeiten zweier Parallelopipede verhalten sich direkt wie die Breiten und dritten Potenzen der Höhen ihrer Querschnitte, und verkehrt wie die Quadrate der vertikalen Längen.

267. Anmerkung. Nachstehende Tafel gibt die Tragfähigkeit vertikaler Säulen für die Dauer bei verschiedenen Längen, wenn der Querschnitt ein Wiener Quadratzoll ist, und die Gewichte in Wiener Pfunden ausgedrückt werden.

Eiche oder Tanne		Schmiedeeisen		Gußeisen	
Länge	Belast.	Länge	Belast.	Länge	Belast.
2″	372	2″	12390	2″	24780
12	310	12	7744	4	16109
24	186	24	6195	8	12390
				36	1652

Die zwischen diesen Zahlen liegenden Fälle sind nicht unmittelbar durch Versuche ermittelt worden, man kann sie jedoch nach (267) bestimmen. In dem Falle, wo die Länge des Körpers 20mal dessen kleinste Seite übersteigt, wendet man die folgenden Gleichungen an, um das Maximum der Belastung Q, welche der Körper für die Dauer zu tragen im Stande ist, zu erhalten. Für Körper, deren Querschnitt ein Rechteck ist, hat man $Ql^2=0.823bh^3.e^2$, und wenn der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r ist, $Ql^2=7.757r^4e^2$, wo $e^2=17840000$ für Holz, $e^2=892000000$ für Schmiedeisen und $e^2=356800000$ für Guß-

Digitized by Google

eisen in Wiener Pfunden bedeutet, die vertikalen Längen aber in Wiener Zollen zu nehmen sind.

Holz und Eisen werden nur dann zerdrückt und nicht zerbrochen, wenn die Länge in vertikaler Richtung gegen die Abmessungen des Querschnittes desselben sehr klein ist. Aus mehrfach angestellten Versuchen hat sich ergeben, daß die rückwirkende Festigkeit der Steine sich, unter übrigens gleichen Umständen, ziemlich genau wie die Inhalte der Querschnitte verhalten, und man kann in dieser Hinsicht so verfahren, wie in Betreff der absoluten Festigkeit. Die rückwirkende Festigkeit eines Wiener Quadratzolles ist übrigens für Sandstein 2166 und für Ziegel 926 Wiener Pfunde.

268. Anmerkung 2. Daß die Dicken der Mauern hoher Gebäude, wenn sie gleiche Sicherheit gewähren sollen, vom obersten Stocke abwärts in einer geometrischen Progression zunehmen müssen, findet man in Gerstner's Mechanik, Band I. S. 371.

7. Torsions Festigkeit der Körper.

269. Erklärung. Wird ein prismatischer Körper an dem einen Ende befestiget, und an dem andern Ende mit einem Hebel fest verbunden, dessen Richtung auf die Länge des Prisma senkrecht steht, so wird eine in der Ebene des Hebels auf demselben senkrecht wirkende Kraft die Längenfasern des Prisma aus ihrer ursprünglichen Lage mehr oder weniger versetzen, je nachdem sie entfernter oder näher an der Axe liegen. Bei fortgesetzter Umdrehung des Hebels müssen die am meisten gespannten Fasern nach und nach reißen, und das Prisma selbst verdreht werden. Den Widerstand eines Prisma gegen die Einwirkung einer so angebrachten Kraft heißt dessen Torsions- oder Windungsfestigkeit.

270. Aufgabe. Bei einem prismatischen Balken von gegebenen Abmessungen, dessen Torsionsfestigkeit zu bestimmen.

Auflösung. Heißt $\varrho = fv$ die Polargleichung eines Querschnittes, welcher senkrecht zur Länge des Prisma geführt wird, l die Länge und T ein Erfahrungskoeffizient, R der Hebelsarm einer Kraft R, welche das Prisma abzudrehen strebt, so hat man

$$PR = \frac{T}{l}\int_0^{2\pi} dv.\tfrac{1}{4}(fv)^4.$$

Digitized by Google

Beweis. Sei $A'ABB'$ (Fig. 55) das mit dem Ende $A'B'$ in einer Wand NN' befestigte Prisma, an dessen anderem Ende AB vermittelst eines fest mit dem Prisma verbundenen Hebels OK nach einer auf demselben senkrechten Richtung eine Kraft P wirkt: hat nun die Umdrehung des Hebels um den Winkel $AOM=\alpha$ Statt gefunden, so wird hiedurch der Halbmesser OA der Fläche OB in die Lage OM versetzt, während in einem Querschnitte ab, dessen Abstand $oO'=x$ vom eingemauerten Ende $A'B'$ ist, der mit der Geraden OA in derselben Ebene gelegene Halbmesser oa in die Lage om gebracht wird, so daß der Winkel $aom=\alpha'$ kleiner ist als α, und der Halbmesser $O'A'$ des befestigten Endes $A'B'$ seine Lage gar nicht ändert. Ist nun der Drehungswinkel α nur klein, so kann man bei der Kurve $A'mM$ mit doppelter Krümmung, in welche die im natürlichen Zustande geradlinige Faser $A'A$ ausgedehnt wird, ohne merklichen Fehler annehmen, daß die Drehungsbögen α', α in den beiden Querschnitten, ihren Abständen von dem befestigten Ende des Prisma proportional sind, oder daß $\alpha':\alpha=x:l$ sei, weil offenbar α' in α übergeht, für $x=l$, man hat also $\alpha'=\alpha x:l$. Für einen andern Querschnitt $a'b'$, welcher in dem Abstande $OO'=e$ vom ersteren geführt wird, ergibt sich eben so der gleichzeitige Drehungsbogen des zugehörigen Punktes der Faser $\alpha''=\alpha(e+x):l$, somit ist $\Delta\alpha'=\alpha''-\alpha'=\alpha e:l$.

Bezeichnet aber AMB (Fig. 56) den Querschnitt $a'b'$ und man setzt den Radiusvektor $Om=\varrho$, den Winkel $AOM=v$ und läßt v um dv, ϱ um $d\varrho$ zunehmen, so erhält man den Inhalt eines Flächenelements mn, dessen Abmessungen ϱdv und $d\varrho$ sind gleich $\varrho d\varrho dv$. Ist nun p der Widerstand der Flächeneinheit dieses Querschnittes gegen die Abdrehung, so wird $p\Delta\alpha'$ dieser Widerstand, wenn die Drehung eine Zunahme $\Delta\alpha'$ erleidet, auf die Flächeneinheit des Querschnittes, also $p\Delta\alpha'\varrho d\varrho dv$ der Widerstand des Flächenelements mn, und $p\Delta\alpha'\varrho^2 d\varrho dv$ dessen Moment hinsichtlich der Umdrehungsaxe $O'O$ sein. Man hat aber $p\Delta\alpha':pae:l=T:1$ wenn T den Widerstand bedeutet, welchen die Einheit des Querschnittes der Fasern von der Länge $e=1$ eine bestimmte sehr kleine Drehung α erleidet, welche vorerst durch Versuche zu ermitteln kommt: mit diesem Werthe von T ergibt sich der Widerstand eines beliebigen

Digitized by Google

Querschnittes gegen die Abdrehung für das Flächenelement mn gleich $T\varrho^2 d\varrho dv : l$, und für den ganzen Querschnitt $T\iint\varrho^2 d\varrho dv : l$ welcher sofort mit dem statischen Momente der Kraft P im Gleichgewichte stehen muß. Dieß gibt

$$PR=\frac{T}{l}\iint\varrho^2 d\varrho dv=\frac{T}{l}\int\varrho^3 dv$$

Da nun $\varrho=fv$ ist, so folgt

$$PR=\frac{T}{l}\int dv.{}^1/_4(fv)^4$$

wo bei einer vollen Umdrehung des Hebels die Integration von $v=0$ bis $v=2\pi$ zu richten ist.

271. *Folgesatz.* In einem Cylinder, dessen Querschnitt ein Kreis ist, hat man $fv=r$ konstant, und die obige Formel gibt $PR=T.2\pi.{}^1/_4r^4 : l={}^1/_2T\pi r^4 : l$: Ist aber in einem andern Cylinder von gleichnamiger Materie l' die Länge, r' der Halbmesser und P' die erforderliche Kraft am Hebelsarme R, so folgt eben so $P'R={}^1/_2T\pi r'^4 : l'$, somit ist $P : P'=r^4 l' : r'^4 l$.

272. *Aufgabe.* Wenn der Querschnitt eines Prisma ein Quadrat ist, die Torsions-Festigkeit zu bestimmen.

Auflösung. Man hat $PR={}^1/_6Tb^4 : l$.

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 57) ein Quadrat mit der Seite $AB=b$ als Querschnitt eines Prisma von der Länge l, man ziehe die Diagonalen AC, DB und durch ihren mittleren Punkt O die Perpendikel FE, GH auf die Seiten des Quadrates, so zerfällt dasselbe in 8 gleiche Dreiecke, wie GOB, und es bleibt nur die Festigkeit eines derselben zu untersuchen übrig. Man ziehe an einen beliebigen Punkt M die Gerade $OM=\varrho$, setze den Winkel $GOM=v$, so ist $GO=\varrho\cos v={}^1/_2b$, also $\varrho=b : 2\cos v$ die Polargleichung der Geraden GB. Mit diesem Werthe erhält man aus (270)

$$PR=\frac{Tb^4}{16l}\int\frac{dv}{\cos^4 v}, \text{ und nach Int. 200) hat man}$$

$$\int\frac{dv}{\cos^4 v}=\operatorname{tg}v+{}^1/_3\operatorname{tg}^3 v, \text{ oder } \int_0^{{}^1/_4\pi}\frac{dv}{\cos^4 v}={}^4/_3.$$

mithin ist für das Dreieck GOB als Querschnitt

$PR=\frac{Tb^4}{3.16l}$, und das Achtfache hievon gibt die Torsionsfestigkeit eines Quadrates $PR=\frac{1}{6}Tb^4:l$ wie oben.

273. Anmerkung. *Cauchy* hat in seinem Werke: Exercices de mathématiques, 4. année S. 59 die Torsionsfestigkeit eines Rechteckes, dessen Seiten b, h sind, entwickelt, und $PR=\frac{Tb^3h^3}{3(b^2+h^2)l}$ gefunden, welcher Ausdruck für $b=h$, sofort PR wie (272) liefert.

274. *Folgesatz.* Vergleicht man einen Cylinder vom Halbmesser r und einen vierkantigen Balken mit quadratischer Basis, beide von gleichnamiger Materie derselben Länge und gleichem Querschnitte, so hat man für die Torsionsfestigkeit P' des letzteren $P'l=\frac{1}{6}Tb^4=\frac{1}{6}Tfb^2$, wenn der Querschnitt $b^2=\pi r^2=f$ gesetzt wird, während nach (271) $Pl=\frac{1}{2}Tfr^2$ ist, somit folgt

$$P:P'=3r^2:b^2=3:\pi:$$

275. *Folgesatz* 2. Ist aber der Querschnitt ein Quadrat, welches in den Kreis, als Querschnitt des Cylinders eingeschrieben ist, so hat man $b=r\sqrt{2}$, und es ergibt sich $P:P'=3\pi:4$.

Ist hingegen das Quadrat dem Kreis umschrieben, so folgt eben so $P:P'=3\pi:16$.

276. *Folgesatz* 3. Heißt P die Torsionsfestigkeit eines Prisma, mit quadratischer Basis a^2, und P' dieselbe für ein Prisma, dessen Querschnitt ein Rechteck bh ist, beide von gleichnamiger Materie, derselben Länge und gleichem Querschnitte, so hat man

$$Pl=\frac{1}{6}Ta^4,\ P'l=\frac{1}{3}Tb^3h^3:(b^2+h^2),\ \text{sonach}$$
$$P:P'=b^2+h^2:2bh=b^2+h^2:2a^2.$$

Sind aber nicht ihre Querschnitte, sondern die Perimeter gleich, so folgt $a=\frac{1}{2}(b+h)$, $a^4=(b+h)^4:16$, und

$$P:P'=8(b+h)^4(b^2+h^2):b^3h^3.$$

277. Anmerkung. Der numerische Werth der Zahl T ist für eine runde, schmiedeiserne Stange 6612300000, für eine derlei von Stahl 6273400000, wenn alle Abmessungen in Métre und das Gewicht in Kilogrammen ausgedrückt werden. Für Wiener Maß und Gewicht aber ist diese Zahl mit 0.1784608 zu multiplizíren. Von der überaus reichen Literatur über die Festigkeit der Körper führe ich nur folgende wichtigere Schriften an:

Digitized by Google

Barlow, Peter, an essay on the strength and stress of timber: 2 edit. London 1824.

Duleau, A., theoretisch-praktische Versuche über den Widerstand oder die Haltbarkeit des geschmiedeten Eisens. A. d. Franz. übers. von Dr. G. L. Blumhof. Quedlinburg und Leipzig 1825.

Girard, P. S., analytische Abhandlung von dem Widerstande fester Körper. A. d. Franz. übers. von Krönke. Giesen 1803.

Gregory, Olinth., theoretisch-praktische und beschreibende Darstellung der mechanischen Wissenschaften. Nach der 3. Aufl. a. d. Englischen übers. und mit Zusätzen versehen von Dr. J. F. W. Dietlein. Halle 1828. 2 B.

v. Heim, über das Gleichgewicht und die Bewegung gespannter elastischer fester Körper. Stuttgart 1838.

Kuppler, C. G., die Maschinen-Elemente und die Hydraulik. Nürnberg 1841.

Tredgold, Thomas, a practical essay on the strength of cast iron. London 1822.

Venturoli, Giuseppe, elementi di meccanica e d'idraulica. 3 ediz. Milano 1817. 2 B.

nebst den schon oben (33) angeführten Schriften Eytelwein's Statik. Kap. XV., Gerstner's Kap. III., Navier's Sect. I. und Unger's.

VII. Stabilität der Körper.

278. Erklärung. Wenn ein Körper auf einer horizontalen Ebene aufliegt, und nach einer gegebenen Richtung eine Kraft auf ihn einwirkt, welche ihn entweder ganz oder theilweise aus seiner Stellung zu versetzen vermag, so heißt der Widerstand des Körpers gegen die Aenderung seiner Lage durch jene Kraft seine Stabilität. Strebt die Kraft den Körper um eine seiner horizontalen Kanten wie um eine Axe zu drehen, so heißt der Widerstand des Körpers die Stabilität gegen Drehung hinsichtlich jener Kante. Wofern aber die Kraft nicht sowohl eine Drehung als vielmehr eine Fortschiebung des Körpers auf der horizontalen Ebene erstrebt, so nennt man den Widerstand des Körpers Stabilität gegen den Schub, oder schlechtweg den Schub der Kraft. In bei-

Digitized by Google

den Fällen wird die Festigkeit des Körpers so groß gedacht, daß eine Trennung derselben durch die einwirkende Kraft nicht erfolgen kann.

Eine theilweise Aenderung der Lage eines Körpers kann aber Statt haben, wenn die angebrachte Kraft nach irgend einer Richtung einen Theil des Körpers von der übrigen Masse trennt, und dieser in Folge der Einwirkung der Kraft entweder längst dem stehen bleibenden Theile herabgleitet, oder aber um eine beiden gemeinschaftliche Kante umgeworfen wird.

279. Aufgabe. Die Stabilität eines homogenen Körpers von gegebener Gestalt, hinsichtlich einer, nach einer gegebenen Richtung angebrachten, Kraft zu bestimmen.

Auflösung. Sei $ABCD$ (Fig. 58) ein vertikaler durch den Schwerpunkt G des Körpers auf die im Punkte A projizirte Umdrehungsaxe senkrecht geführter Schnitt, welcher den ganzen Körper in zwei gleiche und symmetrische Hälften theilen soll, und in dessen Ebene sofort auch die Richtung FK der angebrachten Kraft P angenommen wird. Heißt nun Q das Gewicht des Körpers, setzt man $AE=h$ und für irgend einen Punkt F in der Richtung FK der Kraft P, die Koordinaten $AH=x$, $FH=y$: bezeichnet man endlich mit M die horizontale, und mit N die vertikale Seitenkraft der Kraft P; so hat man für die Stabilität gegen die Umdrehung $My=Qh+Nx$, oder auch, wenn $AK=\delta$ zur Richtuug der Kraft senkrecht auf FK gefällt wird, $P\delta=Qh$ und für die Stabilität gegen den Schub $M=\mu(Q+N)$.

Beweis. In der angenommenen Bezeichnung bedeutet My das Moment der horizontalen Seitenkraft M zur Umdrehung des Körpers um die Kante im Punkte A, Qh aber und Nx sind die Momente des im Schwerpunkte G vereinigten Gewichtes und der vertikalen Seitenkraft N, welche die Umdrehung verhindern; man hat also im Zustande des Gleichgewichts $My=Qh+Nx$, oder auch $P\delta=Qh$. Der Druck auf die horizontale Ebene ist aber $Q+N$, und die daher entstehende Reibung (169) $\mu(Q+N)$, sonach ist $M=\mu(Q+N)$.

280. Folgesatz. Verlängert man die vertikale Gerade durch den Schwerpunkt bis zu ihrem Zusammentreffen mit der Rich-

Digitized by Google

tungslinie der Kraft P im Punkte L, und nimmt auf den Geraden LK, LE, $LS=P$, $LT=Q$, so gibt die Verzeichnung des Kräftenparallelogrammes $LSUT$ die Resultirende LU dieser Kräfte, und es ist die Lage des Körpers stabil, wenn die verlängerte Richtung der Geraden LU die Grundfläche in einem Punkte V trifft, welcher innerhalb derselben gelegen ist, befindet sich aber der Punkt V außerhalb der Grundfläche etwa dem Punke A zunächst, so erfolgt sofort eine Umdrehung des Körpers um eine im Punkte A projizirte Kante, oder die Lage eines Körpers unter diesen Umständen ist, wie man sagt, labil.

1. Stabilität der Mauern und Pfeiler.

281. Lehrsatz. Die Stabilität einer parallelopipedischen Mauer mit der Dicke b, Höhe a und dem Gewichte der kubischen Einheit g ist gegen Drehung $\frac{1}{2}ab^2g$, und gegen den Schub μabg.

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 59) der vertikale Querschnitt durch den Schwerpunkt G der Mauer, man setzt $AD=b$, $AB=a$, so ist $GH=\frac{1}{2}a$ (100), $AH=\frac{1}{2}b$, also das Gewicht der Mauer für die Längeneinheit $Q=abg$, und das Moment desselben hinsichtlich der Kante in A ist $\frac{1}{2}ab^2g$. Wirkt also eine horizontale Kraft M in der Höhe y, so folgt $My=\frac{1}{2}ab^2g$, wirkt aber eine Kraft P nach einer beliebigen Richtung, und es sind M, N wie in (279) ihre Seitenkräfte, so wird $My=\frac{1}{2}ab^2g+Nx$. Für die Stabilität gegen den Schub hat man aber μabg im ersten, und $\mu(abg+N)$ im andern Falle.

282. Folgesatz. Ist die Kraft M im Schwerpunkte G angebracht, dann ist $y=\frac{1}{2}a$, und sonach $M=b^2g$ oder die Stabilität gegen Drehung ist unabhängig von der Höhe der Mauer.

283. Anmerkung. In der Folge wird immer vorausgesetzt, wenn nicht das Gegentheil ausdrücklich erinnert wird, daß die Kraft, welche den Umsturz des Pfeilers anstrebt, am vortheilhaftesten wirke, welches geschieht, wenn sie nach horizontaler Richtung in der Höhe des Pfeilers angebracht ist, weil dann dieselbe Kraft in jeder anderen Richtung und in einem beliebigen Angriffspunkte wirkend, sicher den Pfeiler nicht umstürzen kann; setzt man also $y=a$, so folgt $M=\frac{1}{2}b^2g$, d. i. gegen jede Kraft, die nicht größer ist als $\frac{1}{2}b^2g$, ist der Pfeiler, sofern er als ein festes unzertrennbare Ganze betrachtet wird, vor dem Umsturze sicher.

Digitized by Google

284. Aufgabe. Der vertikale Querschnitt einer Mauer sei ein Trapez, und die größere der beiden parallelen Seiten befinde sich in der Grundfläche der Mauer, die Stabilität gegen Drehung zu finden.

Auflösung. Ist das Trapez $ABCD$ (Fig. 60) der Querschnitt der Mauer, und die centrische Linie EF senkrecht auf AD, so hat man für $AD=b$, $BC=b'$, $EF=h$, die Kraft M horizontal, und im Schwerpunkte G angebracht, angenommen,

$$M=3b(b+b')^2g:4(b+2b').$$

Beweis. Das Gewicht der Längeneinheit der Mauer ist $Q=\frac{1}{2}(b+b')hg$, der Abstand des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe in A oder B ist $\frac{1}{2}b$, und nach (46) dessen Abstand von der Grundfläche oder $GF=(b+2b')h:3(b+b')$. Man hat also das Moment der im Schwerpunkte wirkenden Kraft M gleich $Mh(b+2b'):3(b+b')$, und das Moment des Widerstandes der Mauer $\frac{1}{2}b.\frac{1}{2}(b+b')gh$, woraus M wie oben sich ergibt.

285. Folgesatz. Für $b=b'$ wird der Querschnitt ein Rechteck, und $M=b^2g$ wie (282), ist aber $b'=0$, so folgt $M=\frac{3}{4}b^2g$ für die Stabilität eines dreiseitigen Prisma, dessen Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck wäre.

286. Aufgabe. Die Stabilität eines dreiseitigen Prisma zu bestimmen.

Auflösung. Heißen b und b' die Abschnitte der Grundlinie, in welche ein Dreieck als der vertikale Querschnitt eines dreiseitigen Prisma durch ein Perpendikel aus der Spitze zerlegt wird, und h dessen Höhe, so findet man die Stabilität gegen Drehung um die Kante, an welcher der Abschnitt b liegt

$$M=\frac{1}{6}hg(2b^2+3bb'+b'^2).$$

Beweis. Sei $A'B'C'cab$ (Fig. 61) ein dreiseitiges Prisma, welches mit der Grundfläche $A'B'ab$ auf einer horizontalen Ebene aufliegt, man ziehe durch dessen Schwerpunkt G eine Ebene ACB senkrecht auf die Grundfläche, und fälle aus dem Punkte C das Perpendikel CD auf AB, lege durch die Gerade CD eine Ebene $C'D'dc$ senkrecht auf den Schnitt ACB, so zerfällt hiedurch das dreiseitige Prisma in zwei andere dreiseitige Prismen, deren Quer-

Digitized by Google

schnitte die rechtwinkligen Dreiecke CAD, CDB sind. Seien g und g' die Schwerpunkte dieser Dreiecke, und gh, $g'h'$ die Perpendikel aus denselben auf die Gerade AB, so ist (99)

$$Ah=\tfrac{2}{3}AD=\tfrac{2}{3}b, \text{ und } Ah'=b+\tfrac{1}{3}b'.$$

Nun ist das Gewicht des Prisma mit dem Querschnitte CAD für die Längeneinheit gleich $\frac{1}{2}bhg$, und das Gewicht des anderen Theiles $\frac{1}{2}b'hg$, sonach der Widerstand des ersteren gegen die Umdrehung um die Kante $A'a$, $\frac{1}{2}bhg.\frac{2}{3}b$, und jener des anderen $\frac{1}{2}b'hg(b+\frac{1}{3}b')$. Diese Momenten-Summe ist aber dem Momente der horizontal wirkenden Kraft M im Abstande h von der Grundfläche des Prisma nämlich Mh gleich, dieß gibt

$$M=\tfrac{1}{6}g(2b^2+3bb'+b'^2).$$

287. Aufgabe. Die Stabilität einer beiderseits mit zugespitzten Pfeilern gestützten Mauer zu finden, die nach der ganzen Länge der Mauer fortlaufen.

Auflösung. Sei (Fig. 39) $DEFC$ der Querschnitt einer Mauer, welche beiderseits mit zugespitzten Pfeilern gestützt ist, deren Querschnitte die Dreiecke ADE, CBF sind. Man setze die Ausladungen $AE=c$, $BF=c'$, ferner $EF=b$, $DE=h$, so ist

$$M=g[\tfrac{1}{6}(2c^2+c'^2+3cc')+\tfrac{1}{2}b(b+c'+2c)].$$

Beweis. Die Stabilität des Prisma für den Querschnitt ADE ist $\frac{1}{2}c^2g$, für den Querschnitt $DEFC$ ist diese $bg(c+\frac{1}{2}b)$ und für den Querschnitt CBF endlich erhält man die Stabilität hinsichtlich der Umdrehungsaxe in A gleich $\frac{1}{2}c'g(c+b+\frac{1}{3}c')$, also

$$M=g(\tfrac{1}{2}c^2+\tfrac{1}{6}c'^2+\tfrac{1}{2}cc'+bc+\tfrac{1}{2}bc'+\tfrac{1}{2}b^2)$$

woraus der obige Ausdruck sofort folgt.

288. Aufgabe. Die Stabilität einer Mauer zu finden, welche in gleichen Abständen mit parallelopipedischen Strebepfeilern einerseits gestützt ist.

Auflösung. Den Grundriß einer solchen Mauer MN stelle (Fig. 62) vor, man ziehe in der Mitte der Wand zwischen zwei Strebepfeilern die Linien AA', BB', setze $AB=l$, $AA'=b$, $EH=c'$, $CC'=a$, so hat man für die Drehung um die Kante DD', $My=hg(\frac{1}{2}b^2l+bcl+\frac{1}{2}ac^2)$, und für den Schub

$$M=h\mu g(bl+ac).$$

Beweis. Wird das Stück der Mauer $ABD'D$ als ein un-

Digitized by Google

zertrennlicher Körper betrachtet, so ist die Stabilität der Mauer $AA'BB = blh(\frac{1}{2}b+c)g$, und die Stabilität des Strebepfeilers $CDD'C' = \frac{1}{2}ac^2hg$, folglich ihre Summe $hg(\frac{1}{2}b^2l+bcl+\frac{1}{2}ac^2) = My$, wenn y die Höhe des Angriffspunktes der parallelen Kraft M vorstellt, dagegen ist das Gewicht der Mauer sammt dem Pfeiler $h(bl+ac)g$, und der Schub wie oben.

289. Lehrsatz. Die Stabilität eines Rotationskörpers ist gleich dem Produkte aus der Ordinate des Endpunktes der beschreibenden Kurve in das Gewicht des Körpers, getheilt durch dessen Höhe.

Beweis. Ein Rotationskörper hat zur Grundfläche einen Kreis, dessen Halbmesser die Ordinate des Endpunktes in der beschreibenden Kurve ist, und sein Schwerpunkt liegt in der senkrechten Geraden durch den Mittelpunkt der Grundfläche. Heißt also Q das Gewicht des Rotationskörpers, R der Halbmesser der Grundfläche, und h dessen Höhe, so ist für eine am Scheitel des Körpers angebrachte horizontale Kraft M, sofort $Mh = QR$.

290. Folgesatz. Wirkt aber die Kraft im Schwerpunkte des Körpers, dessen Abstand von der Grundfläche $h-x$ ist, wobei x die Entfernung des Schwerpunktes vom Anfangspunkte wie in (144) bedeutet, so wird schon $M(h-x) = QR$.

291. Folgesatz 2. Bei einem abgestutzten Kreiskegel hat man $Q = \frac{1}{3}gh(R^2+Rr+r^2)\pi$, und nach (134) $h-x = \frac{1}{4}h\frac{R^2+2Rr+3r^2}{R^2+Rr+r^2}$, dieß gibt $M = \frac{4R(R^2+Rr+r^2)^2\pi g}{3(R^2+2Rr+3r^2)}$

Ist hier $R = r$, so wird die Stabilität eines Cylinders $M = 2\pi R^3 g$, ist aber $r = 0$, so folgt die Stabilität eines Kreiskegels $M' = \frac{1}{3}R^3\pi g$, mithin verhalten sich die Stabilitäten eines Cylinders und Kegels, von gleicher Höhe und Grundfläche, wie 3:2. Haben aber diese Körper ein gleiches Gewicht, oder ist das Gewicht g' der kubischen Einheit im Kegel dreimal so groß, als im Cylinder, so wird $M = 2\pi R^3 g$, $M' = \frac{1}{3}\pi R^3 g'$, daher $M : M' = 1 : 2$.

292. Folgesatz 3. Für die Stabilität eines Kugelabschnittes hat man nach (146)

Digitized by Google

$$\xi=\frac{8rx-3x^2}{12r-4x},\quad x-\xi=\frac{4rx-x^2}{12r-4x}$$

ferner ist das Gewicht des Kugelabschnittes $\frac{1}{3}g(3r-x)\pi x^2$, und der Halbmesser der Grundfläche $\varrho=\sqrt{(2rx-x^2)}$: mit diesen Werthen findet man aus (290)

$$M=\frac{4(3r-x)^2\pi x}{3(4r-x)}\sqrt{(2rx-x^2)}.$$

Für $x=r$ wird die Stabilität der Halbkugel $M=\frac{16}{9}r^3\pi$: für $x=2r$ hingegen erhält man $M=0$, wie sich von selbst versteht, da dieselbe immer nur mit einem einzigen Punkte aufliegt.

2. Druck der Erde auf die Futtermauern.

293. Erklärung. Wird in einem parallelopipedischen von Brettern zusammengezimmerten Kasten Erde irgend einer Gattung aufgeschüttet, und dann eine der vertikalen Seitenwände des Kastens geöffnet, so tritt ein Theil der Erde aus dem Kasten, und legt sich nach einer schiefen Ebene an die im Kasten zurückgebliebene Masse. Man nennt die so entstandene Erdfläche die natürliche Böschung, und ihre Neigung gegen die vertikale Wand den Böschungswinkel. Dieser Winkel ändert sich mit der Beschaffenheit der Erde, je nachdem sie lose oder fest, trocken oder feucht, bloß aufgeschüttet oder gestampft wird.

294. Lehrsatz. Wenn eine auf einer schiefen Ebene aufgestellte Last Q durch eine horizontal wirkende Kraft P gehalten, wird, so hat man mit Rücksicht auf die Reibung des Körpers

$$P=Q.\frac{1-\mu\operatorname{tg}m}{\operatorname{tg}m+\mu}$$

wo m den Winkel der schiefen Ebene mit einer vertikalen Geraden bedeutet.

Beweis. Zerlegt man die Last Q in die Seitenkräfte $Q\cos m$ parallel zur schiefen Ebene, und $Q\sin m$ senkrecht darauf, und eben so, wenn man die horizontal wirkende Kraft P in die Seitenkräfte $P\sin m$ parallel zur schiefen Ebene, und $P\cos m$ senkrecht auf dieselbe zerfällt, so liefern die ersteren $Q\cos m$ und $P\sin m$ eine parallel zur schiefen Ebene wirkende Resultirende $Q\cos m-P\sin m$, die letzteren hingegen erzeugen einen Druck gegen die schiefe Ebene

Digitized by Google

dessen Größe $Q\sin m + P\cos m$ ist. Man hat also im Zustande des Gleichgewichtes $Q\cos m - P\sin m = \mu(Q\sin m + P\cos m)$ woraus man sofort findet

$$P = \frac{Q(\cos m - \mu \sin m)}{\mu \cos m + \sin m}$$

und wenn man hier Zähler und Nenner mit $\cos m$ dividirt, ergibt sich sogleich der obige Ausdruck.

295. Aufgabe. Den Druck der Erde auf eine vertikale Mauer zu bestimmen.

Auflösung. Heißt m die Hälfte des Böschungswinkels, μ der Reibungskoeffizient der Erdschichten unter einander, womit die Mauer von der Höhe a einerseits ausgefüllt ist, so ist der horizontale Druck derselben auf die Längeneinheit der Mauer gleich $\frac{1}{2}a^2 g \operatorname{tg}^2 m$, und die hiezu erforderliche Stabilität derselben gleich $\frac{1}{6}a^3 g \operatorname{tg}^2 m$.

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 63) die Mauer, welche den Druck der im Raume $CBEF$ aufgeschütteten Erde auszuhalten hat, sei ferner BF ihre natürliche Böschung (293) und also BEF derjenige Theil der Erdmasse, welche gar keinen Druck auf die Mauer ausübt. Untersuchen wir den Druck eines Theils CBG, der im Raume CBF befindlichen Erde, und setzen den Winkel $CBG = m$, dann für eine beliebige Abszisse $CP = x$, $Pp = dx$, ziehe PM und pm mit BG parallel; so folgt $PM = x\sec m$, $pm = (x + dx)\sec m$, und das Perpendikel $Pq = x\sin m$. Mit diesen Werthen erhält man den Inhalt der trapezförmigen Erdschichte $PpmM = (x + \frac{1}{2}dx)dx\sec m \sin m = xdx\operatorname{tg} m$, und ihr Gewicht $gxdx\operatorname{tg} m$. Der horizontale Druck, welchen diese Erdschichte auf das Element Pp der Mauer ausübt, ist nach (294)

$$gxdx\operatorname{tg} m \frac{1 - \mu \operatorname{tg} m}{\operatorname{tg} m + \mu} = gxdx. \frac{1 - \mu \operatorname{tg} m}{1 + \mu \cot m}.$$

Macht man nun zur Abkürzung $N = (1 - \mu \operatorname{tg} m) : (1 + \mu \cot m)$, so ist der Druck auf das Flächenelement Pp der Mauer gleich $Ngxdx$, welches integrirt von $x = 0$ bis $x = a$, den Druck auf die ganze Wand $\frac{1}{2}a^2 gN$ liefert. Das Moment des Druckes $Ngxdx$ auf das Element Pp ist aber $Ng(a - x)xdx$, und die Summe der Momente sämmtlicher im Raume BCF vorhandener Erdschichten erhält

Digitized by Google

man, von $x=0$ bis $x=a$ integrirend, $\frac{1}{2}Na^2g-\frac{1}{3}Na^2g=\frac{1}{6}Na^2g$, wo nur noch die Größe N unbestimmt bleibt: da aber diese von dem Winkel m so abhängt, daß sie sowohl für $\operatorname{tg}m=0$, als auch für $\operatorname{tg}m=1:\mu$ verschwindet, so gibt es einen zwischen diesen Grenzen gelegenen Werth von $\operatorname{tg}m$, für welchen N ein Maximum wird. Differentiirt man also den Ausdruck $N=(1-\mu\operatorname{tg}m):(1+\mu\operatorname{cot}m)$ und setzt das Differentiale der Null gleich, so läßt sich sofort der Nenner im Differentiale weglassen, und es ergibt sich, weil

$$d(1-\mu\operatorname{tg}m)=-\frac{\mu dm}{\cos^2 m},\quad d(1+\mu\operatorname{cot}m)=-\frac{\mu dm}{\sin^2 m}$$

die Bedingungsgleichung

$$\frac{\sin m+\mu\cos m}{\cos^2 m\sin m}=\frac{\cos m-\mu\sin m}{\sin^2 m\cos m},\text{ oder}$$

$\operatorname{tg}m+\mu=\operatorname{cot}m-\mu$, und weil $\operatorname{cot}m=1:\operatorname{tg}m$, so wird $\operatorname{tg}^2 m+2\mu\operatorname{tg}m-1=0$ eine quadratische Gleichung, durch deren Auflösung man $\operatorname{tg}m=-\mu+\sqrt{(1+\mu^2)}$ findet. Es ist aber

$$N=\frac{1-\mu\operatorname{tg}m}{1+\mu\operatorname{cot}m}=\frac{\operatorname{tg}m(1-\mu\operatorname{tg}m)}{\operatorname{tg}m+\mu}=\frac{\operatorname{tg}m[1+\mu^2-\mu\sqrt{(1+\mu^2)}]}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$$

kürzt man diesen Bruch ab, so erhält man

$$N=\operatorname{tg}m[-\mu+\sqrt{(1+\mu^2)}]=\operatorname{tg}^2 m.$$

Bei Substituirung dieses Werthes von N ergibt sich sofort $M=\frac{1}{2}a^2g.\operatorname{tg}^2 m$, und ihr Moment $My=\frac{1}{6}a^3g\operatorname{tg}^2 m$.

296. *Folgesatz.* Heißt aber n der Winkel CBE für die natürliche Böschung der Erde, so hat man (171) $\operatorname{tg}n=1:\mu$. Nun ist

$$\operatorname{tg}2m=\frac{2\operatorname{tg}m}{1-\operatorname{tg}^2 m}=\frac{-2\mu+2\sqrt{(1+\mu^2)}}{-2\mu^2+2\mu\sqrt{(1+\mu^2)}}=\frac{1}{\mu},$$

demnach $\operatorname{tg}2m=\operatorname{tg}n$, oder $n=2m$, d. i. die Erdschichte, welche den größten horizontalen Druck auf die Mauer ausübt, halbirt den natürlichen Böschungswinkel der Erde.

297. Aufgabe. Wenn die Futtermauer beiderseits eine Ausladung besitzt, den Druck der Erde zu bestimmen.

Auflösung. Es sei $ABCD$ (Fig. 64) die Futtermauer, deren innere Seite AD mit der Vertikalen DE einen Winkel $ADE=\varepsilon$ bildet, sei GDA das Erdprisma, welches durch das Weichen einer Futtermauer abrollen würde, man setze den Winkel $GDA=m$

Digitized by Google

und P den Druck senkrecht auf die Fläche AD, ferner $DE=a$ sei die Höhe der Mauer, und der Winkel $FDE=n$ der natürliche Böschungswinkel, endlich sei c die Kohäsion des Erdreiches für die Flächeneinheit; so hat man

$$P=[(\tfrac{1}{2}a^2g(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(n-\varepsilon)+\operatorname{tg}\varepsilon)^2-2ac\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(n-\varepsilon)(1+\operatorname{tg}\varepsilon\cot(n-\varepsilon))]\cos\varepsilon$$

Beweis. Die Kraft P, welche senkrecht auf AD wirkt, zerfällt in die Kraft $P\cos m$ senkrecht auf DG und in die Kraft $P\sin m$, welche allein der Losreißung des Prisma DGA entgegensteht. Stellt ferner Q das Gewicht des Prisma DGA vor, und wird auch diese Kraft in zwei andere zerlegt, wovon die eine senkrecht auf DG, die andere mit dieser Ebene gleichlaufend ist, und ein Herabsinken des Prisma zu bewirken anstrebt, so wird die erstere $Q\sin(m-\varepsilon)$ die andere $Q\cos(m-\varepsilon)$ sein. Die beiden Kräfte $Q\cos(m-\varepsilon)$ und $P\sin m$ sind daher einander entgegengesetzt, und ihr Unterschied ist die Resultirende derselben. Aus dem Dreiecke DGE folgt $DE=DG\cos(m-\varepsilon)$, also $DG=DE:\cos(m-\varepsilon)$, und es ist sonach die der Trennungsfläche DG proportionale Kohäsion der Erdschichte $=ac:\cos(m-\varepsilon)$. Hieraus folgt

$$Q\cos(m-\varepsilon)-P\sin m=\mu(P\cos m+Q\sin(m-\varepsilon)-ac:\cos(m-\varepsilon))$$

und sonach

$$P=\frac{Q[\cos(m-\varepsilon)-\mu\sin(m-\varepsilon)]-ac\sec(m-\varepsilon)}{\sin m+\mu\cos m}$$

setzt man hierin statt μ dessen Werth $\cot n$, so erhält man

$$P=\frac{Q[\cos(m-\varepsilon)-\cot n\sin(m-\varepsilon)]-ac\sec(m-\varepsilon)}{\sin m+\cot n\cos m}$$

$$=\frac{Q\sin(n+\varepsilon-m)}{\cos(n-m)}-\frac{ac\sin n}{\cos(n-m)\cos(m-\varepsilon)}$$

Es ist aber $Q=\frac{1}{2}ga^2[\operatorname{tg}(m-\varepsilon)+\operatorname{tg}\varepsilon]$, somit

$$P=\frac{\frac{1}{2}ga^2[\operatorname{tg}(m-\varepsilon)+\operatorname{tg}\varepsilon]\sin(n+\varepsilon-m)}{\cos(n-m)}-\frac{ac\sin n}{\cos(n-m)\cos(m-\varepsilon)}$$

$$=\tfrac{1}{2}ga^2[\operatorname{tg}(m-\varepsilon)+\operatorname{tg}\varepsilon][\operatorname{tg}(n-m)\cos\varepsilon+\sin\varepsilon]$$

$$-\frac{ac\sin n}{\sin(n-\varepsilon)}[\operatorname{tg}(n-m)+\operatorname{tg}(m-\varepsilon)]$$

$$=\tfrac{1}{2}ga^2\cos\varepsilon[\operatorname{tg}(m-\varepsilon)+\operatorname{tg}\varepsilon][\operatorname{tg}(n-m)+\operatorname{tg}\varepsilon]$$

$$-ac\cos\varepsilon[1+\operatorname{tg}\varepsilon\cot(n-\varepsilon)][\operatorname{tg}(n-m)+\operatorname{tg}(m-\varepsilon)]$$

Digitized by Google

welchen Ausdruck man auch so schreiben kann

$$P=\operatorname{tg}(m-\varepsilon)\operatorname{tg}(n-m)(\tfrac{1}{2}a^2g+ac\operatorname{tg}n)$$
$$+[(\tfrac{1}{2}a^2g\operatorname{tg}\varepsilon-ac)\operatorname{tg}n\cos\varepsilon(1-\operatorname{tg}\varepsilon\operatorname{tg}(n-\varepsilon)]$$

Dieser Ausdruck gibt den Werth von einem beliebigen Erdprisma, welches sich ablösen wollte: dasjenige aber, welches sich wirklich vom Erdkörper abtrennen wird, kann nur jenes sein, welches den größten Druck unter allen übrigen ausübt. Der Winkel m ist daher so zu bestimmen, daß P ein Maximum wird. Differentiirt man also die letzte Gleichung, und setzt $dP=0$, so erhält man

$$\frac{\operatorname{tg}(n-m)}{\cos^2(m-n)}-\frac{\operatorname{tg}(m-\varepsilon)}{\cos^2(n-m)}=0$$

und daher $\sin 2(n-m)=\sin 2(m-\varepsilon)$, folglich $n-m=m-\varepsilon$, und $m=\frac{1}{2}(a+\varepsilon)$.

Es ist daher der Winkel, welchen die von der Erde sich ablösende Seite des Prisma vom größten Drucke mit der innern Seite der Mauer bildet, die Hälfte von jenem Winkel, welcher durch die schiefe Ebene der natürlichen Böschung, und eben jener inneren Seite der Mauer gebildet wird (296).

Durch Substitution von $m=\frac{1}{2}(n+\varepsilon)$ ergibt sich der größte Druck wie oben.

298. Folgesatz. Ist die innere Seite der Mauer nach dem Erdreiche zu geneigt, dann ist ε negativ zu setzen, und man erhält den größten Druck $P=[\frac{1}{2}a^2g(\operatorname{tg}\frac{1}{2}(n+\varepsilon)-\operatorname{tg}\varepsilon)^2$

$$-2ac\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(n+\varepsilon)(1-\operatorname{tg}\varepsilon\cot(n+\varepsilon))]\cos\varepsilon$$

ist aber die innere Seite vertikal, dann hat man $\varepsilon=0$, und

$$P=\tfrac{1}{2}a^2g\operatorname{tg}^2\tfrac{1}{2}n-2ac\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}n.$$

299. Folgesatz 2. In der letzten Gleichung wird $P=0$ für den Werth von a, den wir nun h nennen wollen, $h=4c:g\operatorname{tg}\frac{1}{2}n$, und dieß gibt $c=\frac{1}{4}gh\operatorname{tg}\frac{1}{2}n$, welcher Ausdruck zu erkennen gibt, daß der Koeffizient der Kohäsion von dem Gewichte der kubischen Einheit der Erde, von ihrer natürlichen Böschung und von der Höhe abhängig sei, bis auf welche die Erde sich vertikal abstechen läßt, ohne einzufallen.

300. Folgesatz 3. Wenn man eben so in den Gleichungen

Digitized by Google

(297) und (298), $P=0$ setzt, und den zugehörigen Werth von a mit h' bezeichnet, so findet man

$$h'=\frac{4c\operatorname{tg}^4/_2(n+\varepsilon)(1+\operatorname{tg}\varepsilon\cot(n+\varepsilon))}{g(\operatorname{tg}^4/_2(n+\varepsilon)\pm\operatorname{tg}\varepsilon)^2}$$

oder wenn für c der letztbestimmte Werth gesetzt wird,

$$h'=\frac{h\operatorname{tg}^4/_2n\operatorname{tg}^4/_2(n+\varepsilon)(1+\operatorname{tg}\varepsilon\cot(n+\varepsilon))}{(\operatorname{tg}^4/_2(n+\varepsilon)\pm\operatorname{tg}\varepsilon)^2}$$

d. i. $h'=h\cos\varepsilon\sin^2{}^1/_2n:\sin^2{}^1/_2(n\pm\varepsilon)$, welche Formel beim Gebrauche der Logarithmen besonders bequem ist.

301. Folgesatz 4. Setzt man Kürze halber $t=\operatorname{tg}^4/_2(n\mp\varepsilon)\pm\operatorname{tg}\varepsilon$, und für c seinen vorhin bestimmten Werth in dem Ausdrucke des größten Druckes P; so ergibt sich ganz einfach $P=\frac{1}{2}gt^2a(a-h')\cos\varepsilon$, in welcher Formel a die ganze Höhe der Aufschüttung, h' diejenige Höhe bedeutet, bis zu welcher die Erde ohne einzufallen, sich unter dem Böschungswinkel $^1/_2n\pm\varepsilon$ erhalten kann, und t endlich drückt das Verhältniß der Grundlinie des Prisma vom größten Drucke zu dessen Höhe DE aus.

302. Aufgabe. Die Stabilität einer Mauer mit Ausladungen gegen den Erdedruck zu bestimmen.

Auflösung. Es ist bei derselben Bezeichnung das Moment zur Umstürzung der Mauer

$M=\frac{1}{2}gt^2[\frac{1}{3}(a-h')^2(a+\frac{1}{2}h')\mp a(a-h')x\sin\varepsilon\cos\varepsilon)$, wo x die erforderliche Dicke CD am Fuße der Futtermauer vorstellt.

Beweis. Ist die Erde bis zu einer Höhe z angeschüttet, so ist nach (301) ihr Druck $P=gt^2z(z-h')\cos\varepsilon$, das Differentiale dieses Ausdruckes liefert den Druck einer Erdschichte von der Höhe dz, nämlich $\frac{1}{2}gt^2(2z-h')dz\cos\varepsilon$. Dieser Druck wirkt aber in einer Höhe $IK=a-z$, und wenn man IL auf AD senkrecht zieht, so hat man die Richtung desselben, und CL auf IL senkrecht gezogen, bestimmt den dazu gehörigen Hebelsarm. Ist ferner die Dicke CD der Futtermauer am Fuße x, so ist $CL=DI+DN=(a-z)\sec\varepsilon+x\sin\varepsilon$. Hiernach ist das Moment des Elementardruckes $dM=\frac{1}{2}gt^2[(2z-h')(a-z)+(2z-h')x\sin\varepsilon\cos\varepsilon]dz$.

Das Integrale dieses Ausdruckes liefert, wenn es für die ganze Höhe a genommen wird, und für $z=h'$ verschwindet, den obigen Ausdruck.

Digitized by Google

303. *Folgesatz.* Dividirt man das Moment der Kraft durch die Kraft selbst, nämlich M durch P, so folgt der Hebelsarm CL an welchem dieser Druck wirkt

$$CL=\frac{(a-h')(a+\frac{1}{2}h')}{3a\cos\varepsilon}+x\sin\varepsilon$$

die Lage des Angriffspunktes I, in welchem die Kraft thätig ist, hinsichtlich der inneren Kante D am Fuße der Mauer, ergibt sich aus der letzten Gleichung $x=0$ setzend

$$DI=\tfrac{1}{3}(a-h')(a+\tfrac{1}{2}h') : a\cos\varepsilon$$

304. *Aufgabe.* Die erforderliche Dicke der Futtermauer an ihrem Fuße zu bestimmen, wenn ihre Höhe und das Verhältniß der Anlage der äußeren Mauerböschung zu ihrer Höhe bekannt ist.

Auflösung. Sei H die Höhe DE der Futtermauer, das Verhältniß, $DE:BM=1:n$, also $BM=nH$, g' das Gewicht der kubischen Einheit der Mauer, so findet man die Dicke x aus der Gleichung

$$x=H[+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\varepsilon(1-\alpha)+\sqrt{[\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}^2\varepsilon(1-\alpha)^2-\tfrac{1}{3}(\operatorname{tg}^2\varepsilon-n^2-\beta)]}$$

in welcher Kürze halber

$$\alpha=\frac{g't^2}{g'}\cdot\frac{a(a-h')}{H^2}\cos^2\varepsilon,\quad \beta=\frac{g't^2}{g'}\cdot\frac{(a-h')^2(a+\frac{1}{2}h')}{H^3}$$ bedeutet.

Beweis. Das Moment der Futtermauer $ABCD$ ist gleich dem Momente des Rechtecks $DEMC$, weniger der Momente der Dreiecke DEA und BMC, mithin ist

$$M=g'H[\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{6}n^2H^2+\tfrac{1}{2}H\operatorname{tg}\varepsilon(x+\tfrac{1}{3}H\operatorname{tg}\varepsilon)]$$
$$=\tfrac{1}{3}g'H[x^2+xH\operatorname{tg}\varepsilon+\tfrac{1}{4}H^2(\operatorname{tg}^2\varepsilon-n^2)]$$

Damit zwischen dem Drucke der Erde und dem Widerstande der Mauer ein Gleichgewicht Statt finde, müssen die beiden Momente einander gleich sein, also nach (302)

$$\tfrac{1}{2}gt^2[(\tfrac{1}{3}(a-h')^2(a+\tfrac{1}{2}h')+a(a-h')x\sin\varepsilon\cos\varepsilon]$$
$$=\tfrac{1}{2}g'H[x^2+xH\operatorname{tg}\varepsilon+\tfrac{1}{4}H^2(\operatorname{tg}^2\varepsilon-n^2)]$$

hieraus findet man mit Berücksichtigung der Bedeutungen von α und β, $\tfrac{1}{6}gt^2(a-h')^2(a+\tfrac{1}{2}h')=\tfrac{1}{6}\beta g'H^3$

$\tfrac{1}{2}gt^2a(a-h')x\sin\varepsilon\cos\varepsilon=\tfrac{1}{2}g'H^3\alpha x\operatorname{tg}\varepsilon$, somit wird

$\tfrac{1}{6}\beta g'H^3+\tfrac{1}{2}g'H^3\alpha x\operatorname{tg}\varepsilon=\tfrac{1}{3}g'Hx^2+\tfrac{1}{2}g'H^2x\operatorname{tg}\varepsilon+\tfrac{1}{6}g'H^3(\operatorname{tg}^2\varepsilon-n^2)$

und nach Beseitigung des gemeinschaftlichen Faktors $\tfrac{1}{2}g'H$

Digitized by Google

ergibt sich die quadratische Gleichung

$$x^2 \mp Hx \operatorname{tg}\varepsilon(1-\alpha) + {}^1/_2 H^2(\operatorname{tg}^2\varepsilon - n^2 - \beta) = 0$$

durch deren Auflösung sich der obige Ausdruck ergibt.

305. Anmerkung. Die hier vorgetragene Lehre vom Druck der Erde, verdankt man Coulomb und Français, sie wurde hauptsächlich der Schrift: Versuche über den Seitendruck der Erde ausgeführt auf den höchsten Befehl des Herrn General-Genie-Direktors Erzherzog Johann kais. Hoheit von *Carl Martony de Köszegh*. Wien 1828. 4. entnommen. Auch findet man in *Navier's* oben (33) citirten Schrift, deren Verdeutschung sehr an der Zeit wäre, viele interessante Untersuchungen über die Stabilität der Baulichkeiten verschiedener Art. Die Statik der gebräuchlichsten Holzverbindungen behandelt Eytelwein, B. II. S. 21 sehr gründlich, und die statische Baukunst Gerstner B. I. S. 385.

VIII. Die Kettenlinien.

1. Die gemeine Kettenlinie.

306. Erklärung. Wenn ein gleichmäßig dicker und biegsamer Faden mit seinen Enden an zwei festen Stützen aufgehängt wird, und dann seiner eigenen Schwere überlassen wird, so entsteht im Zustande der Ruhe eine krumme Linie, welche man die gemeine Kettenlinie nennt. Die unbeweglichen Punkte, an welche die Enden des Fadens befestiget sind, heißen die Aufhängepunkte, der tiefste Punkt der Kettenlinie wird der Scheitel, und die vertikale Entfernung desselben, von der durch den höheren Aufhängepunkt (wofern nicht beide Aufhängepunkte in derselben horizontalen Geraden liegen) gezogenen horizontalen Geraden der Pfeil der Kettenlinie genannt. Wenn beide Aufhängepunkte in derselben horizontalen Geraden sich befinden, so heißt ihr Abstand die Spannweite der Kettenlinie. Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Kettenlinie eine Tangente desselben, und auch eine horizontale Gerade, so heißt der von beiden Geraden gebildete ebene Winkel der Stellungswinkel dieses Punktes: der Stellungswinkel des Aufhängepunktes wird auch der Aufhängewinkel genannt. Die Kraft, mit welcher jeder Punkt der Kettenlinie in der Richtung seiner Tangente gezogen wird, heißt die Spannung desselben.

307. Lehrsatz. Die Spannung in einem beliebigen Punkte

Digitized by Google

der Kettenlinie ist das Produkt aus der Spannung des Aufhängepunktes, dem Kosinus des Aufhängewinkels und der Sekante des Stellungswinkels.

Beweis. Sei AMB (Fig. 65) die an den Punkten A, B befestigte Kette, MT die Tangente des Punktes M, Q eine horizontale Gerade durch den Punkt M, somit $QMT=v$ der Stellungswinkel desselben, AT' eine Tangente des Aufhängepunktes A, und $DAT'=a$ die Stellungswinkel des Aufhängepunktes, ferner bezeichne man mit A der Spannung des Aufhängepunktes, und mit T die Spannung im Punkte M, endlich sei g das Gewicht der Längeneinheit der Kette, somit den Bogen $AM=s$ gesetzt, gs das Gewicht des Bogens AM. Nun zerlege man jede der Kräfte A und T in zwei Seitenkräfte, deren eine horizontal, die andere aber vertikal wirkt; so ist jene für alle Punkte der Kettenlinie unveränderlich, weil denn doch außer der Schwere keine anderweitigen Kräfte auf die einzelnen Theile des Fadens thätig sind, und die Wirkung einer vertikalen Kraft in horizontaler Richtung null ist; diese hingegen sind vom Gewichte des herabhängenden Theiles der Kettenlinie abhängig. Es sind aber $A\cos a$, $T\cos v$ die horizontalen, und $A\sin a$, $T\sin v$ die vertikalen Seitenkräfte der Spannungen A, T. Man hat sonach die Gleichungen:

$$\text{I. } T\cos v=A\cos a, \text{ und } T\sin v=A\sin a-gs,$$

quadrirt man diese Gleichungen, so gibt ihre Summe

$$\text{II. } T^2=A^2-2Ags.\sin a+g^2s^2$$

dividirt man aber dieselben Gleichungen mit einander, so folgt

$$\operatorname{tg} v=\frac{A\sin a-gs}{A\cos a} \text{ und } \sec^2 v=\frac{A^2-2Ags.\sin a+g^2s^2}{A^2\cos^2 a}$$

hieraus erhält man wegen II.

$$70)\quad T=A\cos a.\sec v.$$

308. Folgesatz. Hieraus ist zu ersehen, daß die Spannung von einem Punkte der Kettenlinie zum andern veränderlich ist. Im Anfangspunkte, wo $v=a$ ist, wird $T=A$: im untersten Punkte C aber, dessen Tangente horizontal, also der Stellungswinkel $v=0$ ist, wird $T=A\cos a$. Da nun $\sec v$ ihren kleinsten Werth für $v=0$ erhält, so folgt, daß im Scheitel der Kettenlinie die kleinste Spannung Statt habe.

Digitized by Google

309. **Erklärung.** Die kleinste Spannung der Kettenlinie durch das Gewicht ihrer Längeneinheit getheilt, gibt eine unveränderliche Zahl zum Quotienten, welche man den Parameter der Kurve nennt. Führt man durch den Scheitel C eine vertikale Gerade CD, trägt auf ihrer Verlängerung abwärts den Parameter CE auf, und zieht durch den so bestimmten Punkt E die Gerade XX' horizontal, so heißt sie eine Direktrix der Kettenlinie.

310. **Lehrsatz.** Die Länge des zwischen dem Scheitel und irgend einem Punkte der Kettenlinie enthaltenen Bogens ist die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen andere Kathete der Parameter und dessen Hypothenuse der Abstand jenes Punktes der Kurve von der Direktrix ist.

Beweis. Setzt man die Bogenlänge vom Scheitel der Kettenlinie bis zum Aufhängepunkte A gleich l, so kann diese aus der zweiten der Gleichungen I. bestimmt werden, wenn man erwägt, daß für den tiefsten Punkt die vertikale Spannung $T\sin v$ null sei, wodurch $A\sin\alpha - gl = 0$ wird, während die horizontale Spannung nach (309) den Werth gp enthält, wenn p den Parameter der Kettenlinie vorstellt. Zählt man aber die Bogenlängen vom Scheitel C an, so kommt in den Gleichungen I. $l-s$ statt s zu setzen, und man erhält für jeden Punkt M der Kurve, in welchem der Bogen s endigt, die Gleichungen $T\cos v = gp$, $T\sin v = gs$, woraus 71) $\operatorname{tg} v = \frac{s}{p}$ folgt.

Man verlängere die Tangente des Punktes M bis zu ihrem Zusammentreffen mit der Direktrix, und wähle die letztere zur Abszissenare eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Ursprung die Projektion E des Scheitels C auf die Direktrix ist, da nach (A. 1162) $\operatorname{tg} MTP = dy : dx$ und nach Formel (71) $\operatorname{tg} v = s : p$ ist, so wird

72) $\frac{dy}{dx} = \frac{s}{p}$, also $ds = dy\sqrt{\left(\frac{dx^2}{dy^2}+1\right)} = dy\sqrt{\left(\frac{p^2}{s^2}+1\right)}$

woraus folgt 73) $ds = \frac{sds}{\sqrt{(p^2+s^2)}}$

die Integration gibt nach (911) sofort

Digitized by Google

$y=\sqrt{(p^2+s^2)}+C$, und weil $y=p$ für $s=0$, so ist $C=0$, mithin 74) $y=\sqrt{(p^2+s^2)}$ w. z. b. w.

311. Folgesatz. Um noch die Größen p, s, y durch den Stellungswinkel v auszudrücken, hat man aus Formel 71) $s=p\operatorname{tg}v$, und hiemit erhält man aus Formel 74) 75) $y=\sqrt{(p^2+p^2\operatorname{tg}v)}=p\sec v$, oder $p=y\cos v$, und 76) $s=y\sin v$.

312. Aufgabe. Die Koordinatengleichung der Kettenlinie zu finden, wenn die Direktrix zur Abszissenaxe, und in ihr der Fußpunkt des Scheitels zum Anfangspunkte gewählt wird.

Auflösung. Es ist $y=p\operatorname{Cos}\frac{x}{p}=\frac{1}{2}p\left(e^{\frac{x}{p}}+e^{-\frac{x}{p}}\right)$

Beweis. Man substituire den Werth von s aus der Formel 74) in die Formel 72), hiedurch wird

$$\sqrt{(y^2-p^2)}=p\frac{dy}{dx},\text{ woraus 77) }dx=\frac{pdy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}\text{ folgt,}$$

und nach Int. 66) wird

$$x=p\int\frac{dy}{\sqrt{(y^2-p^2)}}=p\operatorname{ArcCos}\frac{y}{p}$$

Durch Umkehrung dieser Gleichung findet man

$$\frac{y}{p}=\operatorname{Cos}\frac{x}{p},\text{ oder 78) }y=p\operatorname{Cos}\frac{x}{p},\text{ und nach (A. 655)}$$

$$79)\ y=\tfrac{1}{2}p\left(e^{\frac{x}{p}}+e^{-\frac{x}{p}}\right)$$

313. Folgesatz. Die Formel 79) liefert für $x=0$, $y=p$, und für gleich große positive und negative Werthe von x erhält y denselben positiven Werth. Die Direktrix liegt also ganz auf einer Seite der Kettenlinie, und diese wird von einer durch den Scheitel gezogenen vertikalen Geraden in zwei gleiche und ähnliche Hälften geschnitten.

314. Folgesatz 2. Da nach Formel 75) $y=p\sec v$, also $dy=p\sec v\operatorname{tg}v dv$ ist, so folgt aus Formel 77), $dx=p\sec v dv$, und daher nach Int. 20) wird 80) $x=p\mathfrak{L}v$, und hiemit aus Formel 78) erhält man $y=p\operatorname{Cos}.\mathfrak{L}v$, d. i. die Koordinaten der Kettenlinien sind hyperbolische Funktionen des Stellungswinkels.

Digitized by Google

315. Folgesatz 3. Wenn also der Parameter der Kettenlinie bekannt ist, so lassen sich für beliebig angenommene Werthe von v, die zugehörigen Werthe von x und y sofort aus den Tafeln der hyperbolischen Funktionen unmittelbar entnehmen, indem man sie nur noch mit dem Werthe von p zu multiplizirn um hiemit die Kurve mit aller Schärfe zu verzeichnen.

316. Aufgabe. Aus der Spannweite und dem Pfeil der Kettenlinie ihren Parameter zu finden.

Auflösung. Sei $2b$ die Spannweite, und δ der Pfeil der Kettenlinie, sei ferner a der unbekannte Aufhängewinkel, man setze $\frac{b}{\delta}=m$, so ist $m=\frac{\mathfrak{L}a}{\mathfrak{Cos}\mathfrak{L}a-1}$ eine transzendente Gleichung, aus welcher sich die Größe a nach (A. 891) bestimmen läßt. Mit dem so gefundenen Werthe von a, folgt $p=b:\mathfrak{L}a$.

Beweis. Verlängert man die Kettenlinie, bis sie die horizontale Gerade AD in einem Punkte B' schneidet, so ist $AB'=2b$, $CD=\delta$, also $DE=p+\delta$, nnd da der Aufhängewinkel $DAT'=a$ ist, so hat man nach (314) $b=p\mathfrak{L}a$, $p+\delta=p\mathfrak{Cos}\mathfrak{L}a$, somit

$$81)\quad \frac{b}{\delta}=m=\frac{\mathfrak{L}a}{\mathfrak{Cos}\mathfrak{L}a-1}$$

und es läßt sich a aus dieser transzendenten Gleichung sofort finden. Hiemit erhält man aus Formel 80) $p=b:\mathfrak{L}a$.

317. Folgesatz. Hat man so den Aufhängewinkel und den Parameter der Kettenlinie gefunden, so ergibt sich die Spannung C im Scheitel, wegen $A\cos a=pg$, 82) $C=pg$, die Spannung eines beliebigen Punktes, dessen Stellungswinkel v ist, in Formel 70) $A\cos a=pg$ gesetzt, 83) $T=pg\sec v$, also die Spannung im Aufhängepunkte, wo $v=a$ ist, 84) $A=pg\sec a$. Endlich erhält man aus Formel 72) die Bogenlänge $s=pdy:dx$. Differentiirt man aber die Gleichung 78), so folgt $dy=\mathfrak{Sin}\frac{x}{p}.dx$, hiemit

wird 85) $s=p\mathfrak{Sin}\frac{x}{p}$.

318. Anmerkung. Folgende Tafel, welche sich auf Grade bezieht, deren 90 auf einen Quadranten gehen, liefert den zu einem

Digitized by Google

gegebenen Werthe von a zwischen 10 und 30 Graden zugehörigen Werth von m

	Werthe von m									
a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10°	11.372	257	145	035	*927	822	718	616	515	417
11	10.321	226	133	042	*952	864	777	692	608	525
12	9.444	364	286	209	132	058	*984	912	840	770
13	8.701	632	565	499	434	370	307	244	183	122
14	8.062	003	*945	888	831	776	721	666	612	559
15	7.508	457	406	355	306	257	209	161	114	067
16	7.021	*976	931	887	843	800	757	715	673	632
17	6.591	551	511	471	432	394	356	318	281	244
18	6.208	172	136	101	066	031	*997	963	930	896
19	5.864	831	799	767	736	704	673	643	613	583
20	5.553	524	494	466	437	409	381	353	325	298
21	5.271	244	218	192	165	140	114	089	064	039
22	5.014	*989	965	941	917	894	870	847	824	801
23	4.778	756	734	712	690	668	646	625	604	582
24	4.562	541	520	500	380	460	440	420	400	381
25	4.361	342	323	304	285	267	248	230	212	194
26	4.176	158	140	123	105	088	071	054	037	020
27	4.003	*987	970	954	938	921	905	889	874	858
28	3.842	827	811	796	781	766	751	736	721	706
29	3.692	677	663	649	634	620	606	592	578	564

Die Werthe von m bestehen aus einer ganzen Zahl und drei Dezimalstellen: die erstere erscheint allein in der mit 0 bezeichneten Spalte, und gilt sofort für alle anderen in derselben horizontalen Zeile befindlichen Zahlen, sobald nicht eine mit einem Stern *) bezeichnete Zahl vorkommt, da dann für diese und die darauf folgenden die zugehörige ganze Zahl um 1 zu vermindern ist. So findet man für $a=10°.9$, $m=10.417$, für $a=13°.4$, $m=8.434$ u. s. f. Ueber $a=30°$ hinaus, und zwar von $a=30°$ bis $a=84°$ findet man die Werthe von m aus nachstehender Tafel:

Digitized by Google

a	m	a	m	a	m	a	m	a	m
30°	3.551	41°	2.418	52°	1.708	63°	1.186	74°	0.747
31	418	42	341	53	655	64	144	75	708
32	293	43	267	54	599	65	103	76	669
33	175	44	196	55	553	66	062	77	630
34	3.063	45	128	56	503	67	1.021	78	591
35	2.957	46	2.062	57	455	68	0.981	79	552
36	856	47	1.998	58	408	69	941	80	512
37	760	48	936	59	362	70	902	81	471
38	669	49	877	60	317	71	863	82	430
39	582	50	819	61	273	72	824	83	388
40	498	51	762	62	229	73	785	84	344

Man wird also aus der gegebenen halben Spannweite b und dem Pfeile der Kettenlinie δ zuerst den Bruch $m=b:\delta$ in drei Dezimalen entwickeln, hierauf geht man mit dem gefundenen Werthe von m in die Tafel, und sucht den ihnen zugehörigen Werth von a. Hat man diesen durch Interpolation in Graden und Dezimaltheilen gefunden, so multiplizire man denselben mit $^{10}/_{9}$, so ist das Ergebniß der Aufhängewinkel a in Graden, deren 100 auf einen Quadranten gehen, weil auf diese letztere allein sich die bereits berechneten Tafeln hyperbolischer Funktionen beziehen.

Beispiel. Die Spannweite einer Kettenlinie sei 560 Fuß, und der Pfeil 51 Fuß, wie groß ist der Aufhängewinkel, der Parameter, ihre Länge und die Spannung der Aufhängepunkte? Für $2b=560$, $\delta=51$, wird $m=5.490$, und die Tafel gibt a zwischen 20°.2 und 20°.3. Durch Proportionaltheile ergibt sich $a=20°.214$, und in Centesimalgraden 22°.460. Nun ist aus den Tafeln *) $\mathfrak{L}22°.46=0.36036$, dessen Logarithme 0.55671—1, so- nach

$$\log b=\log 280=2.44716$$
$$\log 0.36036=0.55674-1$$
$$\log p=2.89042, \text{ also } p=777.00.$$

Gesetzt es wäre das Gewicht g der Längeneinheit der Kette 10 Pfunde, so ergibt sich die Spannung im Scheitel $A\cos a=pg=7770$

*) Diese Tafeln sind bereits unter der Presse, und erscheinen nächstens unter dem Titel „Tafeln der hyperbolischen Sektoren, der Logarithmen ihrer Sinus und Tangenten und der elliptischen Bogenlängen" im Buchhandel.

Digitized by Google

und nach Formel 84) die Spannung im Aufhängepunkte $pg\sec\alpha = 8280$ Pfunde, endlich nach Formel 71) die Kettenlänge $2l = 2p\operatorname{tg}v = 572.2$ Fuß. Will man die Konstruktion der Kurve vollenden, so wird man zwischen den Grenzen $v=0$ und $v=22°.460$ für gleiche Zunahmen des Stellungswinkels v, welche nicht sehr klein zu sein brauchen, die zugehörigen Werthe der Größen x, y berechnen. Sind auf diese Weise mehrere einzelne Punkte der Kurve bestimmt, so wird man durch sie aus freier Hand eine Kurve legen, welche desto genauer bestimmt sein wird, je mehr Zwischenpunkte man gewählt hat.

319. Lehrsatz. Wenn drei Ordinaten der Kettenlinie in gleichen Abständen von einander gezogen werden, so ist der Quotient aus der Summe der beiden äußeren mit der mittleren Ordinate von der Abszisse der äußeren Ordinate unabhängig.

Beweis. Seien (Fig. 66) $PM=\alpha$, $P'M'=\beta$, $P''M''=\gamma$ drei gleich weit abstehende Ordinaten der Kettenlinie ACm, mithin $PP'=P'P''=a'$, die Abszisse der ersten Ordinate sei $EP=x'$, und man setze Kürze halber

$$\frac{x'}{p}=x,\quad \frac{a'}{p}=a$$

so folgt aus der Formel 79)

$$\alpha=\tfrac{1}{2}p(e^{x}+e^{-x}),\ \beta=\tfrac{1}{2}p(e^{x+a}+e^{-x-a}),\ \gamma=\tfrac{1}{2}p(e^{x+2a}+e^{-x-2a})$$

hieraus findet man $\alpha+\gamma=\tfrac{1}{2}p(e^{x}+e^{x+2a}+e^{-x}+e^{-x-2a})$ und dieses mit β dividirt, gibt

$$\frac{(\alpha+\gamma)}{\beta}=\frac{e^{x+2a}+e^{x}+e^{-x-2a}+e^{-x}}{e^{x+a}+e^{-x-a}}=e^{a}+e^{-a}$$

eine konstante von dem Werthe der Abszisse x unabhängige Größe.

320. Folgesatz. Ist also $EP=EP'=Ep$, und man zieht im Punkte p die Ordinate $pm=\alpha$, so wird wegen (319), da α, p, α drei Ordinaten in gleichen Abständen vorstellen,

$\frac{2\alpha}{p}=e^{a}+e^{-a}$, sonach $\frac{\alpha+\gamma}{\beta}=\frac{2\alpha}{p}$, und $\gamma=\frac{\alpha}{p}(2\beta-p)$.

321. Aufgabe. Aus der Spannweite und dem Pfeile der

Digitized by Google

Kettenlinie die Lage beliebig vieler Punkte derselben zu bestimmen.

Auflösung. Man theile die halbe Spannweite EF (Fig. 66) in eine Anzahl gleicher Theile, welche irgend eine Potenz von zwei ist, z. B. in 8 gleiche Theile, bezeichne die Theilungspunkte vom Anfangspunkte E an, mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, und die ihnen zugehörigen Ordinaten mit (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7): bemerkt man nun, daß die in den Punkten E, F befindlichen Ordinaten beziehungsweise p und $p+\delta$ sind, so hat man wegen (319)

$\frac{2p+\delta}{(4)}=\frac{2(4)}{p}$, dieß gibt (4) $=\frac{1}{2}\sqrt{2p(p+\delta)}=\alpha$ Kürze halber

$\frac{(1)+p}{(2)}=\frac{2(2)}{p}$, daher (2) $=\frac{1}{2}\sqrt{2p(\alpha+p)}=\beta$

$\frac{(6)+(2)}{(4)}=\frac{2(2)}{p}$, somit (6) $=\frac{b}{p}(2\alpha-p)=r$

Ferner ist

$$\frac{(2)+p}{(1)}=\frac{2(1)}{p}=\frac{(3)+(1)}{(2)}=\frac{(5)+(3)}{(4)}=\frac{(7)+(5)}{(6)}$$

und hieraus findet man

$$(1)=\tfrac{1}{2}\sqrt{2p(\beta+p)}=\varepsilon,\quad (3)=\frac{\varepsilon}{p}(2\beta-p),\quad (5)=\frac{2\alpha\varepsilon}{p}-(3)$$

$$(7)=\frac{2\alpha\gamma}{p}-(5)$$

man hat also nur drei Ordinaten, nämlich (4), (2) und (1) durch Ausziehung der Quadratwurzel zu berechnen, die übrigen Ordinaten ergeben sich durch Multiplikation und Division aus den schon gefundenen.

Wollte man EF in 16 Theile abtheilen, so wären die Ordinaten an den geraden Theilungspunkten 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, mit den bereits bestimmten Ordinaten (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) einerlei, und für die Ordinaten an den ungeraden Theilungspunkten, hätte man die Gleichungen:

$$\frac{(2)+p}{(1)}=\frac{2(1)}{p}=\frac{(3)+(1)}{(2)}=\frac{(5)+(3)}{(4)}=\frac{(7)+(5)}{(6)}=\frac{(9)+(7)}{(8)}$$

$$=\frac{(11)+(9)}{(10)}=\frac{(13)+(11)}{(12)}\text{ u. s. f.}$$

Digitized by Google

aus denen sich

$$(1)=\tfrac{1}{2}\sqrt{2p(p+\varepsilon)},\ (3)=\frac{(1)}{p}(2\beta-p)\ \text{u. s. f.}$$

finden läßt.

322. Aufgabe. Aus der Lage des einen Aufhängepunktes gegen den anderen, und aus der Länge der Kette den Parameter zu bestimmen.

Auflösung. Die Lage des tieferen Aufhängepunktes B (Fig. 65) sei durch die Größen $AF=b$ und $BF=c$ gegeben, ferner sei die Länge der ganzen Kette $ACB=l$, so ist, wenn man die transzendente Gleichung

$$\frac{1}{2\alpha}(e^{\alpha}+e^{-\alpha})=\sqrt{\frac{l^2-c^2}{b^2}}\ \text{auflöset},\ p=\frac{b}{2\alpha}.$$

Beweis. Setzt man in Formel 85) statt $\mathrm{Sin}(x:p)$ seinen Werth aus (A. 655), so erhält man

I. $s=\tfrac{1}{2}p(e^{\frac{x}{p}}-e^{-\frac{x}{p}})$, und nach Form. 79) $y=\tfrac{1}{2}p(e^{\frac{x}{p}}+e^{-\frac{x}{p}})$

Sei nun $AD=k$, $DF=k'$, $AC=s$, $CB=s'$, also $k+k'=b$ $s+s'=l$, ferner der Pfeil $CD=\delta$, somit $AG=p+\delta$, $BI=p+\delta-c$, so ergibt sich aus I. für $x=k$

$$\text{II. } s=\tfrac{1}{2}p(e^{\frac{k}{p}}-e^{-\frac{k}{p}}),\ p+\delta=\tfrac{1}{2}p(e^{\frac{k}{p}}+e^{-\frac{k}{p}})$$

und für $x=-k'$

$$\text{III. } s'=\tfrac{1}{2}p(e^{\frac{k'}{p}}-e^{-\frac{k'}{p}}),\ p+\delta-c=\tfrac{1}{2}p(e^{\frac{k'}{p}}+e^{-\frac{k'}{p}}).$$

Die Summe und der Unterschied der Gleichungen II. und III. liefert

$$s+s'=l=\tfrac{1}{2}p(e^{\frac{k}{p}}-e^{-\frac{k}{p}}+e^{\frac{k'}{p}}-e^{-\frac{k'}{p}})$$

$$c=\tfrac{1}{2}p(e^{\frac{k}{p}}+e^{-\frac{k}{p}}-e^{\frac{k'}{p}}-e^{-\frac{k'}{p}})$$

hieraus folgt

$$\text{IV. } l+c=p(e^{\frac{k}{p}}-e^{-\frac{k'}{p}}),\ l-c=p(e^{\frac{k'}{p}}-e^{-\frac{k}{p}})$$

deren Produkt sofort gibt

Digitized by Google

$$l^2-c^2=p^2\left(e^{\frac{k+k'}{p}}+e^{-\frac{k+k'}{p}}-2\right)=p^2\left(e^{\frac{b}{p}}+e^{-\frac{b}{p}}-2\right)$$

setzt man also $\frac{b}{p}=2\alpha$, so folgt

$$l^2-c^2=p^2\left(e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}-2\right)=p^2\left(e^{\alpha}+e^{-\alpha}\right)^2, \text{ oder}$$

$$\text{V.}\quad \sqrt{\frac{l^2-c^2}{l^2}}=\frac{1}{2\alpha}\left(e^{\alpha}+e^{-\alpha}\right)=n$$

Wird also aus dieser transzendenten Gleichung α bestimmt, so erhält man $p=\frac{b}{2\alpha}$.

323 *Folgesatz.* Im Allgemeinen kann die Gleichung V. durch Versuche aufgelöset werden, und man findet daraus vermittelst des Werthes von n den von α so genau als man will. Ist n nur wenig von der Einheit verschieden; so ist der Werth von α sehr klein, entwickelt man alsdann die Exponentialgrößen e^{α}, $e^{-\alpha}$ nach (A. 624) in Reihen, und vernachlässiget die vierten Potenzen von α, so erhält man einfach $\alpha^2=6(n-1)$.

324. *Folgesatz 2.* Setzt man noch $k-k'=2p\beta$, so hat man $k=\frac{1}{2}b+p\beta$, $k'=\frac{1}{2}b-p\beta$, und der vorhin gefundene Werth von c kann so geschrieben werden

$$c=\tfrac{1}{2}p\left(e^{\frac{\alpha}{2p}}-e^{-\frac{\alpha}{2p}}\right)\left(e^{\beta}-e^{-\beta}\right),$$

wodurch man β aus c und p, und somit auch k und k' berechnen kann.

325. *Lehrsatz.* Für einen beliebigen Punkt der Kettenlinie, dessen Koordinaten x, y und Stellungswinkel v sind, hat man (Fig. 65) die Normale $MN=N$, die Tangente $MT=T$, die Subnormale $PN=n$, die Subtangente $PT=t$ gesetzt

$$N=p\sec^2 v=\frac{y^2}{p},\quad T=\frac{p\operatorname{tg}v}{\cos^2 v}=\frac{y^2}{s},\quad n=p\sec v\operatorname{tg}v=\frac{sy}{p},\quad t=\frac{py}{s}.$$

Beweis. Nach (A. 1167) ist

$$N=y\sqrt{(dx^2+dy^2)}:dx,\quad T=y\sqrt{(dx^2+dy^2)}:dy$$

setzt man hierin den Werth $dy:dx$ aus Formel 72), so ergibt sich

$$\frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx}=\frac{\sqrt{(p^2+s^2)}}{p}=\frac{y}{p}$$

Digitized by Google

nach Formel 74), demnach $N=y^2:p=p\sec^2 v$ nach Formel 75), und eben so findet man

$$T=\frac{y\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dy}=\frac{y\sqrt{(p^2+s^2)}}{s}=\frac{y^2}{s}=\frac{p\operatorname{tg}v}{\cos^2 v}$$

Ferner ist nach (A. 1166)

$$n=\frac{ydy}{dx},\ t=\frac{ydx}{dy}$$

und hieraus erhält man mittelst der Formeln 71) und 75)

$$n=p\sec v\operatorname{tg}v=\frac{sy}{p},\ t=\frac{py}{s}.$$

327. Folgesatz. Der letzte Ausdruck gibt zu erkennen, daß die Subtangente eines Punktes die vierte Proportionallinie zur Bogenlänge, Parameter und Ordinate sei; verzeichnet man also über dem Durchmesser $PM=y$ einen Kreis und überträgt man den Parameter p als Sehne PH, so ist eine durch die Punkte M und H gezogene Gerade MT eine Tangente des Punktes M: denn man hat $MH=\sqrt{(y^2-p^2)}=s$, und die ähnlichen Dreiecke MPH, PHT geben $MH:MP=PH:PT$ oder $s:y=p:t$, also $PT=t$, und folglich MT eine Tangente im Punkte M der Kettenlinie.

328. Lehrsatz. Der Krümmungshalbmesser eines Punktes der Kettenlinie ist seiner Normale gleich aber entgegengesetzt.

Beweis. Nach (A. 1212) ist $R=-\frac{ds^3}{dxd^2y}$: man hat aber, wenn dx konstant angenommen wird, durch die Differentiirung der Formel 72) $ds=\frac{pd^2y}{dx}$, hiedurch wird $R=-\frac{p^2(d^2y)^2}{dx^4}$, und nach Formel 72) und 74) ergibt sich

$$dy=\frac{dx\sqrt{(y^2-p^2)}}{p},\ \text{also}\ d^2y=\frac{ydxdy}{p\sqrt{(y^2-p^2)}}=\frac{ydx^2}{p^2}$$

und für diesen Werth von d^2y folgt $R=-y^2:p=-N$.

328. Folgesatz. Im Scheitel, wo $y=p$ ist, folgt $R=-p$, d. i. der Parameter der Kettenlinie ist der Krümmungshalbmesser im Scheitel der Kurve.

329. Anmerkung. Zur Uebung in der Integralrechnung mögen folgende Lehrsätze und Aufgaben nebst ihren Auflösungen dienen,

Digitized by Google

deren Beweise aufzufinden, dem eigenen Scharfsinne des Anfängers überlassen wird. Man findet sie übrigens in der Schrift: Theorie und Tafeln der Kettenlinie. Vom Dr. J. Ph. Kulik. Prag 1830.

330. Lehrsatz. Die Fläche zwischen dem Bogen einer Kettenlinie, den Ordinaten ihrer Endpunkte und der Direktrix ist dem Produkte aus dem Parameter und der Bogenlänge gleich.

331. Aufgabe. Die Oberfläche eines Kettenkonoids zu bestimmen.

Auflösung. Dreht sich der Bogen $CM=s$ um seine Direktrix, so wird die Oberfläche O dieses Rotationskörpers $O=\pi(ys+px)$: dreht sich aber der Bogen CM um die horizontale Gerade PQ, so findet man $O=\pi[s(y-2p)+px]$: dreht sich endlich der Bogen CM um seine vertikale Axe CY, so erhält man $O=2\pi(xs-py)$.

332. Aufgabe. Den Kubikinhalt eines Kettenkonoids zu bestimmen.

Auflösung. Bei der Rotation des Bogens um dessen Direktrix findet man den Inhalt $V=\frac{1}{2}pO$, wenn O die Oberfläche des Rotationskörpers vorstellt.

Dreht sich aber der Bogen CM um die Gerade MQ, so ist

$$V=\tfrac{1}{2}\pi p[s(y-4p)+3px],$$

und wenn die Umdrehung des Bogens um die vertikale Axe CY vor sich geht, ist $V=\pi[x^2y-2pxs+2p^2(y-p)]$.

333. Lehrsatz. Die Koordinaten des Schwerpunktes eines Kettenbogens von der Länge s, sind

$$x=x-\frac{py}{s},\quad y=\tfrac{1}{2}y+\frac{px}{2s}$$

334. Lehrsatz. Die Koordinaten des Schwerpunktes einer vom Bogen der Kettenlinie den Ordinaten seiner Endpunkte und der Direktrix eingeschlossenen ebenen Figur sind

$$y=\tfrac{1}{4}\left(y+\frac{px}{s}\right),\quad x=x-\frac{p(y-p)}{s}$$

335. Aufgabe. Den Schwerpunkt der Oberfläche und des Inhalts eines Kettenkonoids zu bestimmen.

Auflösung. Dreht sich der Bogen CM um eine vertikale

Digitized by Google

Axe, und bezeichnet man im Rotationskörper mit y den Abstand des Schwerpunktes von der Direktrix für seine Oberfläche, und mit y' für seinen Kubikinhalt, so hat man

$$y=\frac{x's+px-p(x^2+y^2)}{2(xs+py)},\quad y'=\frac{x^2y^2-px(ys+px)+\frac{1}{2}p^2(y^2+x^2)}{2[x^2y-2pxs+2p^2(y-p)]}.$$

336. Lehrsatz. Unter allen Kurven, welche durch dieselben Endpunkte mit der Kettenlinie hindurchgehen, und mit ihr dieselbe Länge haben, liegt der Schwerpunkt der Kettenlinie am tiefsten.

337. Folgesatz. Daraus folgt, daß das Kettenkonoid, welches durch die Umdrehung eines Bogens der Kettenlinie um ihre Direktrix erzeugt wird, die kleinste Oberfläche besitze, hingegen hat es die größte Oberfläche, wenn es durch die Umdrehung des Bogens MC um die Gerade AD entstanden ist.

2. Die gleichgespannte Kettenlinie.

338. Erklärung. Wenn der Querschnitt einer Kette, welche an ihren Enden aufgehängt wird, in jedem Punkte der Spannung dieses Punktes proportional ist, so bildet eine solche Kette von veränderlicher Dicke eine krumme Linie, welche man die gleichgespannte Kettenlinie nennt.

339. Folgesatz. Da die Querschnitte der Kette wie die Spannungen zunehmen, so wird die Flächeneinheit des Querschnittes in jedem Punkte dieser Kurve gleich viel gespannt, daher der Name der krummen Linie. Gudermann nennt diese Kurve die Longitudinale, weil sie die Längenzahlen (A. 751) eines hyperbolischen Bogens liefert. Siehe Crelle's Journal für Mathem. Band VI. S. 333.

340. Aufgabe. Die Bogenlänge der gleichgespannten Kettenlinie zu finden.

Auflösung. Ist v der Stellungswinkel für den im Scheitel anfangenden Bogen, so hat man 86) $s=p\mathfrak{L}v$.

Beweis. Seien A, B (Fig. 66) die Aufhängepunkte, C der Scheitel dieser Kettenlinie, und T die Spannung an einem Punkte M' nach der Richtung der Tangente MT dieses Punktes, dessen

Stellungswinkel $QM'T=v$ ist. Es sei σ die Länge eines gleichmäßig dicken Bogens, dessen Querschnitt dem kleinsten Querschnitte der Kette im Scheitel, den wir zur Einheit annehmen, gleich wäre, und welcher mit dem Bogen CM' der Kettenlinie ein gleiches Gewicht hätte, und es bezeichne u den veränderlichen Querschnitt der Kette im Punkte M', so wird I. $uds=d\sigma$.

Heißt nun g das Gewicht der Längeneinheit vom Bogen σ p den Parameter, wie (309) der Kurve, und man zerlegt die Spannung T des Punktes M' in eine vertikale Seitenkraft $T\sin v$, und in eine horizontale $T\cos v$, so erhält man die Gleichungen II. $T\sin v=g\sigma$, $T\cos v=gp$, also $T^2(\sin^2 v+\cos^2 v)=g^2(p^2+\sigma^2)$, oder 87) $T=g\sqrt{(p^2+\sigma^2)}$: es folgt aber aus I., weil die Querschnitte den Spannungen proportional sein sollen

$$u:1=d\sigma:ds=T:gp=g\sqrt{(p^2+\sigma^2)}:gp,$$

demnach ist

$$\frac{d\sigma}{ds}=\frac{\sqrt{(p^2+\sigma^2)}}{p}\text{. oder 88) }ds=\frac{pd\sigma}{\sqrt{(p^2+\sigma^2)}}$$

welches nach Int. 63) mit Rücksicht auf die Konstante

$$\text{III. } s=p\lambda\frac{\sigma+\sqrt{(p^2+\sigma^2)}}{p}\text{ liefert.}$$

Dividirt man die Gleichungen II., so folgt

$$89)\ \operatorname{tg}v=\frac{\sigma}{p},\ \text{also } 90)\ \sec v=\frac{\sqrt{(p^2+\sigma^2)}}{p}$$

hiedurch verwandelt sich die Gleichung III. in $s=p\lambda(\operatorname{tg}v+\sec v)=p\lambda\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}v)$, oder, wegen (A. 748) wird 91) $s=p\mathfrak{L}v$.

341. Aufgabe. Die Gleichung der gleichgespannten Kettenlinie zu finden.

Auflösung. Nimmt man die in der Entfernung $CE=p$ gezogene Direktrix XX' zur Abszissenaxe, und die durch den Scheitel gehende Vertikale EY zur Ordinatenaxe, so hat man die gesuchte Gleichung $y=p(\lambda\sec\frac{x}{p}+1)$.

Beweis. Wegen der gleichen Winkel $M'TP$, $QM'T$ hat man (A. 1162)

Digitized by Google

92) $\operatorname{tg} v = \frac{dy}{dx}$, und also $\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}{dx} = \sec v$

oder wegen Formel 90) wird

$$\text{IV.} \quad \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{(p^2+\sigma^2)}}{p}$$

Dividirt man nun die Formel 88)

$ds = \frac{p^2 d\sigma}{\sqrt{(p^2+\sigma^2)}}$ mit dem Ausdrucke IV., so folgt

$$\text{V.} \quad dx = \frac{p^2 d\sigma}{p^2+\sigma^2}, \text{ und } dy = \frac{p\sigma d\sigma}{p^2+\sigma^2}$$

weil nach Formel 92) $dy = dx \operatorname{tg} v = \sigma dx : p$ ist.

Integrirt man die Ausdrücke V. nach Int. 55) und 38), so erhält man

$$x = p \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{p}, \quad y = {}^1/_2 p \lambda (p^2+\sigma^2) + C$$

oder weil für $\sigma = 0$, $y = p$ wird, so findet man $C = p - {}^1/_2 p \lambda p^2$, mithin ist $y = p\lambda \sqrt{\frac{p^2+\sigma^2}{p^2}} + p = p\lambda \sec v + p$, wegen Formel 90).

Die Formel 89) liefert aber

$v = \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{p}$, also 93) $x = pv$, hiemit erhält man

$$94) \quad y = p(\lambda \sec \tfrac{x}{p} + 1).$$

342. Folgesatz. Die gleich gespannte Kettenlinie ist eine transzendente Kurve, die ganz auf einer Seite der Direktrix liegt, und von der Ordinatenaxe in zwei gleiche und ähnliche Hälften getheilt wird. Denn für gleich große positive und negative Werthe von x, erhält y denselben Werth, weil offenbar $\sec(-v) = \sec v$ ist.

343. Anmerkung. Für die gleichgespannte Kettenlinie ergeben sich leicht folgende Ausdrücke in hyperbolischen Funktionen. Aus Formel 91) hat man $s : p = \tau$ setzend $\tau = \mathfrak{L} v$, und nach (A. 748) $\tau = \operatorname{Arc} \operatorname{Tg}(\sin v)$, mithin durch Umkehrung $\operatorname{Tg} \tau = \sin v$, d. i.

$$\text{I.} \quad \operatorname{Tg} \frac{s}{p} = \sin \frac{x}{p}, \text{ weil } v = px \text{ ist:}$$

folglich nach (A. 750), $\operatorname{Cos} \tau = \sec v$, und $\operatorname{Sin} \tau = \operatorname{tg} v$, oder

Digitized by Google

$$\text{II. } \operatorname{Sin}\frac{s}{p}=\operatorname{tg}\frac{x}{p}=\operatorname{tg}v.$$

Es ist aber $\operatorname{tg}v=\frac{dy}{dx}$, demnach $dy=dx\operatorname{tg}\frac{x}{p}$,

und nach Int. 14)

$$\text{III } y=-\lambda\cos\frac{x}{p}=\lambda\sec\frac{x}{p}, \text{ oder IV. } e^{\frac{y}{\lambda}}=\sec\frac{x}{p},$$

wenn nämlich die Abszissenaxe eine Tangente des Scheitels wird, so daß y mit x zugleich verschwindet. Da nun auch $\operatorname{Cos}\tau=\sec v$ ist, so erhält man aus III. auf der Stelle, V. $y=\lambda\operatorname{Cos}\frac{s}{p}$

welche Formel den Zusammenhang zwischen y und s ausdrückt.

344. Lehrsatz. Die gleichgespannte Kettenlinie besitzt zwei vertikale Asymptoten, welche um die Größe $\frac{1}{2}p\pi$ vom Anfangspunkte entfernt sind.

Beweis. Sei MCm (Fig. 67) die krumme Linie, KL ihre Direktrix, man beschreibe mit dem Halbmesser $OK=p$ um den Mittelpunkt O einen Halbkreis KCL, übertrage die Abszisse OP irgend eines Punktes M von C gegen D so, daß der Bogen $CD=OP=x$ sei, und ziehe den Halbmesser OD; so ist der Winkel $COD=x:p=v$. Verzeichnet man nun an der Geraden MQ einen Winkel $TMQ=COD$, so ist MT eine Tangente des Punktes M der Kurve. Je mehr sich aber ein Punkt M vom Scheitel C entfernt, desto größer wird x, und v, gemäß der Gleichung $v=x:p$, bis $v=\frac{1}{2}\pi$ wird, da dann x den Werth $x=\frac{1}{2}p\pi$ erhält, und es wird nach der Gleichung IV. $y=\infty$, d. i. für die Abszisse $OR=\frac{1}{2}p\pi$, ist die zugehörige Ordinate RU unendlich groß, und diese Gerade somit eine Asymptote der Kurve.

345. Lehrsatz. In der gleichgespannten Kettenlinie ist der Krümmungshalbmesser eines beliebigen Punktes mit dem Stellungswinkel v, 95) $R=p\sec v$.

Beweis. Man hat aus F. 92) $dy=dx\operatorname{tg}v=pdv\operatorname{tg}v$, mithin $d^2y=pdv^2\sec^2v$, und $dxd^2y=p^2dv^3\sec^2v$, ferner ist $ds=p\sec v dv$ mit diesen Werthen ergibt sich

$$R=-\frac{ds^3}{dxd^2y}=-\frac{p^3\sec^3v.dv^3}{p^2\sec^2v.dv^3}=-p\sec v.$$

Digitized by Google

346. Folgesatz. Im Scheitel der Kurve, wo $v=o$ ist, erhält man $R=-p$: demnach ist auch hier der Parameter gleich dem Krümmungshalbmesser im Scheitel.

347. Folgesatz. 2 Nach Formel 87) ist die Spannung eines beliebigen Punktes $T=g\sqrt{(p^2+\sigma^2)}$, setzt man hierin den Werth für $\sqrt{(p^2+\sigma^2)}$ aus Form. 90); so ergibt sich $T=gp\sec v$, und ohne Rücksicht auf das Zeichen 96) $T=gR$, d. i. die Spannung in einem beliebigen Punkte ist das Gewicht eines Prisma, dessen Länge der Krümmungshalbmesser des Punktes, und dessen Querschnitt dem Querschnitte der Kurve im Scheitel gleich kommt.

348. Aufgabe. Aus der Spannweite, und dem Pfeile der gleichgespannten Kettenlinie den Parameter zu bestimmen.

Auflösung. Sei $2b$ die Spannweite, δ der Pfeil, a der Aufhängewinkel der Kettenlinie, man setze $\frac{b}{\delta}=m=\frac{a}{\lambda\sec a}$, und suche aus dieser Gleichung den Werth von a, so wird $p=b:a$.

Beweis. Für die Abszisse $x=b$, und $v=a$, folgt $b=pa$, ferner ist $y=p+\delta=p\lambda\sec a+p$, sonach $\delta=p\lambda\sec a$: hiemit wird 97) $m=\frac{a}{\lambda\sec a}$ eine transzendente Gleichung, aus welcher, da m gegeben ist, a zu bestimmen kommt. Hat man a gefunden, so gibt die Gleichung $b=pa$ sofort p.

349. Anmerkung. Die Auflösung dieser transzendenten Gleichung zu ersparen, kann man eine Tafel entwerfen, welche zu jedem gegebenen m das zugehörige a liefert. Um eine solche Tafel mittelst der gewöhnlichen Logarithmen-Tafeln, in welchen die natürlichen Logarithmen der Sekanten nicht vorkommen, zu berechnen, bringe man den Ausdruck für m auf die Form
$\log m=\log a-\log(\lambda\sec a)$, und weil $\lambda\sec a=2.3025851\log\sec a$
demnach $\log(\lambda\sec a)=\log 2.3025851+\log(10-\log\cos a)$
$=0.3622157+\log\mathfrak{D}.\mathfrak{L}.\log\cos a$,
so wird hiedurch
$\log m=\log a-\log\mathfrak{D}.\mathfrak{L}.\log\cos a-0.3622157$. Ist aber a in Graden und Dezimaltheilen des Grades gegeben, also $a=n.1°$,

Digitized by Google

und $\log a = \log n + \log 1^0 = \log n + 0.2418773 - 2$, so kann man die zwei konstanten Zahlen in eine einzige 0.8796616—2 vereinigen, und man erhält $\log m = \log n + 0.8796716 - 2 - \log \mathfrak{D}.\mathfrak{E}.\log\cos a$.

Die nach dieser Formel berechneten Zahlen enthält folgende Tafel von $a = 10^0$ bis $a = 30^0$ von Zehntel zu Zehntel Grad.

Werthe der Größe m

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10°	11.401	287	175	065	*957	852	748	647	547	449
11	10.353	259	166	075	*985	897	811	726	642	560
12	9.479	400	322	245	160	094	021	*949	877	807
13	8.739	671	604	538	473	409	346	284	223	162
14	8.103	045	*987	930	873	818	763	709	656	604
15	7.552	500	450	400	351	302	254	207	160	114
16	7.068	023	*978	934	891	848	806	764	722	681
17	6.641	601	561	522	483	445	407	370	333	296
18	6.260	224	189	154	119	085	051	018	*985	952
19	5.919	887	855	824	792	761	731	701	671	641
20	5.612	583	554	525	497	469	441	414	387	360
21	5.333	306	280	254	228	203	178	153	128	103
22	5.079	055	031	007	*983	960	937	914	892	870
23	4.847	824	802	780	758	737	716	695	674	653
24	4.632	612	592	572	552	532	512	493	474	455
25	4.435	416	398	379	361	342	324	306	288	270
26	4.253	235	218	201	183	166	149	133	116	100
27	4.083	067	051	035	019	003	*987	972	956	941
28	3.926	910	895	880	865	851	836	821	807	792
29	3.778	764	750	736	722	708	694	681	667	653

Ihre Einrichtung ist dieselbe wie in der Tafel (318): über 30 Grade hinaus sind die Werthe von m in nachstehender Tafel enthalten.

Beispiel. Sei die Spannweite 560 Fuß und der Pfeil 51 Fuß: man sucht den Aufhängewinkel, Parameter und Länge der Kettenlinie. Man hat $b = 280$, $\delta = 51$, mithin $m = 5.490$: hiemit findet man $a = 20^0.425$

Digitized by Google

$\log n = 1.3101621$	$\log b = 2.4471580$
$\log 1^0 = 0.2418773 - 2$	$\log a = 0.5520294 - 1$
$\log a = 0.5520394 - 1$	$\log p = 2.8951186$, $p = 785.45$

Ferner ist $^n/_8 \times 20^0.425 = 22^0.694 = a$, also aus der Tafel der hyperbolischen Sektoren $\mathfrak{L}a = 0.36428$, und $s = p\mathfrak{L}a = 286.1$, oder die Länge 572.2 Fuß.

a	m	a	m	a	m	a	m	a	m
30°	3.640	41°	2.543	52°	1.871	63°	1.392	74°	1.002
31	510	42	469	53	822	64	354	75	0.968
32	389	43	399	54	774	65	317	76	935
33	274	44	331	55	727	66	280	77	901
34	165	45	266	56	682	67	244	78	867
35	062	46	204	57	637	68	209	79	832
36	2.965	47	143	58	594	69	174	80	798
37	872	48	085	59	552	70	139	81	762
38	784	49	029	60	511	71	104	82	726
39	700	50	1.975	61	471	72	070	83	688
40	619	51	922	62	431	73	036	84	649

3. Die Kettenbrückenlinie.

350. Erklärung. Bilden die beweglichen Glieder einer beiderseits aufgehängten Kette, vom veränderlichen Querschnitte, eine gleich gespannte Kettenlinie, und man befestiget mittelst vertikaler Stangen, welche am Ende eines jeden Gliedes frei herabhängen, eine in horizontaler Richtung gleichförmig vertheilte Last, so heißt die Krümmung, welche dann die Glieder der Kette annehmen, die Kettenbrückenlinie.

351. Erklärung. Sei $ABIB'A'$ (Fig. 69) eine aus beweglichen Gliedern bestehende Kette, deren Enden bei A und A' befestiget sind, und welche in den Punkten B und B' über zwei feste vertikale Stützen BHE, $B'H'E'$ geführt wird, in den Punkten wie F, M, I, F', wo die einzelnen Kettenglieder in einander greifen, hängen vertikale Stangen EG, MM', II', $F'G'$ von ungleicher Länge, deren untere Enden G, M', I', G' eine horizontale gleichförmig belastete Gerade GG' stützen. Die befestigten Enden A, A', welche gewöhnlich tiefer unter der Erde sich befinden, nennt man die Wurzelpunkte, die vertikalen Stützen, wie BHE die Tragpfeiler, denjenigen Theil AB der Kette, welcher zwischen

einem Wurzelpunkte und dem nächsten Tragpfeiler gelegen ist, die Spannkette, den übrigen Theil wie BIB' die Tragkette, die an ihr herabhängenden vertikalen Stangen, wie FG, die Tragstangen, und die horizontale Gerade GG' die Fahrbahn. Ferner heißen die Punkte B und B' an den Pfeilern, über welche die Kette läuft, die Aufhängepunkte, der horizontale Abstand BB' der Aufhängepunkte die Spannweite, der tiefste Punkt I der Tragkette der Scheitel, und der senkrechte Abstand NI des Scheitels von der Geraden durch beide Aufhängepunkte, der Pfeil der Tragkette.

352. Erklärung. Dividirt man die Spannung der Tragkette in ihrer Mitte, mit dem vereinigten Gewichte der Längeneinheiten der Tragkette im Scheitel, und der Fahrbahn, so nennt man den Quotienten den Parameter, und eine im Abstande OI des Parameters vom Scheitel horizontal gezogene Gerade OX die Direktrix der Kettenbrückenlinie. Endlich heißt der Quotient aus dem Gewichte der Längeneinheit der Tragkette, durch die Summe der Gewichte der Längeneinheiten der Tragkette und der Fahrbahn, der Modulus der Kettenbrückenlinie.

353. Erklärung. Schneidet man das Flußbett mit einer vertikalen Ebene durch die Kettenbrückenlinie, so heißt die horizontale Gerade SS' an der Oberfläche des fließenden Wassers der Wasserspiegel des Flußbettes, die Gerade UU' oder der Wasserspiegel während der größten Anschwellung des Flusses, der höchste Wasserspiegel, und die irreguläre Linie CRC' als Durchschnitt der vertikalen Ebene mit dem Boden des Flusses, dessen Sohle: der Wasserstand schließt mit der Sohle eine ebene unregelmäßige Figur, welche das Querprofil des Flußbettes genannt wird. Der Durchschnitt einer vertikalen Ebene nach der Richtung des fließenden Wassers heißt ein Längenprofil des Flußbettes.

354. Aufgabe. Aus dem Modulus und dem Parameter der Kettenbrückenlinie ihre Gleichung zu finden.

Auflösung. Man hat für den Parameter $OI=p$ (Fig. 69) dem Modulus q und dem Stellungswinkel v eines Punktes M dessen Koordinaten $OP=x$, $PM=y$ sind, sofort

Digitized by Google

$$y=\frac{p}{q}\lambda\sec\frac{x\sqrt{q}}{p}+p$$

die Gleichung der Kettenbrückenlinie.

Beweis. Sei g das Gewicht der Längeneinheit der Tragkette, h das der Fahrbahn, mithin 98) $q=\frac{g}{g+h}$: bezeichnet man noch mit T die Spannung eines Punktes M der Kurve, und zerlegt diese nach der Richtung der Tangente MT dieses Punktes wirkende Kraft in die zwei Seitenkräfte $T\cos v$ und $T\sin v$, so ist die horizontale Kraft $T\cos v$, aus dem schon erwähnten Grunde, für alle Punkte der Kurve konstant, sonach ist sie der Werth der Spannung im Scheitel I der Kurve, während die vertikale Kraft $T\sin v$ von dem Gewichte der herabhängenden Kettenlänge MI und des zugehörigen Theiles $M'I'$ der Fahrbahn abhängt. Man hat also 99) $T\cos v=p(g+h)$, dieß gibt $T=p(g+h)\sec v$, und weil die Querschnitte der Tragkette den zugehörigen Spannungen proportional sein sollen: so ist, wenn man den veränderlichen Querschnitt im Punkte M mit u bezeichnet, und den Querschnitt des Scheitels zur Einheit nimmt

$$u:1=T:p(g+h)=\sec v:1, \text{ also } u=\sec v$$

Hieraus folgt das Gewicht des Bogens $IM=g\int ds\sec v$, wenn die Bogenlänge $IM=s$ gesetzt wird, nun ist nach (A. 1162)

$$\cos v=\frac{dx}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}=\frac{dx}{ds}, \text{ daher } ds=\frac{dx}{\cos v}=dx\sec v,$$

folglich wird der Ausdruck für das Gewicht des Bogens IM

$$g\int dx\sec^2 v=g\int dx(1+\operatorname{tg}^2 v)$$

ferner ist das Gewicht des zugehörigen Stückes $M'I'$ der Fahrbahn $=hx$, man hat demnach

$$100)\quad T\sin v=hx+g\int dx(1+\operatorname{tg}^2 v)$$

dividirt man diesen Ausdruck mit der Formel 99), so erhält man

$$\operatorname{tg} v=\frac{hx+g\int dx(1+\operatorname{tg}^2 v)}{p(g+h)}$$

Durch Differentiirung dieser Gleichung ergibt sich

$$d\operatorname{tg} v=\frac{h dx+g dx(1+\operatorname{tg}^2 v)}{p(g+h)}$$

Digitized by Google

und hieraus findet man

$$dx=\frac{dtgv.p(g+h)}{g+h+gtg^2v}$$

d. i. wenn man Zähler und Nenner mit $g+h$ dividirt, und statt $g:(g+h)$ den Werth q aus der Formel 98) setzt, wird

$$101)\quad dx=\frac{pdtgv}{1+qtg^2v}$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach Int. 55), so ergibt sich $x=\frac{p}{\sqrt{q}}\text{arctg}(tgv\sqrt{q})$, und nach Einführung der Hilfsgröße

$$102)\quad tgw=tgv\sqrt{q},$$ erhält man 103) $x=\frac{pw}{\sqrt{q}}$ und $w=\frac{x\sqrt{q}}{p}$

Allein da $tgv=dy:dx$ ist, so hat man

$$dy=dxtgv,$$ und nach Formel 101) $dy=\frac{ptgv.dtgv}{1+qtg^2v}$

dessen Integrale nach Int. 73) $y=\frac{p}{2q}\lambda(1+qtg^2v)+C.$

und weil für $v=0$, $y=p$ wird, so ist die Konstante $C=p$, also vollständig

$$y=\frac{p}{2q}\lambda(1+qtg^2v)+p=\frac{p}{q}\lambda\sqrt{(1+qtg^2v)}+p$$

und bei Substituirung des Hilfswinkels w aus Formel 102) wird

$$y=\frac{p}{q}\lambda\sec w+p$$

endlich hierin statt w dessen Werth aus Formel 103) gesetzt, erhält man die gesuchte Gleichung

$$104)\quad y=\frac{p}{q}\lambda\sec\frac{x\sqrt{q}}{p}+p.$$

355. *Folgesatz.* Sei nun die Spannweite $BB'=2b$, der Pfeil $NI=\delta$, und α der Aufhängewinkel der Kettenbrückenlinie, so erhält man $v=\alpha$, $w=\alpha$, $x=b$, $y=p+\delta$ setzend, die Ausdrücke

$$105)\quad b=\frac{p\alpha}{\sqrt{q}},\quad 106)\quad \delta=\frac{p}{q}\lambda\sec\alpha,\text{ und }107)\quad \frac{b}{\delta}=\frac{\alpha\sqrt{q}}{\lambda\sec\alpha}=m$$

durch Auflösung der transzendenten Gleichung 107) ließe sich aus dem bekannten Modulus q der Hilfswinkel α bestimmen, woraus sich mittelst der Formel 105) der Parameter ergeben würde.

Digitized by Google

356. Anmerkung. Die große Mannigfaltigkeit der Kettenbrückenlinien begründet sich hauptsächlich in ihrem Modulus q, welcher der Gleichung 98) zufolge stets kleiner ist, als die Einheit, und größer als Null; es bezeichnen sonach die Annahmen $q=0$ und $q=1$ diejenigen zwei krummen Linien, deren erste die unendliche Reihe der Kettenbrückenlinien eröffnet, deren andere dieselbe schließt, und die daher die äußeren Grenzen aller Kettenbrückenlinien bilden.

357. Lehrsatz. Die Kettenbrückenlinie ist eine Parabel, wenn ihr Modulus verschwindet.

Beweis. Setzen wir in den Formeln 102), 103) und 104) $q=0$, so ergibt sich

$$x=\frac{pw}{\sqrt{q}}=\frac{p}{\sqrt{q}}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}v\sqrt{q})=\frac{0}{0}, \text{ und}$$

$$y-p=\frac{p}{q}\lambda\sec w=\frac{p}{q}\lambda\sec[\operatorname{arctg}(\operatorname{arctg}v\sqrt{q})]=\frac{0}{0}$$

und man hat nach Anleitung (A. 799) die Differentialquotienten des Zählers und Nenners dieser Funktionen in Beziehung auf q mit einander zu dividiren, und im Ergebnisse $q=0$ zu setzen. Differentiirt man die Formel 102), so erhält man nach (A. 765)

I. $dtgw=\frac{tgvdq}{2\sqrt{q}}$, sodann hat man $w=\operatorname{arctg}(tgw)$, und nach (A. 777)

II. $dw=\frac{dtgw}{1+tg^2w}=\frac{tgv.dq}{2\sqrt{q}(1+qtg^2v)}$, somit $\frac{dw}{dq}=\frac{tgv}{2\sqrt{q}(1+qtg^2v)}$

ferner ist $\frac{d\sqrt{q}}{dq}=\frac{1}{2\sqrt{q}}$, hiemit erhält man für $q=0$

108) $x=ptgv$. Ferner ist nach (A. 776) $d\lambda\sec w=tgwdw$, und bei Substitution ihrer Werthe aus der Gleichung II. und 102) wird

$$d\lambda\sec w=tgv\sqrt{q}.\frac{tgvdq}{2\sqrt{q}(1+qtg^2v)}=\frac{tg^2vdq}{2(1+qtg^2v)}$$

somit III. $\frac{d.\lambda\sec w}{dq}=\frac{tg^2v}{2(1+qtg^2v)}$, welches für $q=0$

109) $y-p=\frac{1}{2}ptg^2v$ liefert.

Wir wollen nun den Anfangspunkt der Koordinaten in den Scheitel I der Kurve versetzen, und die rechtwinkligen Koordinaten

Digitized by Google

eines Punktes M, $QI=x$, $QM=y$ nehmen; so kommt in Beziehung auf die vorigen Koordinaten statt x und y jetzt y und $p+x$ zu setzen, man erhält also aus Formel 108) $y=ptgv$, und aus Formel 109) $x=\frac{1}{2}ptg^2v$. Eliminirt man hieraus tgv, so ergibt sich sogleich 110) $y^2=2px$ die Gleichung einer Parabel mit dem Parameter $2p$.

358. Folgesatz. Die Kettenbrückenlinie wird streng genommen, nur dann eine Parabel, wenn die Tragkette als eine geometrische Linie ohne alles Gewicht angesehen werden kann. Ihr Parameter ist das Doppelte des Parameters der Kettenbrückenlinie.

359. Folgesatz 2. Setzt man in der Gleichung 110) $y=b$, $x=\delta$, so ergibt sich 111) $p=b^2:2\delta$. Differentiirt man aber die Formel 110), so folgt $\frac{dy}{dx}=tgv=\frac{p}{y}$, also für $y=b$, $v=a$ 112) $tga=b:2\delta$. Heißt C die Spannung im Scheitel und A die Spannung im Aufhängepunkte, g das vereinigte Gewicht der Tragkette und Fahrbahn für die Längeneinheit, so folgt aus Formel 99); 113) $C=pg=b^2g:2\delta$, 114) $A=b^2g\sec a:2\delta$.

360. Lehrsatz. Wenn der Modulus der Kettenbrückenlinie der Einheit gleich kommt, so ist die Kurve eine gleichgespannte Kettenlinie.

Beweis. Nach der Gleichung 102) folgt für $q=1$, $tgw=tgv$, mithin $w=v$, hiedurch verwandeln sich die Ausdrücke 103) und 104) in $x=pv$, $y=p\lambda\sec(x:p)+p$, wie (341) bei der gleichgespannten Kettenlinie.

361. Aufgabe. Das Gewicht der Tragkette vom veränderlichen Querschnitte und das Gewicht der Fahrbahn zu bestimmen.

Auflösung. Heißt G das Gewicht der halben Tragkette, H das Gewicht der halben Fahrbahn, so hat man

$$G=p\left(\frac{gtga}{q}-\frac{h\alpha}{\sqrt{q}}\right),\quad H=\frac{ph\alpha}{\sqrt{q}}$$

Beweis. Man bezeichne mit σ die Länge der gleichförmig dicken Kette vom Querschnitte $=1$, welche mit dem Bogen $IM=s$ einerlei Gewicht hätte, so hat man in Formel 100)

$gfdx(1+tg^2v)=g\sigma$, und daher $T\sin v=hx+g\sigma=hpw:\sqrt{q}+g\sigma$ und aus Formel 99) $T\cos v=p(g+h)$, deren Quadrate zusammen addirt, geben

$$T^2=p^2(g+h)^2+g^2\sigma^2+\frac{2g\sigma hpw}{\sqrt{q}}+\frac{h^2p^2w^2}{q}$$

woraus sich durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$\sigma^2+\frac{2hpw\sigma}{g\sqrt{q}}+\frac{h^2p^2w^2}{q}+\frac{p^2(g+h)^2}{g^2}-\frac{T}{g^2}=0 \text{ findet}$$

$\sigma=-\frac{hpw}{g\sqrt{k}}\pm\frac{1}{g}\sqrt{[T^2-p^2(g+h)^2]}$, und weil nach Formel 98) $g+h=\frac{g}{q}$, und nach Formel 99) $T=\frac{pg}{q}\sec v$ ist, so wird

$$\sigma=-\frac{hpw}{g\sqrt{q}}+\frac{p}{q}tgv,$$

wo nur das obere Zeichen der Wurzelgröße gelten muß, weil doch die Bogenlänge σ nicht negativ werden kann. Bezeichnet nun G das Gewicht der halben Tragkette, und H das der halben Fahrbahn, so kommt statt v und w sofort a und α zu setzen, und man erhält

115) $G=g\sigma=p.\left(\frac{gtga}{q}-\frac{h\alpha}{\sqrt{q}}\right)$, und wegen Formel 105)

$$H=bh=\frac{ph\alpha}{\sqrt{q}}.$$

362. *Folgesatz.* Durch Addition dieser Ausdrücke findet man

116) $G+H=pgtga:q=p(g+h)tga$,

d. i. der Aufhängewinkel der Kettenbrückenlinie ist nur vom Parameter und der ganzen Belastung abhängig.

363. *Aufgabe.* Die Bogenlänge in der Kettenbrückenlinie zu bestimmen.

Auflösung. Setzt man Kürze halber $tgw=t$, so erhält man

$$s=\frac{p}{q}\left[\lambda\frac{t+\sqrt{(q+t^2)}}{\sqrt{q}}+\sqrt{(1-q)}\lambda\frac{\sqrt{(q+t^2)}-t\sqrt{(1-q)}}{\sqrt{q(1+t^2)}}\right]$$

Beweis. Durch Differentiirung der Formeln 103) und 104) findet man

$$dx=\frac{pdw}{\sqrt{q}},\ dy=\frac{p}{q}\operatorname{tg}w.dw,\ \text{mithin}$$

$ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\frac{pdw}{q}\sqrt{(q+\operatorname{tg}^2w)}$, also für $\operatorname{tg}w=t$ wird

$dw\sqrt{(q+\operatorname{tg}^2w)}=\frac{dt\sqrt{(q+t^2)}}{1+t^2}$, und um $\sqrt{(q+t^2)}$ rational zu machen, setze man 117) $\sqrt{(q+t^2)}=u-t$, wo u eine unbestimmte Größe vorstellt, so erhält man leicht

$$t=\frac{u^2-q}{2u},\ dt=\frac{(u^2+q)du}{2u^2}$$

$$\sqrt{(q+t^2)}=\frac{u^2+q}{2u},\ \text{und}\ 1+t^2=\frac{u^4+2u^2(2-q)+q^2}{4u^2}$$

hiedurch verwandelt sich

$$\frac{dt\sqrt{(q+t^2)}}{1+t^2}\ \text{in}\ \frac{(u^2+q)^2du}{u(u^4+2u^2(2-q)+q^2)}$$

Da nun der Nenner dieser Bruchfunktion aus den Faktoren u, $u^2+2-q-2\sqrt{(1-q)}$ und $u^2+2-q+2\sqrt{(1-q)}$ besteht, so kann man zur Zerfällung derselben in Partialbrüche setzen

$$\frac{(u^2+q)^2}{u(u^4+2u^2(2-q)+q^2)}=\frac{A}{u}+\frac{Bu+C}{u^2+2-q-2\sqrt{(1-q)}}+\frac{B'u+C'}{u^2+2-q+2\sqrt{(1-q)}}$$

man findet auf dem bekannten Wege $A=1$, $B=-\sqrt{(1-q)}$, $C=0, B'=\sqrt{(1-q)}$, $C'=0$: mit diesen Werthen wird

$$ds=\frac{p}{q}\left[\frac{du}{u}-\frac{u\sqrt{(1-q)}du}{u^2+2-q-2\sqrt{(1-q)}}+\frac{u\sqrt{(1-q)}du}{u^2+2-q+2\sqrt{(1-q)}}\right]$$

nun ist nach Int. 37)

$$\int\frac{u\sqrt{(1-q)}du}{u^2+2-q\mp2\sqrt{(1-q)}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-q)}\lambda[u^2+2-q\mp2\sqrt{(1-q)}]$$

sonach wird

$$s=\frac{p}{q}\left[\lambda u+\tfrac{1}{2}\sqrt{(1-q)}\lambda\frac{u^2+2-q+2\sqrt{(1-q)}}{u^2+2-q-2\sqrt{(1-q)}}\right]$$

Führt man hier der Gleichung 117) gemäß $t+\sqrt{(q+t^2)}$ statt u ein, so ergibt sich

$$s=\frac{p}{q}\lambda[t+\sqrt{(q+t^2)}]$$

$$+\frac{p}{2q}\sqrt{(1-q)}\lambda\frac{t^2+t\sqrt{(q+t^2)}+1+\sqrt{(1-q)}}{t^2+t\sqrt{(q+t^2)}+1-\sqrt{(1-q)}}$$

Digitized by Google

Im Nenner des zweiten Gliedes erscheint die Differenz zweier Größen, deren Summe der Zähler enthält, multiplizirt man daher Zähler und Nenner durch die Summe derselben, so wird jetzt der Zähler $=[t^2+t\sqrt{(q+t^2)}+1+\sqrt{(1-q)}]^2$, und der Nenner $=(1+t^2)[t+\sqrt{(q+t^2)}]^2$, hierdurch verwandelt sich das zweite Glied in $\frac{p}{q}\sqrt{(1-q)}\lambda\frac{t^2+t\sqrt{(q+t^2)}+1+\sqrt{(1-q)}}{[t+\sqrt{(q+t^2)}]\sqrt{(1+t^2)}}$

$$=\sqrt{(1-q)}\lambda\left[\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}}+\frac{1+\sqrt{(1-q)}}{(t+\sqrt{(q+t^2)})\sqrt{(1+t^2)}}\right]$$

Man hat also $s=\frac{p}{q}\lambda[t+\sqrt{(q+t^2)}]$

$$+\sqrt{(1-q)}\lambda\left[\frac{t}{\sqrt{(1+t^2)}}+\frac{1+\sqrt{(1-q)}}{(t+\sqrt{(q+t^2)})\sqrt{(1+t^2)}}\right]$$

Das Integrale verschwindet für $t=0$, mithin findet man die zugehörige Konstante $=-\lambda\sqrt{q}-\sqrt{(1-q)}\lambda\frac{1+\sqrt{(1-q)}}{\sqrt{q}}$; hiedurch wird vollständig

$$s=\frac{p}{q}\lambda\frac{t+\sqrt{(q+t^2)}}{\sqrt{q}}+\frac{p}{q}\sqrt{(1-q)}\lambda\left[\frac{t}{1+\sqrt{(1-q)}}+\frac{1}{t+\sqrt{(q+t^2)}}\right]\sqrt{\frac{q}{1+t^2}}$$

also

118) $$s=\frac{p}{q}\left[\lambda\frac{t+\sqrt{(q+t^2)}}{\sqrt{q}}+\sqrt{(1-q)}\lambda\frac{\sqrt{(q+t^2)}-t\sqrt{(1-q)}}{\sqrt{q(1+t^2)}}\right].$$

364. *Folgesatz.* Um diese Formel in eine für die Berechnung bequemere Gestalt zu bringen, setze man überall statt t den Werth $tgw=tgv.\sqrt{q}$, so erhält man

$$\frac{t+\sqrt{(q+t^2)}}{\sqrt{q}}=tgv+\sqrt{(1+tg^2v)}=tgv+\sec v=tg(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}v)$$

$$\frac{\sqrt{(q+t^2)}}{\sqrt{q(1+t^2)}}=\frac{\sec v}{\sec w}=\frac{\cos w}{\cos v},\text{ und}$$

$$\frac{t\sqrt{(1-q)}}{\sqrt{q(1+t^2)}}=tgv\cos w\sqrt{(1-q)}=\frac{\sin v\cos w\sqrt{(1-q)}}{\cos v}$$

mit diesen Werthen verwandelt sich der Ausdruck für s in

119) $$s=\frac{p}{q}\left[\lambda v+\sqrt{(1-q)}\lambda\frac{\cos w}{\cos v}(1-\sin v\sqrt{(1-q)})\right]$$

Digitized by Google

365. Folgesatz 2. Für die Länge der halben Tragkette l hat man v, w mit a und α zu vertauschen, und es ergibt sofort

$$120)\quad l=\frac{p}{q}\mathfrak{L}a+\frac{p}{q}\sqrt{(1-q)}\lambda\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha}[1-\sin a\sqrt{(1-q)}].$$

366. Lehrsatz. Wenn die Kettenbrückenlinie in eine Parabel übergeht, so wird ihre Bogenlänge

$$121)\quad s=\tfrac{1}{2}p(\mathfrak{L}v+\operatorname{tg}v\sec v).$$

Beweis. Die Formel 119) liefert für $q=0$ den Werth von s unter der unbestimmten Form $s=\infty$: will man daher den bestimmten Werth von s ermitteln, so muß man die Differentialquotienten des Zählers und Nenners dieser Formel in Beziehung auf q entwickeln, und sodann $q=0$ setzen. Sei also zur Abkürzung

$$\frac{1-\sin v\sqrt{(1-q)}}{\cos v}=N,\ \text{wodurch}\ s=\frac{p}{q}\left[\mathfrak{L}v+\sqrt{(1-q)}\,\lambda\frac{N}{\sec w}\right]$$

wird, und man erhält, da $d\mathfrak{L}v=0$ ist

$$d\sqrt{(1-q)}\lambda\frac{N}{\sec w}=-\frac{dq}{2\sqrt{(1-q)}}\lambda\frac{N}{\sec w}+\sqrt{(1-q)}d\lambda\frac{N}{\sec w}$$

weiter ist

$$\sqrt{(1-q)}d\lambda\frac{N}{\sec w}=\sqrt{(1-q)}[d\lambda N-d\lambda\sec w]$$

$$=\sqrt{(1-q)}\left[\frac{dN}{N}-\frac{\operatorname{tg}^2v\,dq}{2(1+q\operatorname{tg}^2v)}\right]\ \text{wegen 357 III.}$$

$$=\frac{\sin v\,dq}{2(1-\sin v\sqrt{(1-q)})}-\frac{\operatorname{tg}^2v\sqrt{(1-q)}dq}{2(1+q\operatorname{tg}^2v)}.$$

Es ist sonach

$$\left(\frac{ds}{dq}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{(1-q)}}\lambda\frac{N}{\sec w}+\frac{\sin v}{2(1-\sin v\sqrt{(1-q)})}-\frac{\operatorname{tg}^2v\sqrt{(1-q)}}{2(1+q\operatorname{tg}^2v)}$$

und wenn man $q=0$ setzt, wodurch $\sec w=1$ wird,

$$\left(\frac{ds}{dq}\right)=-\tfrac{1}{2}\lambda N+\frac{\sin v}{2(1-\sin v)}-\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2v.$$

Man hat aber

$$-\tfrac{1}{2}\lambda N=-\tfrac{1}{2}\lambda\frac{1-\sin v}{\cos v}=-\tfrac{1}{2}\lambda(\sec v-\operatorname{tg}v)=\tfrac{1}{2}\mathfrak{L}v$$

$$\frac{\sin v}{2(1-\sin v)}=\frac{\operatorname{tg}v}{2(\sec v-\operatorname{tg}v)}=\frac{\operatorname{tg}v(\sec v+\operatorname{tg}v)}{2}=\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}v\sec v+\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2v$$

Digitized by Google

Durch Verbindung dieser Ausdrücke ergibt sich die Bogenlänge der Parabel s wie oben.

367. Folgesatz. Für die halbe Länge l der paraboliſchen Tragkette findet man, $v=a$ setzend, sofort

$$122)\quad l=\tfrac{1}{2}p(\mathfrak{L}a+\operatorname{tg}a\sec a).$$

Macht man aber in der Formel 119) $q=1$, so erhält man für die gleichgespannte Kettenlinie die Bogenlänge $s=p\mathfrak{L}v$ übereinstimmend mit (340).

368. Anmerkung. Die Voraussetzung, welche bisher bei der Kettenbrückenlinie gemacht wurde, daß das Gewicht der Tragstangen mit der Brückenbahn zu einer einzigen gleichförmig vertheilten horizontalen Last vereinigt werden kann, ist zwar der Natur der Kettenbrücken nicht ganz angemessen: denn nur das Gewicht der Fahrbahn allein kann als eine so vertheilte Last angesehen werden, während das Gewicht der Tragstangen vom Scheitel an gegen die Tragpfeiler beständig zunimmt, und zunächst derselben am größten wird. Erwägt man indessen, daß das Gewicht sämmtlicher Tragstangen, gegen das vereinigte Gewicht des Brückenweges und der zufälligen Belastung gehalten, nur geringfügig sein kann: so ist der Einfluß, welchen die ungleiche Vertheilung des Gewichtes der Tragstangen auf die Gestalt der Tragketten nehmen kann, ganz unbedeutend, und kann stets außer Acht gelassen werden.

369. Aufgabe. Die Lage des Kettengliedes an irgend einer Stelle der Tragkette zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet man mit s den Bogen IM der Tragkette, und mit v den Stellungswinkel des Punktes M, so hat man die Lage des im Punkte M endigenden Kettengliedes aus der Gleichung

$$123)\quad \operatorname{tg}v=\left(\frac{s}{p}\right)\left[1+\tfrac{1}{3}(q-\tfrac{1}{2})\left(\frac{s}{p}\right)^2+\tfrac{1}{5}(\tfrac{2}{3}q^2-\tfrac{7}{6}q+\tfrac{13}{24})\left(\frac{s}{p}\right)^4\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{7}\left(\frac{17}{45}q^3-\frac{43}{40}q^2+\frac{209}{120}q-\frac{493}{720}\right)\left(\frac{s}{p}\right)^6+\ldots\right]$$

Beweis. Die Formel 101) gibt

$$px=\frac{pd\operatorname{tg}v}{1+q\operatorname{tg}^2v},\quad dy=\frac{p\operatorname{tg}vd\operatorname{tg}v}{1+q\operatorname{tg}^2v}$$

Digitized by Google

sonach erhält man, wenn zur Abkürzung $tgv = t$ gesetzt wird,

$$dx = \frac{pdt}{1+qt^2},\quad dy = \frac{ptdt}{1+qt^2}$$

hiemit entsteht $ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)} = pdt\sqrt{(1+t^2)} : (1+qt^2)$.

Es ist aber, wenn die Wurzelgröße in eine nach den Potenzen von t^2 fortlaufende Reihe entwickelt wird,

$$\sqrt{(1+t^2)} = 1+{}^1/_2t^2-{}^1/_8t^4+{}^1/_{16}t^6-{}^5/_{128}t^8+\ldots \text{ und}$$

$$\frac{1}{1+qt^2} = 1-qt^2+q^2t^4-q^3t^6+q^4t^8+\ldots$$

Durch Multiplikation beider Reihen mit einander und Anordnung des Produktes nach den Potenzen von t, erhält man

$$ds = pdt(1+At^2+Bt^4+Ct^6+Dt^8+\ldots),$$

wobei I. $A = q-{}^1/_2$, $B = Aq-{}^1/_8$, $C = Bq-{}^1/_{16}$, $D = Cq-{}^5/_{128}$, und nach vollzogener Integration ergibt sich

$$s = p[t-{}^1/_3At^3+{}^1/_5Bt^5-{}^1/_7Ct^7+{}^1/_9Dt^9-].$$

Kehrt man nun diese Reihe um, und setzt

$$\text{II. } t = as+bs^3+cs^5+ds^7+es^9+\ldots,$$

wo a, b, c, d, e unbestimmte Koeffizienten vorstellen, so erhält man durch Erhebung dieses Ausdruckes zu den ungeraden Potenzen

$$\text{III.}\begin{cases} t^3 = a^3s^3+4a^2bs^5+3(ab^2+a^2c)s^7+(b^3+6abc+3a^2d)s^9 \\ t^5 = a^5s^5+5a^4bs^7+5(a^4c+2a^3b^2)s^9 \\ t^7 = a^7s^7+7a^6bs^9, \text{ und } t^9 = a^9s^9. \end{cases}$$

Durch Substitution dieser Werthe in der für t angenommenen Reihe II. ergeben sich, nachdem Alles nach den Potenzen von s geordnet worden, zur Bestimmung der Koeffizienten a, b, c, d, e folgende Gleichungen:

$$\text{IV.}\begin{cases} a = 1 : p \\ b-{}^1/_2Aa^3 = 0 \\ c-Aa^2b+{}^1/_5Ba^5 = 0 \\ d-A(ab^2+a^2c)+Ba^4b-{}^1/_7Ca^7 = 0 \\ e-{}^1/_2A(b^3+6abc+3a^2d)+B(a^4c+2a^3b^2)-Ca^6b+{}^1/_9Da^9 = 0 \end{cases}$$

setzt man in diesen Gleichungen für die Koeffizienten A, B, C, D ihre Werthe aus I., so findet man

Digitized by Google

V. $\begin{cases} a=1:p \\ b=(q-{}^1/_2):3p^3 \\ c=({}^5/_{12}q^2-{}^7/_6q+{}^{11}/_{24}):5p^5 \\ d=({}^{17}/_{45}q^3-{}^{43}/_{40}q^2+{}^{209}/_{120}q-{}^{493}/_{720}):7p^7 \\ e=({}^{62}/_{315}q^4-{}^{412}/_{315}q^3+{}^{62}/_{21}q^2-{}^{1993}/_{720}q+{}^{37369}/_{40320}):9p^9. \end{cases}$

Werden diese Werthe statt der Koeffizienten a, b, c, d, e in die Reihe II. substituirt, so erhält man sofort die Tangente des Stellungswinkels mittelst der Bogenlänge s, somit die Lage des zugehörigen Kettengliedes.

370. Folgesatz. Da die Spannung in irgend einem Punkte der Kettenbrückenlinie nach Formel 99) $T=p(g+h)\sec v$ ist, so kann man dieselbe durch eine Reihe, welche nach den Potenzen des Bogens s fortläuft, ausdrücken. Es ist aber

VI. $\sec v=\sqrt{(1+t^2)}=1+{}^1/_2t^2-{}^1/_8t^4+{}^1/_{16}t^6-{}^5/_{128}t^8+\ldots$

und man findet durch Erhebung der Reihe II. zu geraden Potenzen

VII $\begin{cases} t^2=a^2s^2+2abs^4+(b^2+2ac)s^6+2(bc+ad)s^8+(c^2+2bd+2ae)s^{10} \\ t^4=a^4s^4+4a^3bs^6+2(3a^2b^2+2a^2c)s^8+4(ab^2+3a^2bc+a^2d)s^{10} \\ t^6=a^6s^6+6a^5bs^8+3(5a^4b^2+2a^5c)s^{10} \\ t^8=a^8s^8+8a^7bs^{10}, \text{ endlich } t^{10}=a^{10}s^{10} \end{cases}$

mit diesen Werthen erhält man aus VI.

$$124)\quad \sec v=1+{}^1/_2\left(\frac{s}{p}\right)^2+{}^1/_8(q-{}^7/_8)\left(\frac{s}{p}\right)^4$$
$$+{}^1/_{16}\left(\frac{17}{18}q^2-\frac{41}{18}q+\frac{139}{144}\right)\left(\frac{s}{p}\right)^6$$
$$+{}^1/_{128}\left(\frac{17}{45}q^3-\frac{191}{60}q^2+\frac{109}{24}q-\frac{11791}{5760}\right)\left(\frac{s}{p}\right)^8+\ldots$$

Hiernach kann man die erforderliche Stärke des Kettengliedes berechnen, damit es der daselbst wirkenden Spannung $T=p(g+h)\sec v$ widerstehen kann.

371. Aufgabe. Die Länge der Tragstangen für ein beliebiges Kettenglied zu bestimmen.

Auflösung. Es ist, den Abstand OI' der Direktrix von der Fahrbahn gleich k gesetzt, die Länge einer Tragstange $=y-k$, und man hat

$$y={}^1/_2p\left[\mathfrak{A}\left(\frac{s}{p}\right)^2+\mathfrak{B}\left(\frac{s}{p}\right)^4+\mathfrak{C}\left(\frac{s}{p}\right)^6+\mathfrak{D}\left(\frac{s}{p}\right)^8+\mathfrak{E}\left(\frac{s}{p}\right)^{10}+\ldots\right]$$

Digitized by Google

hiebei ist $\mathfrak{A}=1$, $\mathfrak{B}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}q-1)$, $\mathfrak{C}=\frac{1}{45}(2q^2-11q+11)$.

$$\mathfrak{D}=\frac{1}{105}\left(\frac{17}{12}q^3-15q^2+\frac{73}{2}q-\frac{73}{3}\right)$$

$$\mathfrak{E}=\frac{1}{2025}\left(\frac{62}{7}q^4-\frac{1072}{7}q^3+660q^2-\frac{7096}{7}q+\frac{3548}{7}\right).$$

Beweis. Wegen $dy=\frac{ptdt}{1+qt^2}$ (369), folgt bei Verwandlung dieses Bruches in die Reihe $ptdt(1-qt^2+q^2t^4-q^3t^6+q^4t^8-\ldots)$ wenn man integrirt

$$y=\tfrac{1}{2}p(t^2-\tfrac{1}{2}qt^4+\tfrac{1}{3}q^2t^6-\tfrac{1}{4}q^3t^8+\tfrac{1}{5}q^4t^{10}-\ldots)$$

oder nach Substitution der Werthe von t^2, t^4, t^6, t^8, ... aus den Gleichungen VII. erhält man

$$y=\tfrac{1}{2}p[a^2s^2+(2ab-\tfrac{1}{2}qa^4)s^4$$
$$+(b^2+2ac-2a^3bq+\tfrac{1}{3}a^6q^2)s^6$$
$$+(2bc+2ad-(3a^2b^2+2a^3c)q+2a^3bq^2-\tfrac{1}{4}a^6q^3)s^8$$
$$+(c^2+2bd+2ae-(2ab^2+6a^2bc+2a^3d)q+(5a^4b^2+2a^5c)q^2$$
$$-2a^7bq^3+\tfrac{1}{5}a^{10}q^4)s^{10}]$$

und wenn man hierin noch die Werthe der Koeffizienten a, b, c, d, e aus den Gleichungen V. substituirt, ergibt sich

$$y=\tfrac{1}{2}p[\mathfrak{A}\left(\frac{s}{p}\right)^2+\mathfrak{B}\left(\frac{s}{p}\right)^4+\mathfrak{C}\left(\frac{s}{p}\right)^6+\mathfrak{D}\left(\frac{s}{p}\right)^8+\ldots]$$

wo die Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ die oben angegebenen Werthe besitzen.

372. Folgesatz. Für eine parabolische Tragkette ist $q=0$, und daher

125) $$y=\tfrac{1}{2}p\left[\left(\frac{s}{p}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{s}{p}\right)^4+\frac{11}{45}\left(\frac{s}{p}\right)^6-\frac{73}{315}\left(\frac{s}{p}\right)^8+\frac{3548}{14175}\left(\frac{s}{p}\right)^{10}\right]$$

Für eine gleich gespannte Kettenlinie ist $q=1$, und

126) $$y=\tfrac{1}{2}p\left[\left(\frac{s}{p}\right)^2-\tfrac{1}{6}\left(\frac{s}{p}\right)^4+\frac{2}{45}\left(\frac{s}{p}\right)^6-\frac{17}{1260}\left(\frac{s}{p}\right)^8+\frac{62}{14175}\left(\frac{s}{p}\right)^{10}\right]$$

373. Aufgabe. Eine genäherte Gleichung der Kettenbrückenlinie zu finden, wenn der Anfangspunkt in den Scheitel der Kurve versetzt, und die Abszissenaxe in der vertikalen Geraden durch den Scheitel genommen wird.

Digitized by Google

Auflösung. Man hat

$$127)\quad y^2=2px\left[1-\tfrac{1}{6}q\left(\frac{x}{p}\right)+\frac{2q^2}{45}\left(\frac{x}{p}\right)^2+\frac{q^3}{315}\left(\frac{x}{p}\right)^3-\frac{2q^4}{1575}\left(\frac{x}{p}\right)^4-\frac{2q^5}{9345}\left(\frac{x}{p}\right)^5\right]$$

Beweis. Verwechseln wir in (369) die Koordinaten x und y, so folgt

$$dy=\frac{pdt}{1+qt^2},\ \text{und}\ dx=\frac{ptdt}{1+pt^2}$$

wo Kürze halber $tgv=t$ angenommen wird.

Nun ist bei Entwickelung durch die Division

$$\frac{1}{1+qt^2}=1-qt^2+q^2t^4-q^3t^6+q^4t^8-\ldots$$

sonach $dy=pdt(1-qt^2+q^2t^4-q^3t^6+q^4t^8-\ldots)$

und wenn man diesen Ausdruck integrirt, und die Glieder, welche die zehnte Potenz der Größe t übersteigen, außer Acht läßt, erhält man

$$\text{I.}\quad y=pt(1-\tfrac{1}{3}qt^2+\tfrac{1}{5}q^2t^4-\tfrac{1}{7}q^3t^6+\tfrac{1}{9}q^4t^8).$$

Ferner haben wir

$$dx=ptdt(1-qt^2+q^2t^4-q^3t^6+q^4t^8-\ldots)$$

woraus bei derselben Einschränkung durch die Integration folgt

$$\text{II.}\quad x=\tfrac{1}{2}pt^2(1-\tfrac{1}{2}qt^2+\tfrac{1}{3}q^2t^4-\tfrac{1}{4}q^3t^6+\tfrac{1}{5}q^4t^8)$$

Wird die Gleichung I. zum Quadrat erhoben, und mit der Gleichung II. dividirt, so erhält man nach einigen Reduktionen

$$\frac{y^2}{2px}=\frac{1-\tfrac{2}{3}qt^2+\tfrac{23}{45}q^2t^4-\tfrac{44}{105}q^3t^6+\tfrac{563}{1575}q^4t^8}{1-\tfrac{1}{2}qt^2+\tfrac{1}{3}q^2t^4-\tfrac{1}{4}q^3t^6+\tfrac{1}{5}q^4t^8}$$

setzt man diesen Quotienten der Reihe $1+At^2+Bt^4+Ct^6+Dt^8$ gleich, und entwickelt nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten die Größen A, B, C, D, so findet man $A=-\tfrac{1}{6}q$, $B=\tfrac{17}{180}q^2$, $C=-\tfrac{167}{2520}q^3$, $D=\tfrac{3869}{75600}q^4$, hiedurch wird

$$\text{III.}\quad \frac{y^2}{2px}=1-\tfrac{1}{6}qt^2+\frac{17}{180}q^2t^4-\frac{167}{2520}q^3t^6+\frac{3869}{75600}q^4t^8$$

Die Gleichung II. kann man auch so schreiben

$$\text{IV.}\quad x=\tfrac{1}{2}p(t^2-\tfrac{1}{2}qt^4+\tfrac{1}{3}q^2t^6-\tfrac{1}{4}q^3t^8+\tfrac{1}{5}q^4t^{10})$$

setzen wir, um umgekehrt t durch x auszudrücken

Digitized by Google

V. $\begin{cases} t^2=ax+bx^2+cx^3+dx^4+ex^5, \text{ so ergibt sich} \\ t^4=a^2x^2+2abx^3+(b^2+2ac)x^4+2(bc+ad)x^5 \\ t^6=a^3x^3+3a^2bx^4+3(ab^2+a^2c)x^5 \\ t^8=a^4x^4+4a^3bx^5, \text{ und } t^{10}=a^5x^5 \end{cases}$

nach Substitution dieser Potenzen von t in die Gleichung IV. erhält man

$$\frac{2x}{p}=ax+(b-\tfrac{1}{2}a^2q)x^2+(c-abq+\tfrac{1}{8}a^3q^2)x^3$$
$$+(d-\tfrac{1}{2}b^2q-acq+a^2bq^2-\tfrac{1}{16}a^4q^3)x^4$$
$$+(e-bcq-adq+ab^2q^2+a^2cq^2-a^3bq^3+\tfrac{1}{32}a^5q^4)x^5$$

woraus sich die Bedingungsgleichungen ergeben

$a=2:p$

$b-\tfrac{1}{2}a^2q=0$

$c-abq+\tfrac{1}{8}a^3q^2=0$

$d-\tfrac{1}{2}b^2q-acq+a^2bq^2-\tfrac{1}{16}a^4q^3=0$

$e-bcq-adq+ab^2q^2+a^2cq^2-a^3bq^3+\tfrac{1}{32}a^5q^4=0$

durch deren Auflösung erhalten wir

$$a=\frac{2}{p},\ b=\frac{2q}{p^2},\ c=\frac{4q^2}{3p^3},\ d=\frac{2q^3}{3p^4},\ e=\frac{4q^4}{15p^5}$$

mit diesen Werthen verwandeln sich die Ausdrücke V. in

$$t^2=\frac{2x}{p}+2q\left(\frac{x}{p}\right)^2+\frac{4q^2}{3}\left(\frac{x}{p}\right)^3+\frac{2q^3}{3}\left(\frac{x}{p}\right)^4+\frac{4q^4}{15}\left(\frac{x}{p}\right)^5$$

$$t^4=4\left(\frac{x}{p}\right)^2+8q\left(\frac{x}{p}\right)^3+\frac{28}{3}q^2\left(\frac{x}{p}\right)^4+\frac{8}{3}q^3\left(\frac{x}{p}\right)^5$$

$$t^6=8\left(\frac{x}{p}\right)^3+24q\left(\frac{x}{p}\right)^4+40q^2\left(\frac{x}{p}\right)^5$$

$$t^8=16\left(\frac{x}{p}\right)^4+64q\left(\frac{x}{p}\right)^5, \text{ und } t^{10}=\left(\frac{x}{p}\right)^5.$$

Setzt man nun die eben gefundenen Werthe der Potenzen von t^2 in die Gleichung III. und ordnet Alles nach x, so ergibt sich sogleich der obige Ausdruck 127).

374. *Folgesatz.* Ist $q=0$, so erhält man $y^2=2px$ eine Parabel mit dem Parameter $2p$ wie (357). Setzt man hingegen $q=1$, so ergibt sich die Gleichung der gleichgespannten Kettenlinie

128) $$y^2=2px\left[1-\frac{x}{3p}+\frac{2x^2}{45p^2}+\frac{x^3}{315p^3}-\frac{2x^4}{1575p^4}-\frac{2x^5}{9345p^5}\right]$$

Digitized by Google

375. Aufgabe. Die Ellipse zu finden, welche mit der Kettenbrückenlinie genauer übereinfällt als eine Parabel.

Auflösung. Sind a, b die Halbaxen der gesuchten Ellipse, so findet man $a=\frac{3p}{2q}$, $b=\frac{1}{2}p\sqrt{\frac{6}{q}}$.

Beweis. Behält man in der Gleichung 127) die zwei ersten Glieder bei, wodurch

$$y^2=2px\left[1-\tfrac{1}{3}q\left(\frac{x}{p}\right)\right]=2px-\tfrac{2}{3}qx^3$$

zum Vorschein kommt, so gibt dieser Ausdruck gegen die Scheitelgleichung einer Ellipse $a^2y^2=b^2(2ax-x^2)$ gehalten, sofort

$2p=\frac{2b^2}{a}$, und $\frac{2}{3}q=\frac{b^2}{a^2}$, woraus sich ergibt

$a=3p:2q$, $b=p\sqrt{(3:2q)}=\frac{1}{2}p\sqrt{(6:q)}$, und es legt sich die so bestimmte Ellipse an die Kettenbrückenlinie genauer an, als eine Parabel, weil ihre Gleichung mit den ersten zwei Gliedern der Gleichung in der Kettenbrückenlinie zusammenfällt.

Ein vorzügliches Werk über mehrere Lehren der Statik ist:
Grunert, Dr. Joh. Aug., Statik fester Körper. Halle 1826.

Digitized by Google

Zweites Buch.

Anwendungen der Statik.

I. Beschreibung und Berechnung der Kettenbrücken.

376. Erklärung. Wenn die Fahrbahn einer Brücke sich beiderseits, ihrer Breite nach, in den Enden der vertikalen Tragstangen stützt, welche von zwei oder mehreren an ihren Enden, vor der Einfahrt und hinter der Ausfahrt, befestigten Ketten herabhängen, so nennt man eine so eingerichtete Brücke eine Kettenbrücke. Bei einer Kettenbrücke haben wir folgende Bestandtheile zu unterscheiden:

1. Die Spann- und Tragketten. 2. Die Wurzelpunkte. 3. Die Tragpfeiler. 4. Die Tragstangen und 5. Die Fahrbahn. Die Figur 74 stellt eine Kettenbrücke in der Vogelperspektive, nämlich von oben aus gesehen, dar. A, A', B, B' sind die Befestigungskammern für die Wurzelpunkte, C und C' die Tragpfeiler, DD' und EE' die doppelten Tragketten an jeder Seite der Fahrbahn, FF', GG' die Fußwege und HH' der Fahrweg der Brückenbahn.

377. Erklärung. Jedes Kettenglied besteht aus mehreren einander gleichen eisernen Schienen von der Form (Fig. 88 u. 89) die über einander gelegt an ihren kreisförmigen Endungen gemeinschaftlich durchbohrt werden, man nennt eine solche kreisförmige Oeffnung an jedem Ende der Schiene ihr Auge, und die Länge einer Schiene wird von Mitte zu Mitte des Auges gerechnet. Das

Digitized by Google

Auge dient zur Aufnahme des Bolzens, welcher ein Kettenglied mit dem nächst folgenden vereiniget, und an welchem auch die vertikal herabhängende Tragstange befestigt ist. Die Figur 68 stellt eine solche Verbindung zweier Kettenglieder vor. Die stärksten Kettenglieder (Fig. 87) werden bei den Wurzelpunkten, die etwas schwächeren zu den Spannketten verwendet. Um nach den Umständen die Kette in der geforderten Länge anzufertigen, haben die Schienen einiger Glieder an dem einen Ende ovale Augen, wie (Fig. 89) wodurch ihre Verkürzung durch Verkeilung sich erzielen läßt. Die Kettenglieder der Tragketten besitzen einen ungleichen Querschnitt, wie es die Spannung derjenigen Stelle, wo sie angebracht sind, verlangt.

378. Anmerkung. Obschon man bei dem jetzigen Zustande unserer Eisenwerke nicht erwarten kann, daß die in denselben erzeugten Schienen stufenweise im Gewichte so zunehmen, wie es die Theorie für die vom Scheitel gegen die Aufhängepunkte fortlaufenden Kettenglieder verlangt: nichtsdestoweniger ist die Realisirung eines solchen Systems von Kettengliedern möglich. Erwägt man nämlich, daß eben so wenig, als die Eisenwerke es in ihrer Macht haben, Schienen von der erwähnten Beschaffenheit anzufertigen, eben so wenig sie auch im Stande sind, Schienen von durchaus gleichem Gewichte zu erzielen, und Abweichungen von einem oder zwei Pfunden im Gewichte einzelner Schienen gehören nicht unter die Seltenheiten. Nun sind aber diese Abweichungen von dem Normalgewichte der Schienen, als Folge der Unvollkommenheit unserer Eisenwerke, wie wir es später sehen werden, viel bedeutender, als der Unterschied, welchen die ungleiche Spannung einzelner Stellen der Tragkette mit sich bringt. Sortirt man daher die Schienen, bevor sie noch gebohrt worden, nach ihrem Gewichte, und stellt diejenigen zu einem Kettengliede zusammen, deren Gesammtgewicht dem erforderlichen Gewichte des Kettengliedes nahe gleich wäre; so läßt sich, ohne Zweifel, durch dieses, freilich etwas umständliche Verfahren, wobei auf den Scharfsinn und den Fleiß des Ingenieurs viel ankommt, ein System von Kettengliedern herstellen, welches dem durch die Theorie geforderten nahe gleich kommt. Vernachlässiget man diese Vorsicht,

Digitized by Google

und läßt bloß den Zufall walten, so könnte es geschehen, daß die schwersten Kettenglieder um den Scheitel herum, an der Stelle der kleineren Spannung, dagegen die leichteren Kettenglieder, an den Aufhängepunkten, wo die größte Spannung herrscht, verwendet würden.

379. Anmerkung 2. Das Gewicht der Fahrbahn richtet sich nach der Breite und Länge des Brückenweges, und nach der Festigkeit und Dauer, welche man demselben zu geben beabsichtiget. Die größte zufällige Belastung wird aber durch Menschengedränge erzeugt. Zum Behufe einer späteren Anwendung werden wir annehmen, daß 18 Menschen, groß und klein, auf einer Wiener Quadratklafter Platz haben, und daß das Gewicht eines einzelnen Menschen im Durchschnitte einen Wiener Centner betrage; hienach wäre die größte zufällige Belastung einer W. Q. Klafter gleich 18 W. Centnern, und es ergibt sich dieselbe für die ganze Brückenbahn, wenn die in W. Q. Klaftern ausgedrückte Fläche der Fahrbahn mit 18 multiplizirt wird. Lassen wir, um die eben angeführte Behauptung zu rechtfertigen, eine 32° lange, und 3° breite Fahrbahn mit sechsspännigen Lastwägen besetzt sein, so werden, wenn auf einen Wagen sammt der Deichsel 4° 1′, und für die beiden Paare Vorderpferde 3° 4′, daher zusammen 7° 5′ gerechnet werden, vier derlei Wägen hintereinander auf der Brücke passiren: nimmt man aber an, daß die vorderen Pferde immer neben dem vor ihnen befindlichen Wagen Platz finden; so würden sechs Wägen zugleich die Brücke befahren können, mithin jeden Wagen sammt der Ladung auf 130 Centner angenommen, macht 780 Ctr.

36 Pferde sammt Geschirren und Fuhrleuten jene zu 6½ Ctr., macht 234 —

Summe 1014 Ctr.

Wenn aber eine Truppe die Brücke mit diesen Abmessungen passirt, so können immerhin 12 Mann auf eine Q. Klafter, mithin zu 1¼ Ctr. gerechnet, gibt eine Belastung von 18 Ctr., also für die Belastung der ganzen Fahrbahn 96×18=1728 Ctr.

380. Aufgabe. Den Parameter und den Modulus der Kettenbrückenlinie zu finden.

Auflösung. Der Formel 98) gemäß enthält der Modulus der Tragketten zwei Größen, das Gewicht g der Längeneinheit der Tragkette, und das Gewicht h der Längeneinheit der Fahrbahn, von denen nur das zweite bekannt ist. Zur Auffindung der ersteren Größe verfahre man so: man nehme, um einen genäherten Werth des Modulus zu erhalten, erstlich $g=0$ an, so wird die Kettenbrückenlinie zu einer Parabel, (357) und man findet aus der gegebenen halben Spannweite b und dem Pfeile δ, sowohl den Parameter p als auch den Aufhängewinkel α. Aus diesen Größen ergibt sich, wenn man die Spannung des Aufhängepunktes mit A und die Spannung im Scheitel mit C bezeichnet,

$$\text{I. } A=\frac{bh}{tg\alpha}.\sec\alpha=\frac{bh}{\sin\alpha}.$$

Als Mittelwerth der für einen Wiener Quadrat-Zoll geschmiedeten Eisens im (187) angegebenen absoluten Festigkeit, kann man 600 W. Centner annehmen, wovon unbedenklich ein Drittel und sogar die Hälfte *) als Tragfähigkeit einer solchen Schiene für die Dauer betrachtet werden kann. Ist also q der Querschnitt sämmtlicher Tragketten, so erhält man

$$\text{II. } q=\frac{A}{200}=\frac{bh}{200\sin\alpha}.$$

Berechnet man aus Parameter und Aufhängewinkel nach Formel 122) die halbe Länge l der Tragkette in Fußen, so gibt

$$\text{III. } ql=\frac{12bhl}{200\sin\alpha}$$

ihren Inhalt in W. Kubikzollen; und weil das Gewicht eines Kubikzolles Eisen zu $^1/_4$ W. Pfunde angenommen werden kann, mithin 12 Kubikzolle 3 W. Pfunde betragen, so ergibt sich das genäherte Gewicht G_1 der Tragketten in W. Centner

$$\text{IV. } G_1=\frac{3bhl}{20000\sin\alpha}, \text{ und V. } g_1=\frac{3hl}{20000\sin\alpha}=Eh$$

ist das genäherte Gewicht eines Kurrentfußes der Tragkette, wo

*) Vergleiche die Schrift: Die Sophienbrücke. Von Ignaz Edlen v. Mitis. 2. Auflage. Wien 1830. S. 54 bis 62.

$E=3l:20000\sin\alpha$ eine konstante Größe bezeichnet. Allein die Tragkette erhält jetzt am Aufhängepunkte eine größere Spannung, als die in der Gleichung I. gegebene, weil auch das ansehnliche Gewicht G_1 in IV. hiezu beiträgt, und es muß zu diesem Ende die Tragkette stärker angetragen werden, wenn sie die vereinigte Last der Tragkette und der Fahrbahn stützen soll. Bezeichnet also g_2 das genauere Gewicht des Kurrentfußes der Tragkette, so findet man nach V. $g_2=E(g_1+h)$, und eben so $g_3=E(g_2+h)$ u. s. f. bis sich zwei einander nahe gleiche Werthe von g ergeben. Hiedurch ist nun nach Formel 98) der Modulus q_1 näherungsweise gefunden. Da jedoch, gemäß der Formel 103), der Parameter der Kettenbrückenlinie ein anderer ist, als der bei der Parabel gefundene, so erhält man ihn durch Substitution des Näherungswerthes q_1 in Formel 103) genauer, heißt dieser p_1 und sucht man hiemit den genäherten Werth C_1 für die Spannung am Scheitel nach Formel 99), so gibt $C_1:200$ den erforderlichen Querschnitt in W. Quadratzollen, $12C_1:200$ den Inhalt der Längeneinheit der Tragkette im Scheitel, und dieses mit $^1/_4$ multiplizirt, und mit 100 dividirt, liefert das genäherte Gewicht der Längeneinheit der Tragkette im Scheitel. Nun ist $12:200\times400=3:20000=F$, und $\log F=0.176091-4$; es wird also VI. $g_1=F.C_1$, oder $\log g_1=\log C_1+0.176091-4$. Mit diesem Werthe von g_1, findet man eben so den zweiten Näherungswerth q_2 des Modulus, dann den zweiten Näherungswerth p_2 des Parameters, und den verbesserten Werth C_2 der Spannung im Scheitel, woraus sich nach Formel VI. der genauere Werth g_2 bestimmen läßt. Durch Wiederholung dieser Rechnung findet man sofort

$$q_3,\ p_3,\ C_3,\ g_3 \text{ ferner}$$
$$q_4,\ p_4,\ C_4,\ g_4$$

bis man auf zwei auf einander folgende Werthe von g gelangt, die wenig von einander sich unterscheiden. Endlich ergibt sich mit dem so bestimmten Werth von g, sofort q, p und C.

381. Anmerkung. Im folgenden Beispiele legen wir die absolute Festigkeit des Eisens, bloß 500 W. Ctr. gleich, zu Grunde, wodurch $E=3l:16670\sin\alpha$, und $\log F=0.255185-4$ wird. Sei also bei einer Kettenbrücke die Spannweite $2b=420'$, der Auf-

hängewinkel $\alpha = 16°30'$, die Länge der Fahrbahn 420′, Breite 28′, also Flächeninhalt 306°16′, Gewicht derselben 2247 Ctr., zufällige Belastung 5516 Ctr., so ist das größte Gewicht der Fahrbahn 8263 W. Ctr. Wenn die Rechnung durchgängig mit Logarithmen geführt, und Kürze halber der briggische Logarithme einer Zahl mit l bezeichnet wird, so erhalten wir folgendes Schema:

$l\,8263 = 3.917138$
$l\,420 = 2.623249$
$l h = 1.293889$
$h = 19.6738$ W. Ctr.
$l\,210 = 2.322219$
$l\,tg\alpha = 9.471605$
$l p = 2.850614$
$p = 708.947$ W. Fuß
$l\,tg\alpha = 9.471605$
$l\cos\alpha = 9.981737$
$l\,tg\alpha\sec\alpha = 0.489868 - 1$
$tg\alpha\sec\alpha = 0.308936$
$\mathfrak{L}\alpha = \mathfrak{L}\,18°.333 = 0.292044$
Summe 0.600980
$l\,0.60098 = 0.778860 - 1$
$l\,{}^1/_2 p = 2.549584$
$l l = 2.328444$
halbe Länge der Tragkette
$l = 213.03$ W. Fuß
$l l = 2.328444$
$l 3 = 0.477121$
Summe $= 2.805565$
$l\,16670 = 4.221936$
$l\sin\alpha = 9.453342$
Summe $= 2.805565$
$l\,16670 = 4.221936$
$l\sin\alpha = 9.453342$
Summe $= 2.675278$
$lE = 0.130287 - 1$

$l.E = 0.130287 - 1$
$l h = 1.293889$
$l g_1 = 0.424176$
$g_1 = 2.6557$ W. Ctr.
$h = 9.37168$
$g_1 + h = 22.3295$
$l(g_1 + h) = 1.348879$
$lE = 0.130287 - 1$
$l g_2 = 0.479166$
$g_2 = 3.0142$
$h = 19.6738$
$g_2 + h = 22.6880$
$l(g_2 + h) = 1.355796$
$lE = 0.130287 - 1$
$l g_3 = 0.486083$
$g_3 = 3.0625$
$h = 19.6738$
$g_3 + h = 22.7363$
$l(g_3 + h) = 1.356720$
$lE = 0.130287 - 1$
$l g_4 = 0.487007$
$g_4 = 3.0690$

Digitized by Google

da hier g_1 mit g_2 bis auf $^2/_3$ Pfund übereinstimmt, so bricht die Rechnung ab, und man hat $g=3.07$ W. Centner.

Nun ist $g+h=22.7438$, $l(g+h)=1.356563$

$l.166.7=2.221936$	$lb=2.322219$
$l\sin\alpha=9.453342$	3.579082
Summe	$=1.675278$
	$lq=2.003804$, $q=100.88$ W.Z.

Ferner wird zur Bestimmung des Modulus q

$lg=0.487138$	$lg_1=0.464375$
$l(g+h)=1.356863$	$l(g_1+h)=1.353859$
$lq_1=0.130275-1$	$lq_2=0.110516-1$
$l\sqrt{q_1}=0.565137-1$	$l\sqrt{q_2}=0.555258-1$
$l\operatorname{tg}\alpha=9]471605$	$l\operatorname{tg}\alpha=9.471605$
$l\operatorname{tg}\alpha=9.036742$	$l\operatorname{tg}\alpha=9.026863$
$\alpha=6^0 12' 40''$	$\alpha=6^0 4' 20''$
Bogenlänge $\alpha=0.108405=\alpha'$	$\alpha_1=0.105985$
$lb=2.322219$	$lb\sqrt{q_2}=0.877477$
$l\sqrt{q_1}=0.565137-1$	$l\alpha'=0.025244-1$
$lb\sqrt{q_1}=1.887356$	$lp_2=2.852233$
$l\alpha'=0.035029-1$	$l(g_1+h)=1.353859$
$lp_1=2.852327$	$lC_2=4.206092$
$l(g_1+h)=1.356863$	$lF=0.255185-4$
$lC_1=4.209190$	$lg_2=0.461277$
$lF=0.255185-4$	$g_2=2.8925$ W. Ctr.
$lg_1=0.464375$	
$g_1=2.9132$	
$h=19.6738$	
$g_1+h=22.5870$	

Wiederholt man diese Rechnung mit dem verbesserten Werthe von $g_2=2.8925$, so ergibt sich $\alpha=6^0 3' 13''$, also $\alpha'=0.105654$, und der genauere Werth $g_3=2.8899$, der von dem vorigen nur um $^1/_4$ Pfund verschieden ist. Man hat also

$g=2.8899$ W. Ctr. $\quad lg=0.460883$

$g+h=22.5637$ — $\quad l(g+h)=1.353410$

$lq=0.107473-1$, $q=0.12807$

Digitized by Google

Sodann ist $lb=2.322219$

$l\sqrt{q}=0.553736-1$

Summe $=1.875955$

$l\alpha'=0.023886-1$

$lp=2.8522069$, $p=711.32$ Fuß

$l(g+h)=1.353410$

$lC=4.205479$, $C=16050$ W. Ctr.

$l\cos\alpha=9.9817737$

$lA=4.223742$, $A=16740$ W. Ctr.

dividirt man die so erhaltene Spannung C u. A mit 166.7, so folgt der Querschnitt der Tragkette im Scheitel $=96.28$ und im Aufhängepunkte $=100.42$ W. Q. Zolle. Endlich ist nach Formel 106) der Pfeil für $\alpha=6°3'13''$

$\log\cos\alpha=9.9975714$

$D.E.\cos\alpha=0.0024286$

$l(D.E.\cos\alpha)=0.385356-3$

Konstante $=0.362216$

$lp=2.852069$

Summe $=0.599641$

$lq=0.107473$

$l\delta=0.492168$, $\delta=31.057$ W. Fuß.

Wird aber nach Formel 115) das Gewicht der Tragkette berechnet, so findet man

$lp=2.852069$

$l(g+h)=1.353410$

$l\operatorname{tg}\alpha=9.471605$

$l(G+H)=3.677084$

also $G+H=4754.3$

nun ist oben $H=4131.5$

folglich $G=622.8$

Dagegen ist das Gewicht der paraboliſchen Tragkette $G=lg$, und $l=2.328444$

$lg=0.487138$

$lG=2.815592$, sonach $G=654.0$

der Unterschied beider Gewichte ist $654.0-622.8=31.2$ W. Ctr., sonach für die ganze Tragkette 62.4 W. Ctr.: es wird somit im vorliegenden Beispiele dieses Gewicht bei den Tragketten erspart, wenn man denselben ihre naturgemäße Form (378) ertheilt.

Digitized by Google

382. Erklärung. Wir nennen schädliche Last der Tragkette den Ueberschuß des Gewichtes einer gleichmäßig dicken Tragkette, über dasjenige nach (378) sich ergebende Gewicht, welches eine naturgemäße Tragkette mit veränderlichen Querschnitten erhält, und begreifen unter der schädlichen Last der Fahrbahn Alles, was bloß zur Zierde oder aus Laune des Bauführers an der Fahrbahn für die Dauer angebracht wird, und nicht durch Rücksichten einer größeren Stabilität, Sicherheit und Bequemlichkeit in der Benützung der Kettenbrücke sich rechtfertigen läßt.

383. Erklärung. Die sinnreiche Art, mit welcher je zwei Kettenglieder sowohl mit einander, als auch mit der herabhängenden Tragstange verbunden sind, erhellt aus (Fig. 68 und 70), wo AA' den Bolzen, BB', CC' die Schienen vorstellen, durch deren Augen der Bolzen hindurchgeht; sie werden so angeordnet, daß die Schienen des einen Kettengliedes mit jenen des andern wechselweise eingreifen: DD' ist der Kopf der Hängestange, der in (Fig. 70) durch die punktirte Linie angezeigt ist. Hat man den erforderlichen Querschnitt der Tragkette an irgend einer Stelle ermittelt, so gibt der vierte oder achte Theil hievon den Querschnitt eines Kettengliedes, je nachdem zwei oder vier Tragketten zur Stützung der Fahrbahn an jeder Seite derselben bestimmt werden. Im letzteren Falle laufen die Ketten paarweise über einander. Bei der K. Franzens-Kettenbrücke wird jedes Glied der 8 Tragketten von 6 Schienen gebildet, deren Höhe 4″, Breite ½″, Länge von der Mitte des einen Auges zur Mitte des andern 10 W. Fuß beträgt. Der Querschnitt eines Kettengliedes ist sonach 12 bis 13 W. Q. Zolle. Für die Glieder der Spannketten werden jedoch stärkere Schienen gewählt. Die Tragstangen werden aus einem oder mehreren 10′ langen Stücken und einem kürzeren Theile zusammengesetzt. Der untere Theil zweier Tragstangen cc', cc', (Fig. 73), welche einem vertikalen Kettenpaare angehören, greift etwas über die Fahrbahnhöhe in eine 14″ lange, etwas abgerundete mit zwei Löchern versehene gußeiserne Platte bb', und tiefer in einen gußeisernen Sattel aa' (Fig. 72) den Tragsattel, über welchen die horizontalen Tragstangen f, f' (Fig. 73) oder auch unmittelbar die Querbalken (Fig. 71) gelegt werden. Zu diesem Behufe sind die

Digitized by Google

Tragstangenende mit länglichen Augen versehen, wie (Fig. 71), und der Tragsattel (Fig. 72) ruht mit seinen Vorsprüngen in denselben, und wird durch eiserne Keile fest gemacht, oder aber sie enthalten Flachgewinde, welche mittelst Muttern an der unteren Fläche des Tragsattels verschraubt werden.

384. Anmerkung. Die Länge der Tragstangen einzelner Kettenglieder zu berechnen, bemerke man zuvörderst, daß der in (381) gefundene Modulus, der größten Belastung der Brücke angehört, und daß somit bei der Aufhängung der noch unbelasteten Fahrbahn der zugehörige Modulus und der Parameter einen anderen Werth erhalten, nach welchen allein die Längen der Tragstangen zu bestimmen kommen. Im obigen Beispiele (381) setze man statt g den etwas genaueren Werth $g=2.8895$, $H=2247$ Ctr., so wird

$$\begin{array}{r|r}
lH=3.351603 & l\sqrt{q}=0.772461-1 \\
l\,420=2.623249 & l\,tg\,a=9.471605 \\
\hline
lh=0.728354 & l\,tg\,\alpha=0.244066-1 \\
h=5.3500 \text{ W. Ctr.} & \alpha=9^0 56' 57''.5 \\
\text{also } g+h=8.2395- & \alpha'=0.1736479 \\
l(g+h)=0.915901 & l\sqrt{q}=0.772461-1 \\
lg=0.460823 & lb=2.322219 \\
\hline
lq=0.544922-1 & lb\sqrt{q}=2.094680 \\
q=0.350689 & l\alpha'=0.239669-1 \\
\hline
 & lp=2.855011
\end{array}$$

Nun berechne man aus dem so gefundenen Parameter und Modulus die Länge der halben Tragkette nach Formel 119): setzt man in ihr Kürze halber

$$1-\sin a\sqrt{(1-q)}=\beta,\ \frac{\beta\cos\alpha}{\cos a}=\gamma, \text{ so gibt sie}$$

$$l=\frac{p}{q}[\mathfrak{L}a+\sqrt{(1-q)}\lambda\gamma], \text{ man hat also}$$

$1-q=0.649311$
$l(1-q)=0.812453-1$
$l\sqrt{(1-q)}=0.906226-1$
$l\sin\alpha=0.453342-1$
Summe $=0.359568-1$
$\sin\alpha\sqrt{(\alpha-q)}=0.228859$
$\beta=0.771141$

$l\beta=0.887134-1$
$l\cos\alpha=0.993419-1$
$0.880553-1$
$l\cos\alpha=0.981737-1$
$\gamma=0.898816-1$
$1-l\gamma=0.101184$
$l(1-l\gamma)=0.005112-1$
$l\sqrt{(1-q)}=0.906226-1$
Konstante $=0.362216$
$l\sqrt{(1-q)}\lambda\gamma=0.273554-1$
$\sqrt{(1-q)}\lambda\gamma=-0.187739$

diese Zahl ist negativ, weil γ ein echter Bruch ist, und also $\lambda\gamma$ das Zeichen — erhält.. Es ist aber aus den Tafeln

$La=0.292044$
$\sqrt{(1-q)}\lambda\gamma=-0.187739$
Unterschied $0.104305=D$

$lD=0.018305-1$
$lp=2.855011$
1.873316
$lq=0.544922-1$
$ll=2.328394$

mithin $l=213.007$ W. Fuß, oder 21 Kettenglieder zu 10′ nebst einem kürzeren Gliede mit 3′.007 Fuß. Um die konstanten Koeffizienten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ in (371) zu bestimmen, verwandle man zuvor die in ihnen vorkommenden Brüche in Dezimalbrüche; man erhält so die siebenstelligen Logarithmen der letzteren:

$l(2:45)=0.6478175-2$
$l(11:45)=0.3881802-1$
$l(17:1260)=0.1300784-1$
$l(1:7)=0\ 1549020-1$
$l(73:210)=0.5410361-1$
$l(73:315)=0.3650123-1$
$l(62:14175)=0.6408686-3$
$l(1072:14175)=0.8786717-2$
$l(44:135)=0.5131189-1$
$l(7096:14175)=0.6694905-1$
$l(3548:14175)=0.3984605-1$

nun findet man $\mathfrak{A}=1$,
$\mathfrak{B}=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}q-1)=-0.274885$
ferner
$2lq=0.0898436-1$
$l^2/_{45}=0.6478175-2$
Sm.$=0.7376611-3$, 0.0054659
$lq=0.5449218-1$
$l^{11}/_{45}=0.3881802-1$
Sm.$=0.9331020-2$, -0.0857289
$l^{11}/_{45}=0.3881802-1$, 0.2444444
$\mathfrak{C}=0.164186$

und so ergibt sich $\mathfrak{D}=-0.121609$, $\mathfrak{E}=0.111633$, ferner

$l\mathfrak{B}=0.4391510-1$, $l\mathfrak{C}=0.2153361-1$
$l\mathfrak{D}=0.0849651-1$, $l\mathfrak{E}=0.0477922-1$

Digitized by Google

Da diese Koeffizienten für alle Tragstangen derselben Kettenbrücke gelten, so ist nun die Berechnung ihrer Längen eben so einfach, wie wenn die Tragketten nach einer Parabel gekrümmt wären. Werden aber 8 Tragketten angeordnet, so daß auf jeder Seite der Fahrbahn zwei Paar Tragketten in einer Entfernung von $1\frac{1}{2}$ Fuß über einander zu stehen kommen; so ist es räthlich, die Glieder der obern Tragketten so eingreifen zu lassen, daß ihre Tragstangen bei der Mitte der Glieder der unteren Tragketten vorbeigehen; hiedurch ergeben sich bei der Hälfte der Tragkette 42 Tragstangen, deren Längen zu bestimmen sind.

Fängt man mit den Tragstangen der oberen Tragkette an, und bezeichnet sie vom Scheitel an nach einander mit y_1, y_2, y_3 . . . y_{21}, da dann die Tragstangen der unteren Tragkette y_2, y_3 y_6 . . y_{42} heißen sollen, so erhält man z. B. den Werth von y_{21} wie folgt: es ist für diese Stelle $s=31\times5'=155'$, also

$l155=2.190332$	$l\frac{1}{2}p=2.553981$
$lp=2.855011$	$l(s:p)^2=0.670642-2$
$l(s:p)=0.335321-1$	1.224623 16.773
$l(s:p)^2=0.670642-2$	$l\frac{1}{2}p=2.553981$
$l(s:p)^4=0.341284-3$	$l(s:p)^4=2.341284-3$
$l(s:p)^5=0.011926-4$	$l\mathfrak{B}=0.439151-1$
$l(s:p)^6=0.682568-6$	$=0.334416-1$, -0.216
	$l\frac{1}{2}p=2.553931$
	$l(s:p)^6=0.011926-4$
	$l\mathfrak{C}=0.215336-1$
	$0.781243-3$, 0.006

also $y_{21}=16.773+0.006-0.216=16.563$ Fuß.

385. Anmerkung 2. Berechnet man aber die Längen der Tragstangen, wie sie eine parabelförmige Tragkette mit sich bringt, so hätte man, diese Werthe mit Y bezeichnend, $Y_{21}=16.687$, also Unterschied 0.033 Fuß.

Folgende Tafel gibt die Längen der Tragstangen für eine geradlinige Fahrbahn, sowohl wenn die Tragkette eine Kettenbrückenlinie mit dem Modulus $q=0.340689$ ist, als auch wenn sie als eine Parabel angenommen wird.

N	s	y	Y	N	s	y	Y	N	s	y	Y
1	5	0.017	0.018	15	75	3.915	3.954	29	145	14.517	14.630
2	10	070	071	16	80	4.453	4.496	30	150	15.524	15.642
3	15	157	159	17	85	5.025	5.072	31	155	16.563	16.687
4	20	280	282	18	90	631	683	32	160	17.635	17.763
5	25	436	441	19	95	6.271	6.328	33	165	18.739	18.872
6	30	628	634	20	100	945	7.007	34	170	19.875	20.012
7	35	854	863	21	105	7.653	7.721	35	175	21.042	21.184
8	40	1.116	1.127	22	110	8.394	8.468	36	180	22.242	22.387
9	45	412	426	23	115	9.169	9.248	37	185	23.473	23.621
10	50	743	760	24	120	9.977	10.062	38	190	24.736	24.887
11	55	2.109	2.132	25	125	10.819	10.910	39	195	26.029	26.183
12	60	508	533	26	130	11.695	11.791	40	200	27.354	27.507
13	65	943	972	27	135	12.602	12.706				
14	70	3.412	3.445	28	140	13.544	13.651				

Für die geraden Tragstangenzahlen, welche der unteren Tragkette angehören, ist noch der Abstand der oberen Tragkette von der unteren, nämlich 1.33 Fuß abzuziehen. Es ist vortheilhaft, der Brückenbahn eine kleine Steigung etwa von 3 auf 210 zu geben, damit bei Ausdehnung der Tragkette durch eine größere Belastung oder durch die Wärme, die Senkungen der Fahrbahn vermindert werden. Die Tragstangen erhalten in einem solchen Falle eine proportionale Vergrößerung. Auch trägt es nach Wiebeking zur Festigkeit einer Kettenbrücke nicht wenig bei, wenn man den Scheitel sämmtlicher Tragketten mit der Mitte der Fahrbahn fest verbindet.*)

386. Aufgabe. Aus den Koordinaten der Wurzelpunkte einer Spannkette ihre Spannweite, den Pfeil, den Aufhängewinkel und die Spannung zu bestimmen.

Auflösung. Sei AK (Fig. 85) der Tragpfeiler, über den hinaus eine Kette MAN geführt wird, welche im Punkte N zu befestigen kommt, so daß derselbe als der Wurzelpunkt der Spannkette AN zu betrachten ist, dessen Lage aus den gegebenen Koordinaten $AB=c$, $BN=d$ bestimmt wird: denkt man sich die Parabel bis zu ihrem Scheitel C fortgesetzt, und man bezeichnet die halbe Spannweite AD mit b', ihren Pfeil CD mit δ' und

*) Memoire sur des ponts suspendus en chaines de fer. Par le Chevalier de Wiebeking. Munich 1832. S. 39.

den Aufhängewinkel der Spannkette mit a', so hat man

$$b'=\frac{b^2d}{2c\delta}+\tfrac{1}{2}c,\quad \delta'=\frac{b'^2\delta}{b^2},\quad \operatorname{tg}a'=\frac{2b'\delta}{b^2}.$$

Beweis. Da der Punkt N einer Kurve angehört, die nahe als eine Parabel angesehen werden kann (385), so hat man für den Anfangspunkt im Scheitel C, $(QN)^2=p.CQ$, nun ist $QN=b'-c$, $CQ=\delta'-d$, und weil die Kette über den Pfeiler frei hinweggeht, und pg die horizontale Spannung eines jeden ihrer Punkte vorstellt, so ist der Parameter p sowohl für die Spannkette als auch für die Tragkette derselbe, somit nach Formel 112) $p=b^2:2\delta$, wenn b, δ beziehungsweise die halbe Spannweite und den Pfeil der Tragkette vorstellen. Mit diesen Werthen erhält man $(b'-c)^2=p\delta'-\frac{b^2d}{2\delta}$: da aber der Aufhängepunkt A ebenfalls ein Punkt der Parabel ist, so hat man $b'^2=p\delta'$. Durch Subtraktion beider Gleichungen findet man b' wie oben. Ferner hat man nach Formel $\delta'=b'^2:2p=b'^2\delta:b^2$, und $\operatorname{cot}a'=2\delta':b'=2b'\delta:b^2$ (359). Die Spannung im Punkte N ist $T=A\sec v$, wo $\operatorname{tg}v=p:y=p:(b'-c)$ ist.

387. Aufgabe. Die Länge der Spannkette zu bestimmen.

Auflösung. Heißt l' die Länge der Spannkette, und v der Stellungswinkel des Punktes N, dessen Tangente $p:(b'-c)$ ist, so hat man $l'=\frac{1}{2}p(\operatorname{tg}a'\sec a'-\operatorname{tg}v\sec v+\measuredangle a'-\measuredangle v)$.

Beweis. Nach Formel 121) ist die Länge einer vom Scheitel gerechneten Parabel mit dem Stellungswinkel a' $l=\frac{1}{2}p(\operatorname{tg}a'\sec a'+\measuredangle a')$ und die Länge eines Bogens, dessen Stellungswinkel v ist, $l''=\frac{1}{2}p(\operatorname{tg}v\sec v+\measuredangle v)$, demnach ihr Unterschied $l-l''=l'$ wie oben.

388. Erklärung. Die Tragpfeiler sind entweder aus Gußeisen wie bei den St. Petersburger Kettenbrücken, oder aus Quadersteinen. Sie erfordern einen soliden Unterbau auf einem eichenen Roste, welcher auf eingeschlagenen Piloten ruht. Jedenfalls soll der Rost unter dem tiefsten Wasserspiegel trocken gelegt werden. Bei der K. Franzensbrücke ist die Pfeilerbreite auf der Basis 44′, wovon die beiden Thorschäfte 26′ und die Thoröffnung 18′

Digitized by Google

einnimmt: die letztere ist, bis zum Schluße des vollen kreisrunden Gewölbes 36′ hoch, und die Stirnbreite des Pfeilers beträgt 15′ die Höhe des Pfeilers von der Fahrebene hat 47½ W. Fuße. Von den Trotoirplatten der Pfeiler an gerechnet, in einer Höhe von 32′.7 ruhen auf großen Werkstücken in jedem Stützpunkte 6½′ lange, 3¼′ breite und ¼′ hohe Gußeisenplatten, auf welchen sich 10 Stück gußeiserne Cylinder von 5 Zoll Durchmesser in gleichen Abständen befinden, über diesen stützt sich eine zweite gleich große Gußeisenplatte, deren obere Fläche jedoch nach einem Halbmesser von 8¼ Fuß cylindrisch begrenzt ist, worüber die kürzeren Glieder der Spannketten durchgehen. Der ganze Apparat gestattet den Spannketten eine leichte Bewegung, um den horizontalen Zug der Spannung größtentheils aufzuheben. Bei den St. Petersburger Kettenbrücken ersetzt diesen Auflagskasten sehr zweckmäßig ein auf 6 Rädern beweglicher gußeiserner Wagen, wie Fig. 80 und 81 zeigt. (Siehe Wiebeking's o. a. S. Seite 28).

389. Erklärung. Die Ausrüstung der Ketten geschieht bei kleineren Kettenbrücken auf einem einfachen Bockgerüste von 6′ Breite, welches man nach der voraus bestimmten Form der Ketten errichtet, worauf jede Kette besonders zusammengefügt, und somit ein und dasselbe Gerüst zu allen Tragketten verwendet wird: indem man zu den oberen Tragketten das Gerüst um so viel erhöht, als der Abstand beider Ketten beträgt. Bei der K. Franzenskettenbrücke wäre jedoch ein festes Gerüst von 420 Fuß Spannweite zu kostspielig und zeitraubend gewesen, und da jede der acht Tragketten an 198 Centner wog, und dieses Gewicht im Momente der Aufhängung an 370 Ctr. Zugkraft erforderte, so mußte man auf eine andere Einhängungsweise bedacht sein. Es wurden aus den vorräthigen Kettenschienen vier leichte Nothketten, von nur zwei Schienen zu jedem Gliede genommen, angefertiget, dieselben aufgezogen, und daran ein leichtes Konstruktionsgerüst gehängt, auf welchem man dann die eigentliche Konstruktion der schweren Ketten vornehmen konnte. Die Nothketten bildeten zwei obere äußere und zwei untere innere Ketten. Auf dem fertigen Einhängungsgerüste wurden dann die Nachbarketten, nämlich die zwei oberen inneren, und die zwei unteren äußeren Ketten zusammengefügt,

Digitized by Google

und mittelst der mit länglichen Augen versehenen Glieder, in welche eiserne Keile eingetrieben wurden, so rektifizirt, wie es die voraus berechnete Länge der Tragketten erforderte. Nachdem alle 8 Ketten ihre genaue Länge erhielten, wurde das Einhängungsgerüst von den Nothketten auf die neuen Tragketten übertragen, die Tragstangen eingehängt, und die auf Schiffen bereit gehaltenen, mit dem Hängwerke versehenen Unterzüge, von beiden Pfeilern ausgehend, gegen die Mitte zu mit den Tragstangen verbunden. Auf der (Fig. 82) stellen A und A' die schon erbauten Tragpfeiler, B, B' die Gerüste für die schon in ihren Wurzelpunkten eingehängten Spannketten, C, C' eine der Nothketten, D das auf verankerten Schiffen aufgestellte Einhängungsgerüst: E, E' die Erdwinden und Kreuzhaspel zur Aufziehung der Tragketten, die punktirten Linien FGH und $F'G'H'$ bedeuten die von den beiden Tragpfeilern herabhängenden und auf verankerten Flößen gestützten Hälften der Tragkette, welche bei H und H' an langen Tauen befestiget sind. In der unteren Abtheilung IK befanden sich von jeder der 4 zu ziehenden Ketten die 6 mittleren Glieder der oberen und 5 Glieder der unteren Tragkette, welche für jeden einzelnen Aufzug auf hohen Böcken aufgelegt, zur beiderseitigen Zusammenfügung in Bereitschaft lagen.

390. Anmerkung. Hinsichtlich des weiteren Details in der Einhängung der Ketten, der Fahrbahn und der Probemaschine zur Ermittlung der absoluten Festigkeit der bei der Kettenbrücke verwandten schmiedeisernen Bestandtheile verweise ich auf die in mehrseitiger Beziehung instruktive Schrift: Die K. Franzens-Kettenbrücke zu Prag. Von Friedrich Schnirch. Prag und Berlin 1842, und bemerke nur noch, daß nach den gegebenen Aufhängewinkeln a der Tragkette und a' der Spannkette, die Dicke des vertikalen Tragpfeilers so anzuordnen ist, daß derselbe 1. durch seine rückwirkende Festigkeit der Spannung der Ketten im Auflagspunkte zu widerstehen vermag, und daß 2. die Resultirende dieses Druckes, noch innerhalb der Grundfläche des Pfeilers ihre Richtung nimmt.

391. Erklärung. Die Befestigung der Wurzelpunkte wird in eigenen hiezu aufgemauerten Gewölben, den sogenannten Befe-

Digitized by Google

stigungskammern gerichtet. Die einfachste Befestigung dieser Art findet in der Hammersmithsbrücke bei London Statt (Fig. 78) $AA'B'B$ ist das Grundmauerwerk bei der Einfahrt der Brücke mit dem Zollhause bei A', $CDD'C'$ der ausgemauerte Schlauch zur Aufnahme der Spannkettenende, welche durch die Löcher der gußeisernen Platte EF hindurch geführt, und durch ihre länglichten Augen gesteckte starke Bolzen G an die Wand $A'B'$ des Grundmauerwerkes, welches übrigens nach allen Seiten verankert, als ein einziger unzertrennbarer Körper betrachtet werden muß, gepreßt werden. Die Figur 83 zeigt die Befestigung der Wurzelpunkte bei der K. Franzens-Kettenbrücke, wo AB die Spannkettenende, $CDD'C'$ den ausgemauerten Kanal zu ihrer Aufnahme bestimmt, E einen gußeisenen Block, durch dessen Löcher die länglichten Augen F,F' der Spannkettenende hindurch gehen, und mittelst eingesteckter elliptischen Bolzen an jenem sich stützen, G, G den gewölbten Raum bedeuten, dessen Festigkeit den Zug der Spannketten aufheben soll, und der so oft als nöthig, mittelst durchgezogener Anker H, H zu einem Ganzen vereiniget ist, I stellt die Hintermauerung vor, welche auf dem Gewölbe K und gleichfalls durch Klammern L, L mit dem Vordertheile fest verbunden ist.

392. Erklärung. Die K. Franzens-Kettenbrücke besteht eigentlich aus zwei Kettenbrücken, die auf der beiläufig in der Mitte der Moldau befindlichen Schützeninsel in einem und demselben Lastmauerwerk ihre gemeinschaftliche Befestigung haben. Diese sinnreiche Befestigungsweise der Spannkettenenden erhellet aus der 84. Figur, in welcher $ABCDE$ ein Spannkettenende bezeichnet, welches bei B, C, D über gußeiserne Sättel herumgeführt wird, die auf dem von Quadersteinen erbauten Mauerkörper FF' fest eingesenkt sind, eine zweite Spannkette $A'E'$ durchkreuzt die erstere, und geht gleichfalls über die Sättel der zweiten Hälfte des Mauerkörpers FF'', beide Spannketten sind durch die Löcher der gußeisernen Platten E, E' hindurchgezogen, und daselbst durch eingesteckte schmiedeeiserne Bolzen fest gemacht. Um den vertikalen Zug dieser Spannketten aufzuheben, sind in dem Lastmauerwerke zwei nach unten konvexe, gewölbte Bogen G, G' (eine Art des umgekehrten Kappengewölbes) aus den größten Werkstücken erbaut, welche die Bestimmung haben, das darüber befindliche

Digitized by Google

Mauerwerk, welches übrigens mit Längen- und Querschließen fest zusammen verbunden wurde, in einen Körper zu vereinigen, und somit ihr Gesammtgewicht dem Zuge der Spannkette entgegen zu setzen.

393. Erklärung. Wo Lokalverhältnisse es nicht gestatten, den Spannketten jene Ausdehnung zu geben, damit die Resultirende ihres Druckes auf den Tragpfeiler, noch innerhalb der Grundfläche desselben fällt, bedient man sich einer andern Befestigungsweise der Wurzelpunkte, deren Inbegriff gemeiniglich ein Kettenhaus genannt wird. In der 86. Figur ersieht man ein Kettenhaus, welches bei der Grätzer Kettenbrücke über die Mur angewendet wurde. *AA'* ist der auf eingeschlagenen Pfählen befestigte Rost, *ABB'A'* der aus großen Werkstücken angelegte Grund, 52′ 10″ lang, und 37′ 8″ in der Linie des Stromstriches breit, welcher beiden Kettenhäusern zur Unterlage dient. In einer Höhe von 14′ 3″ über dem Roste wurde auf der Wasserseite der Mittelpunkt für die Konstruktion des Quadranten *CDE* festgesetzt, von diesem Punkte aus ist der Quadrant mit dem Halbmesser von 30′ 9″ angelegt und auf folgende Art ausgeführt: Auf der Basis erhebt sich das 10′ dicke Mauerwerk aus Backsteinen, theils in gewölbten Formen, theils in horizontalen Schichten: eine nach einem Kreisbogen, dessen Sehne 11′ mißt, gespannte Gurte *FG* erstreckt sich nach der ganzen Breite der Kettenauflagsmauern und ist 4′ dick, eine andere gleichfalls nach einem Kreisbogen aufsteigende Gurte *HI*, dient dazu, um den auf den Auflagsstellen der Kette herrschenden Seitenschub den Grundmauern zuzuführen, und ist übrigens mit dem in horizontalen Schichten aufgeführten Gemäuer mittelst Schließen verbunden. An jenen Stellen, wo die Kettenglieder über dem Quadranten aufliegen, sind Werkstücke aus Urkalkgestein 3′ lang, 2′ breit und 1½′ dick in das Gemäuer versenkt, und am Anfangspunkte mit Platten aus geschmiedeten Eisen ⅛″ dick besetzt. Die über die Flächen des Quadranten geführten 8 Wurzelglieder vereinigen sich bei *C* mit zwei längeren, welche senkrecht herab durch den in dem Grundwerke ausgesparrten Schlauch *CK* bis auf etwa 1 Schuh über den Rost reichen, wo sie mittelst der Preßplatte befestiget sind. Bei kleineren Kettenbrücken besteht der Grundbau *A* (Fig. 98) aus Bruchsteinen mit einer Einfassung aus Quadern, welche mittelst Schließen *C*, *D* ver-

Digitized by Google

bunden sind. Es ist vortheilhaft, die Spannketten über die Kreisevolvente *EFG* (Fig. 99) statt über einen Quadranten zu führen.

394. Erklärung. Unter den neueren Kettenbrücken behauptet die vom Ingenieur *William T. Clark* im Jahre 1827, zwei deutsche Meilen oberhalb London, über die Themse erbaute Hammersmithsbrücke einen ausgezeichneten Rang. Sie stellt die Verbindung der Grafschaft Surrey mit der Grafschaft Middlesex her, und ist in der Figur (Fig. 75) nach dem Breitenprofil, in (Fig. 76 bis 79) aber in ihren Theilen abgebildet. Die Spannweite des Hauptbogens ACA' beträgt 400 engl. Fuße 3 Zoll, die zwei Tragpfeiler zu beiden Seiten desselben messen ein jeder 22 Fuß, der Spannkettenbogen gegen Middlesex zu 124 Fuß 11 Zoll, gegen Surrey zu 145 Fuß 4 Zolle, demnach beträgt die Länge von einem Landpfeiler zu dem andern, oder der von der Kettenbrücke überspannte Raum 714½ engl. Fuße. Theilt man diese Entfernung in 5 gleiche Theile, so entfallen nahe 3 Theile für den Tragkettenbogen und ein Theil für den Spannkettenbogen. Bei B und B' gehen die Spannketten unter die Fahrbahn, von wo aus bis zu den Landpfeilern C' die Fahrbahn nicht getragen sondern gestützt wird, wie in (Fig. 79). Die Brückenbahn AKB' (Fig. 77) ist in drei Theile getheilt, der mittlere Theil AA' für die Fahrenden bestimmt, beträgt 20 Fuß auf der Brücke und 16 Fuß in den Thoren, der zwei Tragpfeiler, zu beiden Seiten desselben sind Fußwege AB und $A'B'$, jeder 5 Zuß breit, sonach beträgt die Breite der Brücke, so weit sie von Wägen und Fußgängern benützt wird, 30 Fuß: wenn man jedoch die Breite, welche die Ketten sammt Geländern einnehmen, hinzuschlägt, so belauft sich die ganze Breite des Brückenfeldes auf 33½ Fuß. Sie besteht aus einer doppelten Bebrückung, die auf den Unterzügen, die eine der Länge, die andere, und zwar die obere der Breite der Fahrbahn nach, von 3 Zoll starken Bohlen aufgenagelt wurde. Zwischen diesen zwei Bohlenlagern wurde ein mit Theer und Pech getränkter Filz gelegt. Die obere Bohlenlage besteht aus Klötzen von 3 Zoll Höhe, die senkrecht auf die Jahresringe abgeschnitten wurden, und mit dem Kerne aufwärts liegen. Auf diese Klötze wurde ein feiner Granitsand mit einer Mischung von Theer, Pech

Digitized by Google

und Kalk gelegt, und der Fahrweg überdieß noch mit einander kreuzenden eisernen Schienen beschlagen.

395. Erklärung. Die Tragpfeiler, welche im Fluße erbaut sind, haben, von der Oberfläche der Brückenbahn genommen, eine Höhe *AD* (Fig. 75) von 48 Fuß, ihre Breite nach der Richtung des fließenden Wassers beträgt 42 Fuß, und die Brückenbahn liegt 16 Fuß oberhalb des höchsten Wasserspiegels, welche in ihrer Mitte am Scheitel der Tragketten eine Steigung von 8 Zoll besitzt. Die Pfeiler sind zwar von Bruchsteinen erbaut, jedoch an ihrer Außenseite sind sie ganz mit Quadersteinen verkleidet, und es laufen außerdem 6 Lagen starker Quadern in angemessenen Entfernungen durch die ganze Fläche derselben hindurch: hievon befindet sich die erste Lage auf dem Grundroste, die zweite in der halben Höhe bis zur Fahrbahn, die dritte in der Fahrbahn, die übrigen in gleichen Entfernungen so, daß die letzte unter den gußeisernen Satteln zu liegen kommt. Die Verankerung der Quadern unter einander geschah durch gußeiserne Röhren von 3 Zoll Durchmesser und ½ Zoll Stärke, die immer drei Lagen Steine mit einander verbanden. Der gußeiserne Auflagskasten für die Spannketten ist (Fig. 76) zu sehen: er enthält zwei Reihen von Kloben, mit 5 und 4 Rollen, deren zweite über die erstere vorsteht, und welche als Lager der beiden aus kurzen Gliedern angefertigten Spannketten dienen.

396. Erklärung. Die Brückenbahn hängt an 8 Tragketten, die in der Entfernung von beiläufig 1 Fuß über einander laufen, wovon ein Paar zu jeder Seite der Brückenbahn und zwei Paare zwischen dem Fuß- und Fahrwege sich befinden. Diese 8 Ketten gehen über die Tragpfeiler und sind an der Rückseite der 45 Fuß langen Landpfeiler oder Widerlagsmauern $AA'B'B$ (Fig. 78) befestiget. Der Pfeil der Tragketten beträgt 29½ Fuß. Jedes Kettenglied der vier inneren Tragketten besteht aus 6 schmiedeisernen Schienen von 5 Zoll Höhe 1 Zoll Dicke, und ein Kettenglied der 4 äußeren Tragketten enthält bloß 3 derlei Schienen, sonach ist der Querschnitt aller 8 Tragketten $=5.36=180$ engl. Quad. Zolle. Die Länge eines Kettengliedes betrug von Mitte zu Mitte des Auges 8 Fuß 9¾ Zoll. Die Augen hatten 2¾ Zoll im Durchmesser und etwas höher über ihrer Mitte eine Oeff-

Digitized by Google

nung von 1½ Zoll zum Anhängen der vertikalen Tragstangen. Je zwei Kettenglieder wurden durch ein kürzeres Verbindungsblatt vereiniget. Die von denselben herabhängenden Tragstangen hatten einen Quadratzoll zum Querschnitt, und diese hingen in Entfernungen von 5 zu 5 Fuß bei den inneren 4 Ketten, welches 4×81=224 Tragstangen beträgt, ein jedes von den Seitenfeldern der Brückenbahn hing aber an 4×23=92 Tragstangen von demselben Querschnitte, und wird nebstdem von 4×7=28 gußeisernen Stützen in *HI* (Fig. 78) gestützt. Zur Befestigung der Unterzüge enthält eine jede Tragstange an ihrem unteren Ende 2¼ Q. Zoll, welches ein längliches Auge bildet, wie (Fig. 71), durch welches ein eiserner Keil getrieben, und dadurch der von einer jeden Stange getragene Theil der Brückenbahn gehörig angezogen werden kann. Auf diesen Keilen liegen starke gußeiserne Sättel, die zwei paarweise neben einander liegende Unterzüge von 4 Zoll Stärke und 12 Zoll Höhe tragen, zwischen welchen die Tragstangen durchgehen.

397. Anmerkung. Ueber die Literatur der Kettenbrücken mögen hier außer den schon genannten Werken noch bemerkt werden:

Forster's Bauzeitung. Jahrgang 1835.

Kulik, Dr. J. Ph., Untersuchungen über die Kettenbrückenlinie. Prag 1838. 4.

Navier, Rapport et Mémoire sur les ponts suspendus. Paris 1823. 4.

Provis, W. A., an historical and descriptive account of the Suspension bridge, constructed over the Menai-Strait in North Wales, from designe by, and unter the direction of Thomas Telford. London 1828.

Sganzin, M. J., Grundsätze der Strassen-, Brücken-, Kanal- und Hafen-Baukunde. Regensburg 1832. B. II. S. 122.

II. Theorie der Gewölbe.

398. Erklärung. Wenn über zwei vertikale einander parallele Stützen eine gebogene Decke von Prismen so gespannt wird, daß diese abgesehen von dem sie bindenden Mittel, allein durch die Pressungen gegen einander und gegen die Stützen in Ruhe bleiben

Digitized by Google

sollen, so nennt man eine solche Vorrichtung ein Gewölbe, die zwei Stützen heißen Stirnpfeiler oder Widerlager. Die Prismen, welche die gebogene Decke bilden, Gewölbsteine, das zu oberst eines Gewölbes gelegene Prisma, der Schlußstein. Die krumme Linie, nach welcher die inneren Flächen der Wölbsteine geordnet werden, heißt die innere Wölbung oder Intrados, und wenn die Wölbsteine gleich groß sind, so heißt die krumme Linie der äußeren Flächen derselben die äußere Wölbung oder Extrados, und diejenige krumme Linie, welche die Schwerpunkte sämmtlicher Wölbsteine durchschneidet, die Wölbungskurve. Sind mehrere Gewölbe neben einander angeordnet, so heißen die zwei benachbarten Gewölben gemeinschaftliche Stützen die Mittelpfeiler. Der Theil des Pfeilers, von welchem der Bogen anfängt, heißt der Kämpfer. Die Flächen, nach denen sich zwei benachbarte Gewölbsteine berühren, nennt man ihre Fugen, und diejenigen Fugen, in denen ein Bruch am leichtesten erfolgt, die Brechungsfugen. Der Raum zwischen der Brechungsfuge und dem Kämpfer heißt der Fuß des Gewölbes. Die zwei Gewölbsteine zunächst den beiden Kämpfern heißen die Anfänge des Gewölbes, ihr horizontaler Abstand von einander die Spannweite, der oberste Punkt der innern Wölbung der Scheitel, und dessen vertikale Abstand von der die Anfänge verbindenden Geraden die Höhe des Gewölbes.

Ist das Gewölbe von den Widerlagen bis zu einer gewissen Höhe über den Schlußstein nach irgend einer krummen Fläche ausgemauert, so nennt man dieß die Ausgleichung. In der Fig. 100 ersieht man den vertikalen Durchschnitt eines Gewölbes, wo ACA' die innere Wölbung, aca' die äußere Wölbung, AA' die Spannweite, BC die Höhe, Aa, $A'a'$ die Kämpfer, EI, $E'I'$ die Brechungsfugen, $AHGF$ und $A'H'G'F'$ die Widerlagen, und FDF' die Ausgleichung vorstellt.

399. Anmerkung. Um die Gewölbsteine in der gehörigen Lage aufzustellen, werden mehrere Bretter in einer Ebene so zusammengenagelt, daß die innere Wölbungslinie darauf verzeichnet werden kann. Sind die Bretter nach der Gestalt dieser Kurve von außen abgeschnitten, so heißt dieses ein Lehrbogen. Zur Aufstellung eines Gewölbes werden nun mehrere derlei Lehrbögen kon-

Digitized by Google

struirt, und von außen mit Brettern verschalt, und um die Last der Gewölbsteine zu ertragen, durch ein Gerüst gehörig gestützt.

400. Erklärung. Man kann die Gewölbe, ihrer Form nach, in einfache und in zusammengesetzte unterscheiden: von welchen die ersteren blos aus einem sphärischen Segment oder aus cylindrischen Flächen bestehen, und die letzteren aus verschiedenen Segmenten zusammengesetzt sind.

Ist die Basis eines Gewölbes ein Kreis, und die innere Fläche die Oberfläche eines Kugelsegmentes, so heißt das Gewölbe ein Kugelgewölbe; dagegen ein Kuppelgewölbe, wenn die innere Fläche desselben mit der Oberfläche eines halben Ellipsoids übereinfällt, oder wenn dieselbe ein paraboliſches Konoid oder ein Kettenkonoid ist. Ein Kuppelgewölbe heißt gedrückt, wenn dessen Höhe kleiner ist, als die halbe Spannweite, sonst ist es ein erhöhtes Kuppelgewölbe. Ist die innere Fläche eines Gewölbes eine cylindrische Fläche, so nennt man das Gewölbe ein Tonnengewölbe, welches nach der Beschaffenheit der krummen Fläche ein kreisförmiges, elliptisches, paraboliſches Ketten-Tonnengewölbe genannt wird.

Zusammengesetzte Gewölbe sind: 1. Die gebrochenen Tonnengewölbe, welche entweder der Länge nach gebrochen sind, so daß der Querschnitt aus zwei in einem Winkel zusammenstoßenden Bogen besteht, und ein solches wird ein zugespitztes oder ein gothisches Tonnengewölbe genannt: oder sie sind der Quere nach gebrochen, so daß die Enden derselben schief abgeschnitten oder auch wohl mit einem Kuppelgewölbe geschlossen sind, und diese nennt man Muldengewölbe. 2. Das Klostergewölbe, welches auch Hauben- oder Kappengewölbe genannt wird, entsteht, wenn von allen Ecken der Figur, welche dessen Basis bildet, Bogen an einen bestimmten, oberhalb der Figur angenommenen Punkt, den Scheitel, gezogen, und die Zwischenräume zwischen je zwei dieser Bögen, in der durch die Bogen bestimmten Krümmung ausgemauert werden. Ein jedes solches Feld schließt sich an das nächstfolgende durch den, beiden gemeinschaftlichen Bogen an, und man nennt diese Bogen die Graten, Kanten, oder Rippen des Gewölbes. 3. Die Kreuzgewölbe entstehen, wenn zwei Tonnengewölbe sich quer durchschneiden und die von dem Durchschnitte

entstehenden Ecken innerhalb des überwölbten Raumes sich befinden.

401. Aufgabe. Bei einem gleich dicken Tonnengewölbe die Wölbungskurve zu bestimmen.

Auflösung. Sind die Fugen der Gewölbsteine auf der Wölbungskurve senkrecht, so ist diese eine gemeine Kettenlinie.

Beweis. Sei BAB' (Fig. 101) die Wölbungskurve eines gleich dicken Tonnengewölbes: man nehme ihren Scheitel A zum Anfang der Koordinaten, die Vertikale AC zur Abszissenaxe, und also $AP=x$, $PM=y$ zu rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes M, dessen Tangente MT mit der Ordinate den Stellungswinkel $PMT=v$ einschließt: man bezeichne mit g das Gewicht der Längeneinheit des Gewölbbogens $AM=s$, dessen Breite in horizontaler Richtung z. B. 1 Fuß wäre, setze die gegebene Spannweite $BB'=2b$, den Pfeil $AC=\delta$, und den Stellungswinkel $T'BB'$ des Kämpfers in B gleich a. Der Druck des Bogens AM äußert sich auf den Punkt M nach der Richtung der Tangente MT, und wird durch die Festigkeit dieses Punktes getragen. Zerlegte man diese Kraft in eine horizontale $T\cos v$, und in eine vertikale Kraft $T\sin v$, so ist die erstere, wie bei allen Untersuchungen über die Kettenlinien angeführt wurde, von dem Gewichte des aufliegenden Gewölbebogens unabhängig, somit für alle Punkte desselben konstant, und man kann sie mit pg bezeichnen, d. i. gleich dem Gewichte eines Prisma vom Querschnitte des Gewölbbogens setzen, dessen Länge p unveränderlich, und also der Parameter der Wölbungskurve heißt, während die andere Kraft $T\sin v$ dem Gewichte des Gewölbbogens AM gleich sein muß. Dieß gibt

$$\text{I. } T\sin v=gs,\quad T\cos v=pg$$

hieraus ergibt sich durch Division

$$\text{II. } \operatorname{tg} v=s:p,$$

und durch Quadrirung der Gleichungen I.

$$\text{III. } T^2=g^2(s^2+p^2)=g^2p^2\sec^2 v,$$

d. i.

$$\operatorname{tg} v=\frac{s}{p},\quad T=gp\sec v$$

Da nun hier die Abszissenaxe PT mit der verlängerten Tangente einen Winkel MTP einschließt, welcher den Stellungswinkel v zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzt, so ist nach (A. 1462)

$\cot v = \frac{dy}{dx}$, oder wegen II. 128) $tgv = \frac{dx}{dy} = \frac{s}{p}$, welcher Ausdruck gegen die Formel 72) gehalten, sofort zeigt, daß sobald man die Axen mit einander vertauscht, wodurch die Kurve ihre Natur nicht ändert, die gesuchte Wölbungskurve eine gemeine Kettenlinie sei. Zugleich ist ersichtlich, daß die auf der Wölbungskurve senkrechten Fugen wie mm', wenn sie verlängert werden, mit der Vertikalen AR einen Winkel bilden, der ihrem Stellungswinkel v gleich ist.

402. *Folgesatz.* Sind also s, s', zwei im Scheitel A anfangende Bogenlängen der Wölbungskurve, G, G' ihre Gewichte, v, v' die Stellungswinkel ihrer Endpunkte, so hat man aus Formel 128) $tgv : tgv' = s : s' = G : G'$, d. i. die Gewichte zweier vom Scheitel gerechneten Gewölbstücke verhalten sich wie die Tangenten der Stellungswinkel ihrer Endpunkte.

403. *Folgesatz 2.* Die Gleichung 116) liefert uns sogleich $s = \frac{pdx}{dy}$, also $s^2 + p^2 = p^2\left(\frac{dy^2 + dx^2}{dy^2}\right) = \frac{p^2 ds^2}{dy^2}$, woraus

$$\text{IV.}\quad dy = \frac{pds}{\sqrt{(s^2+p^2)}}, \text{ und } dx = \frac{sds}{\sqrt{(s^2+p^2)}} \text{ folgt.}$$

Die Integration nach Int. 63) und 34) liefert

$$y = p\lambda[s + \sqrt{(s^2+p^2)}],\quad x = \sqrt{(s^2+p^2)}$$

da hier x und y mit s verschwindet, so sind die Konstanten der Integration $-p\lambda p$ und $-p$ beziehungsweise, sonach hat man vollständig

$$129)\ y = p\lambda\frac{s + \sqrt{(s^2+p^2)}}{p},\ \text{und}\ 130)\ x = \sqrt{(s^2+p^2)} - p$$

aus der letzteren Gleichung erhält man

131) $s = (2px + x^2)$, und hiemit verwandelt sich die Formel 116) in 131)

$$y = p\lambda\frac{p + x + \sqrt{(2px+x^2)}}{p}$$

und dieser Ausdruck ist die Gleichung einer gemeinen Kettenlinie, deren Abszissenaxe eine Vertikale durch den Scheitel, aber deren Ursprung im Scheitel der Kurve liegt.

Digitized by Google

404. Folgesatz 3. In Bezug auf die beiden Kämpfer hat man a statt v, δ statt x, b statt y und l statt s setzend, die Ausdrücke

132) $A=\frac{p}{g}\sec a,\ l=\sqrt{(2p\delta+\delta^2)},\ b=p\lambda\frac{p+\delta+\sqrt{(2p\delta+\delta^2)}}{p}$

bezeichnet man nun noch den vertikalen Druck auf die Kämpfer mit V, und den horizontalen Druck mit H, so erhält man

133) $V=gl=g\sqrt{(2p\delta+\delta^2)},\ H=pg$, wo der Parameter p aus Spannweite und dem Pfeile der Kettenlinie sich nach (318) ergibt.

405. Anmerkung. Verwechselt man aber die Koordinatenaxen mit einander, nachdem man ihren Ursprung aus dem Scheitel A in dem Punkt O versetzt hat, so hat man gleichzeitig $OQ=x$, und $QM=y$, und die Gleichungen IV. geben

$$dx=\frac{pds}{\sqrt{(s^2+p^2)}},\quad dx=\frac{sds}{\sqrt{(s^2+p^2)}}$$

woraus man mittelst Fnt. 64) nnd 34) erhält

$$x=p\operatorname{Arc}\operatorname{Sin}\frac{s}{p},\quad y=\sqrt{(s^2+p^2)}$$

die erstere dieser Gleichungen gibt durch Umkehrung

$\frac{s}{p}=\operatorname{Sin}\frac{x}{p}$, und sonach $\frac{s^2+p^2}{p^2}=\operatorname{Sin}^2\frac{x}{p}+1=\operatorname{Cos}^2\frac{x}{p}$ (A. 660)

hiemit wird die zweite $y=p\operatorname{Cos}\frac{x}{p}$ übereinstimmend mit Form. 76).

406. Aufgabe. Die Stärke der Widerlager eines gleich dicken Gewölbbogens zu finden.

Auflösung. Heißt h die Höhe und w die Stärke der Widerlager, d. i. ihre in der Ebene des Gewölbbogens genommene Länge, die darauf senkrechte Breite $=1$ gesetzt; ferner g und g' die Gewichte der kubischen Einheit des Gewölbbogens und der Widerlager, so hat man gegen den Schub

134) $w=g[p-\mu\sqrt{(2p\delta+\delta^2)}]:\mu g'h$, und gegen den Umsturz

135) $w=-\frac{g\sqrt{(2p\delta+\delta^2)}}{g'h}+\sqrt{\left[\frac{2pg}{q'}+\frac{g^2(2p\delta+\delta^2)}{g'^2h^2}\right]}$

Beweis. Sei $DE=h$ die gegebene Höhe, und $EF=w$ die gesuchte Stärke der Widerlager, so ist $g'hw$ das Gewicht, und

$g'hw+V$ der vertikale Druck auf die Grundfläche EF des Widerlagers, somit $\mu[g'hw+g\sqrt{(2p\delta+\delta^2)}]$ die daher entstehende Reibung, welcher Widerstand der horizontalen Kraft $C=pg$ das Gleichgewicht hält, woraus man w wie oben findet. Ferner sind Vw und Ch die statischen Momente der Kräfte C, V, und $\frac{1}{2}hg'w^2$ das Moment des Widerlagers; somit

$$\frac{1}{2}hg'w^2+Vw=Ch, \text{ oder } w^2+\frac{2Vw}{hg'}=\frac{2C}{g'}$$

eine quadratische Gleichung, durch deren Auflösung sich

$$w=-\frac{V}{hg'}+\sqrt{\left[\frac{V^2}{h^2g'^2}+\frac{2C}{g'}\right]} \text{ ergibt,}$$

und man hat nur noch statt V und C ihre Werthe aus Formel 133) zu setzen, um sofort die Stärke w des Widerlagers gegen den Umsturz zu bestimmen.

407. Lehrsatz. Wenn die Fugen der Gewölbsteine auf der Wölbungskurve senkrecht stehen, und diese Fugen in jedem Punkte denselben Druck erleiden sollen, so ist die Wölbungskurve eine gleich gespannte Kettenlinie.

Beweis. Sei $A'abB'$ (Fig. 102) ein Gewölbbogen mit veränderlichen Querschnitten, welche in jedem seiner Punkte mit dem vom Scheitel zu den Kämpfern wachsenden Drucke zunehmen, M sei ein Punkt der Wölbungskurve, d. i. der centrischen Linie AB der Wölbung, auf welcher die Fugen wie $M'm$ senkrecht stehen und daher mit der Tangente MT dieses Punktes einen rechten Winkel einschließen, wodurch der Winkel $M'RA$ einer Fuge mit der Vertikalen, dem Stellungswinkel $TMQ=v$ dieses Punktes gleich wird. Wir bezeichnen mit C die Spannung oder den horizontalen Druck im Scheitel, und setzen $C=pg$, wo p den Parameter bedeutet, ferner, wenn die Länge der Fuge $A'a$ im Scheitel $=1$ genommen wird, sei $M'm=u$ die Dicke des Gewölbes im Punkte M, und σ sei die Länge eines Prisma vom Querschnitte, welchen das Gewölbe im Scheitel besitzt, und vom gleichen Gewichte, als das Gewicht des Gewölbbogens mit veränderlichen Querschnitten, dessen centrische Linie die Länge $AM=s$ ist. Ueberträgt man die konstante Größe p vom Punkte A gegen O, auf

Digitized by Google

die Verlängerung der Geraden AC hin, und nimmt die Abszissen auf der horizontalen Direktrix OX, so bestimmen die Koordinaten $OP=x$, $PM=y$ die Lage des Punktes M in der Wölbungskurve AB. Heißt nun T der Druck, welchen die Fuge $M'm$ von dem über ihr befindlichen Gewölbstücke $M'maA'$ auszuhalten hat, so erhält man sogleich

I. $T\sin v=g\int uds=g\sigma$, $T\cos v=pg=C$, mithin

II. $\text{tg}v=\frac{\sigma}{p}$, $T=g\sqrt{(p^2+\sigma^2)}=pg\sec v$

und weil $u:1=T:C=\sqrt{(p^2+\sigma^2)}:p=d\sigma:ds$, so wird

III. $\frac{d\sigma}{ds}=\frac{\sqrt{(p^2+\sigma^2)}}{p}$, und $\text{tg}v=\frac{\sigma}{p}=\frac{dy}{dx}$, also

IV. $\sec v=\frac{\sqrt{(dy^2+dx^2)}}{dx}=\frac{ds}{dx}=\frac{\sqrt{(p^2+\sigma^2)}}{p}$

und durch Division der Gleichungen III. und IV. folgt

$$dx=\frac{p^2d\sigma}{\sqrt{(p^2+\sigma^2)}},\quad dy=\frac{p\sigma d\sigma}{\sqrt{(p^2+\sigma^2)}}$$

deren Integration, wie in (341), sofort die Gleichung der gleichgespannten Kettenlinie

$$y=p(\lambda\sec\frac{x}{p}+1)\text{ liefert}$$

408. *Folgesatz.* Heißt nun, wie vorhin, α der Stellungswinkel eines Kämpfers, A der Druck auf denselben, nach der Richtung seiner Tangente, b die halbe Spannweite des Gewölbes, δ der Pfeil, und G das Gewicht des halben Gewölbes, so hat man $\sigma=p\text{tg}v$, $T=pg\sec v$, daher $G=pg\text{tg}\alpha$, $A=pg\sec\alpha$, wo der Parameter p nach (349) aus der halben Spannweite BC und dem Pfeile AC sich bestimmen läßt, welche Größen zwar nicht unmittelbar gegeben sind, aber aus den im Lichten gemessenen Linien $bc=b'$ und $ac=\delta'$, wenn man die Dicke des Gewölbes im Scheitel $A'a=c$, also $B'b=c\sec\alpha$ setzt, durch die Gleichungen $\delta=\delta'$, $b=b'+\frac{1}{2}c\text{tg}\alpha$ sich ergeben.

Zum Behufe einer ersten Näherung kann man anfangs $b=b'+\frac{1}{2}c$ setzen, und wenn man aus diesen Werthen α, und p gefunden hat, sodann b genauer bestimmen.

Digitized by Google

409. Folgesatz 2. Auf diese Weise lassen sich Tonnengewölbe herstellen, bei welchen kein Punkt überflüssig ist, und der Druck auf die Flächeneinheit von einer Fuge zu der andern unverändert bleibt, nebstbei die ganze Masse des Gewölbes sich gegenseitig im Gleichgewichte erhält. Die Gestalt eines solchen Gewölbbogens ist offenbar eine cylindrische, bei welcher die centrische Linie nach einer gleich gespannten Kettenlinie fortläuft. Ist nun die zur Einheit genommene Länge BB' dieses cylindrischen Körpers seiner größten Dicke BC (Fig. 103) am Kämpfer gleich, und man schneidet denselben durch zwei Ebenen BAO, $B'AO$ beiderseits ab, die sich in der vertikalen Geraden AO durchschneiden, so entsteht eine Cylinderhufe $BB'A$, deren centrische Linie dieselbe Kurve wie vorhin ist, und die wir eine Gewölbsrippe nennen wollen. Es ist leicht einzusehen, daß der Bestand des Gleichgewichts in einer Gewölbsrippe nur dadurch vergrößert wird, daß man von dem cylindrischen Körper die beiden Cylinderhufen, deren Grundflächen der halbe Querschnitt des Gewölbes im Scheitel, und deren keilförmige Abschnitte sich in den Linien BC, $B'C'$ endigen, entfernt hat, da die Bestandtheile dieser Abschnitte unmöglich unter einander im Gleichgewichte sein können. Denkt man sich nun mehrere einander gleiche Gewölbsrippen dieser Art so neben einander gestellt, daß die sie einander begrenzenden Ebenen sich sämmtlich in derselben vertikalen Axe AO schneiden, so werden ihre Grundflächen $BB'C'C$ einen Kreisring BCO bilden, dessen Mittelpunkt in O ist; es entsteht nun durch ihre Vereinigung ein Kuppelgewölbe, dessen Scheitel im Punkte A, dessen Basis der Kreis vom Durchmesser BD ist, und das Gleichgewicht der Gewölbsteine in einem solchen Kuppelgewölbe wird noch dadurch zunehmen, daß sich einzelne Gewölbsrippen gegenseitig stützen. Da die Rippen sämmtlicher Cylinderhufen in dem gemeinschaftlichen Punkte A am Scheitel zusammenlaufen, demnach aufwärts immer schmäler werden, so wird die Konstruktion eines solchen Kuppelgewölbes dadurch einfacher, daß man statt der obersten, nahe kugelförmigen Zone EAF eine Laterne EGF von demselben Gewichte mit jener Zone anbringt, welche zugleich zur Beleuchtung des innern Raumes der Kuppel beiträgt.

Digitized by Google

409. Erklärung. Tonnengewölbe oder auch Kuppeln, deren centrische Linie eine gleichgespannte Kettenlinie ist, wollen wir Gewölbe von gleichem Drucke nennen, weil in beiden Arten von Gewölben die Flächeneinheit der Gewölbfugen überall denselben Druck erleidet.

410. Aufgabe. Den Krümmungshalbmesser und die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes der Kettenbrückenlinie zu finden.

Auflösung. Sind x, y die Koordinaten eines gegebenen Punktes der Kettenbrückenlinie bezogen auf ihre Direktrix als Abszissenaxe, und heißt R, der Krümmungshalbmesser, und t, u die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes desselben Punktes bezogen auf dieselben Axen, so hat man

$$R=-\frac{p}{q\sqrt{q}}\cdot\frac{\sqrt{(q+\mathrm{tg}^2w)^3}}{\sec^2w},\quad t=x-\frac{p\,\mathrm{tg}w}{q\sqrt{q}}\cdot\frac{q+\mathrm{tg}^2w}{\sec^2w}$$

$$\text{und}\quad u=y+\frac{p}{q}\cdot\frac{q+\mathrm{tg}^2w}{\sec^2w}.$$

Beweis. Die Ausdrücke (A. 1242) geben, wenn man ihnen ds^2 statt dx^2+dy^2 setzt

$$t=x-\frac{dyds^2}{dxd^2y},\quad u=y+\frac{ds^2}{d^2y},\quad R=\frac{ds^3}{dxd^2y}$$

nun ist nach (363)

$$dx=\frac{pdw}{\sqrt{q}},\quad dy=\frac{p}{q}\mathrm{tg}w\,dw,\quad ds=\frac{pdw}{q}\sqrt{(q+\mathrm{tg}^2w)}$$

hiemit erhält man

$$d^2y=\frac{p}{q}dw^2\sec^2w\text{ und }dxd^2y=\frac{p^2}{q\sqrt{q}}dw^3\sec^2w,\text{ sonach wird}$$

$$\frac{dyds^2}{dx\,d^2y}=\frac{p\,\mathrm{tg}w}{q\sqrt{q}}\cdot\frac{q+\mathrm{tg}^2w}{\sec^2w},\quad\frac{ds^2}{d^2y}=\frac{p}{q}\cdot\frac{q+\mathrm{tg}^2w}{\sec^2w}$$

woraus sich sofort die obigen Ausdrücke ergeben.

411. Folgesatz. Ist $q=1$, so findet man $\mathrm{tg}w=\mathrm{tg}v$, also $q+\mathrm{tg}^2w=\sec^2w$, mithin $R=-p\sec v$, wie (345) $t=x-p\,\mathrm{tg}v$, $u=y+p$, als Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes der gleichgespannten Kettenlinie. Wir bemerken nur noch, daß der Formel 93) gemäß $x=pv$ ist, also $t=p(v-\mathrm{tg}v)$ stets einen negativen Werth erhält.

Digitized by Google

412. Anmerkung. In meiner oben (397) angeführten Abhandlung hat sich S. 35 in den Werthen von t und u, welche dort g und h heißen, ein nicht angezeigter Druckfehler eingeschlichen, und die hier (410) angegebenen, sind die richtigen. Zur Verzeichnung des Lehrbogens für ein Gewölbe von gleichem Drucke wird man vorerst aus der halben Spannweite und dem Pfeile des Gewölbes nach (349) den Stellungswinkel des Kämpfers und den Parameter bestimmen, mit diesen Daten berechne man für die Werthe von v, welche von $10°$ zu $10°$, oder noch besser von $5°$ zu $5°$ steigen, nach den Formeln 93) und 94) die Koordinaten x, y, und nach (411) die Koordinaten t, u und den Krümmungshalbmesser R. Ist c die Dicke des Gewölbes im Scheitel, so ist die Länge u einer Fuge im Punkte, dessen Stellungswinkel v vorstellt, $u=c.\sec v$. Hat man nun aus den gewählten Werthen von v die zugehörigen Werthe von x, y, t, u, R gefunden, so läßt sich die Verzeichnung der Wölbungskurve mit jeder geforderten Genauigkeit richten. Nun verbinde man jeden der so bestimmten Punkte der Kurve mit seinem Krümmungsmittelpunkte und übertrage die halbe Länge der Fuge nebst der Dicke der Bretterverschalung vom Punkte der Kurve auf den Krümmungshalbmesser abwärts, so ergeben sich sofort die Punkte der Kurve, welche die innere Wölbung des Gewölbes bildet, und nach welcher der Lehrbogen auszuschneiden ist.

Beispiel. Sei $b=24'$, $\delta=15'$, so erhält man $a=57°.86$, $p=23.766$: nimmt man nun $c=1'$, die Breite des Gewölbes $=1'$ und das Gewicht der kubischen Einheit $g=1.5$ W. Centner, so ergibt sich $C=35.65$, $A=67.011$ W. Ctr. die halbe Länge der centrischen Linie des Gewölbes $l=29.58$ Fuß. Die Koordinaten der Gewölbskurve sind nun in folgender Tafel enthalten, wo c die zugehörige Fugenlänge und T den Druck des auf einer Fuge ruhenden Gewölbes in W. Ctr. bedeutet:

Digitized by Google

v	x	y	t	u	R	c	T
5°	2.07	23.86	0.01	47.62	23.86	1.00	35.78
10	4.15	24.13	0.04	47.90	24.13	1.02	36.20
15	6.22	24.60	0.15	48.37	24.60	1.04	36.91
20	8.30	25.29	0.35	49.06	25.29	1.06	37.94
25	10.37	26.22	0.71	50.99	26.22	1.10	39.33
30	12.44	27.44	1.28	51.21	27.44	1.15	41.16
35	14.52	29.01	2.12	52.78	29.01	1.22	43.52
40	16.59	31.02	3.35	54.79	31.02	1.31	46.54
45	18.67	33.61	5.10	57.38	33.61	1.41	50 41
50	20.74	36.97	7.58	59.74	36.97	1.56	55.46
55	22.81	41.43	11.13	65.20	41.43	1.74	62.15

Daß hier die Direktrix die Abszissenaxe sei, braucht nicht erst erinnert zu werden.

413. Aufgabe. Die Kurve zu bestimmen, welche als innere Wölbung zum Vorschein kommt, wenn die senkrechte Höhe des Gewölbes durchgängig dieselbe ist.

Auflösung. Diese ist eine Parabel, deren Scheitel mit dem Scheitel des Gewölbes übereinfällt, und deren Abszissenaxe vertikal ist.

Beweis. Sei AMB (Fig. 104) die innere Wölbungskurve die ein Gewölbe zu stützen vermag, deren vertikale Höhen wie MM', $AA'=c$ durchaus einander gleich sind. Das Gewicht des im Punkte M gestützten Gewölbstückes $AA'M'M$ ist nach (407 II) $Q=gpctgv$, mithin ist das über dem Bogenelement $Mm=ds$ gelegene Stück $dQ=gpcdv\sec^2 v$, wofür man auch noch setzen kann, $gdscosv$, weil c dessen Höhe und $dscosv$ dessen Breite ist. Man hat also $gpcdv\sec^2 v=gcdscosv$ oder $pdv\sec^2 v=dscosv$, wenn der Anfangspunkt der Koordinaten im Scheitel A angenommen wird, so hat man $tgv=\frac{dx}{dy}$, $cosv=\frac{dy}{ds}$, oder $dscosv=dy$, mithin wird $dy=pdv\sec^2 v$, und $y=ptgv=\frac{pdx}{dy}$, dieß gibt $ydy=pdx$, und integrirend, $y^2=2px$ als Gleichung der Kurve für die innere Wölbung.

414. Lehrsatz. Die Kurve, deren Ausgleichung durch eine

horizontale Gerade begrenzt wird, ist eine Kettenlinie, deren Ordinaten zu den Ordinaten der gemeinen Kettenlinie in einem beständigen Verhältnisse stehen.

Beweis. Es sei über dem Gewölbebogen BAB' (Fig. 105) eine Belastung gelegt, die oben durch eine horizontale Gerade DD' begrenzt wird. Die Druckhöhe AE im Scheitel sei c, und in einem Punkte M der Kurve gleich MP. Nimmt man die Gerade DD' zur Abszissenaxe und in ihr den über dem Scheitel A der Kurve senkrecht gelegenen Punkt E zum Anfangspunkt, so hat man für $EP=x$, $PM=y$, und die auf dem Bogen AM des Gewölbes ruhende Belastung $AMPE=\int y dx$; heißt nun g das Gewicht ihrer kubischen Einheit, und wird ihre Breite $=1$ gesetzt, so ist $g\int y dx$ das Gewicht derselben, welches einen Druck T auf den Punkt M nach der Richtung der Tangente ausübt. Man zerlege diesen Druck, indem man den Stellungswinkel TMQ mit v bezeichnet, in einen vertikalen $T\sin v$, und einen horizontalen Druck $T\cos v$; der letztere kann natürlich nur von den Abmessungen der Belastung im Scheitel abhängen, und gleich pgc gesetzt werden, wo p eine lineare Größe vorstellt. Man hat also

$$\text{I. } T\sin v = g\int y dx,\quad T\cos v = pgc = gk^2,$$

wenn Kürze halber pc mit k^2 bezeichnet wird. Hieraus folgt

$$k^2 \operatorname{tg} v = \int y dx, \text{ und II. } k^2 d\operatorname{tg} v = y dx$$

allein $\operatorname{tg} v = dy : dx$, somit $dx \operatorname{tg} v = dy$. Multiplizirt man damit die Gleichung II. so ergibt sich $k^2 \operatorname{tg} v . d\operatorname{tg} v = y dy$, und hieraus folgt durch die Integration $\frac{1}{2}k^2 \operatorname{tg}^2 v = \frac{1}{2}y^2 + C$, nun ist für $v=0$, $y=c$, folglich $C = -\frac{1}{2}c^2$, hiemit wird $k^2 \operatorname{tg}^2 v = y^2 - c^2$, oder $k \operatorname{tg} v = \sqrt{(y^2 - c^2)}$, und

$$\frac{k dy}{dx} = \sqrt{(y^2 - c^2)}, \text{ also III. } dx = \frac{k dy}{\sqrt{(y^2 - c^2)}}$$

Nach Int. 66) erhält man hieraus den Ausdruck

$$x = k \operatorname{Arc\,Cos} \frac{y}{c}, \text{ durch dessen Umkehrung}$$

$$y = c \operatorname{Cos} \frac{x}{k}, \text{ oder nach (A. 655)}$$

$$y = \tfrac{1}{2}c\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) \text{ folgt.}$$

Digitized by Google

Heißt nun y' die Ordinate einer Kettenlinie mit dem Parameter k, so hat man nach

$$y' = \tfrac{1}{2}k\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right), \text{ demnach}$$
$$y : y' = c : k = c : \sqrt{pc} = \sqrt{c} : \sqrt{p}.$$

415. Folgesatz. Verzeichnet man mit einem willkührlichen Parameter $EA' = p$ die gemeine Kettenlinie $NA'N'$, deren Scheitel im Punkte A' wäre, und deren Direktrix mit der Geraden DD' zusammenfiele, und man schneidet ihre Ordinate PN im Punkte M so, daß $PN : PM = \sqrt{c} : \sqrt{p}$, so ist der Punkt M ein Punkt in der Stützungslinie BAB': und eben so ergeben sich beliebig viele Punkte m, M' derselben, indem man die Ordinaten pn, $P'N'$ in demselben Verhältnisse theilet. Auf diese Weise findet man die innere Wölbung für Brückenbögen, auf denen die ausgemauerte Fahrbahn DD' ihre Unterstützung erhält.

416. Lehrsatz. Die vertikale Druckhöhe in irgend einem Punkte eines Gewölbes, dessen innere Wölbung gegeben ist, hat den Werth

$$z = -\frac{cd^2y\,dx}{dy^3}$$

Beweis. Ist AB (Fig. 104) eine gegebene Kurve, welche die innere Wölbung eines Gewölbes BAB' bilden soll, so läßt sich in irgend einem Punkte M die Druckhöhe $MM' = z$ bestimmen, welche erfordert wird, damit dieser Punkt der Kurve angehöre, und damit das über ihm gelegene Belastungselement $MM'm'm$ mit dem Gewichte der benachbarten Belastungen im Gleichgewichte bleibe. Man setze für den Punkt M, $AP = x$, $PM = y$, $AA' = c$ und $TMP = v$, so hat man für den Parameter $= 1$ auch hier die Gleichung $\sigma = \mathrm{tg}v$, wo σ die Länge eines Prisma darstellt, welches mit dem Belastungskörper $AA'M'M$ denselben Inhalt und einen Querschnitt $AA' = c$ hätte; es ist also das Gewicht der von dem Bogenelement $Mm = ds$ gestützten Belastung $gc\sigma = gc\,\mathrm{tg}v$, dessen Differentiale das Gewicht des über demselben gelegenen Theiles $MM'm'm = gcdv\sec^2 v$ vorstellt. Da das Bogenelement Mm mit der vertikalen Druckhöhe MM' den Winkel $\frac{1}{2}\pi - v$ einschließt, so ist offenbar $\cos v.ds$ die Breite, und also $gz\cos v ds$ das Gewicht

des Belastungselementes $MM'm'm$, mithin hat man

$$gz\cos v ds = gcdv\sec^2 v, \text{ woraus } z = \frac{cdv}{\cos^3 v ds} \text{ folgt. Nun ist}$$

nach (A. 1251) der Krümmungshalbmesser $R = ds:dv$ und $\cos v = dy:ds$, hiemit erhält man z wie oben.

417. Folgesatz. In einer Ellipse, deren Scheitelgleichung $\alpha^2 y^2 = \beta^2(2\alpha x - x^2)$ ist, hat man

$$y = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(2\alpha x - x^2)},\quad dy = \frac{\beta(\alpha - x)dx}{\alpha\sqrt{(2\alpha x - x^2)}},\quad d^2y = -\frac{\alpha\beta dx^2}{\sqrt{(2\alpha x - x^2)^3}}$$

$$ds = \frac{dx\sqrt{(\alpha^2\beta^2 + 2\alpha\gamma^2 x - \gamma^2 x^2)}}{\alpha\sqrt{(2\alpha x - x^2)}},\quad R = \frac{\sqrt{(\beta^4 + \gamma^2 y^2)^3}}{\alpha\beta^4}$$

für $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$: hiemit ergibt sich $z = \frac{\alpha^3 c}{(\alpha - x)^3}$

Aus dieser Formel ersieht man sogleich, daß die erforderliche Druckhöhe vom Scheitel ab, in welchem $x = c$ ist, anfangs langsamer, dann mit wachsenden Abszissen schneller zunimmt bis sie bei $x = \alpha$, wo der Bogen der Ellipse zu einer halben Ellipse wird, einen unendlich großen Werth erlangt. Somit wäre eine halbe Ellipse, und weil der Ausdruck z von der kleinen Halbaxe gar nicht abhängt, auch ein Halbkreis zu Gewölbbögen ganz untauglich, weil man an ihren Kämpfern eine unendliche Druckhöhe anbringen müßte.

418. Folgesatz 2. Soll aber ein elliptischer Bogen bestimmt werden, welcher als innere Wölbung zur Stützlinie des Gewölbes wird, wenn deren Druckhöhen im Scheitel gleich c, und an den Kämpfern gleich h, gegebene Größen sind, so hat man nur in (417) h statt z, und δ statt x zu setzen, man erhält so

$$h = \frac{\alpha^3 c}{(\alpha - \delta)^3},\ \text{also}\ \frac{\alpha}{\alpha - \delta} = \sqrt[3]{\frac{h}{c}},\ \text{und I.}\ \alpha = \frac{\delta\sqrt[3]{h}}{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{c}}$$

nun ist die halbe Spannweite $BC = b$ eine Ordinate des elliptischen Bogens BA, dessen zugehörige Abszisse $AC = \delta$, somit

$$b = \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{(2\alpha\delta - \delta^2)},\ \text{also II.}\ \beta = \frac{b\alpha}{\sqrt{(2\alpha\delta - \delta^2)}} = \frac{b\sqrt[3]{h}}{\sqrt{[\sqrt[3]{h^2} - \sqrt[3]{c^2}]}}$$

und die Ausdrücke I. und II. sind die Halbaxen des gesuchten ellip-

Digitized by Google

tischen Bogens, der bei den gegebenen Druckhöhen h, c als Stützlinie des Gewölbes verwendet werden kann.

419. Folgesatz 3. Ist hier $\alpha=\beta$, so ergibt sich aus der Gleichstellung der Ausdrücke I., II., der erforderliche Pfeil des kreisförmigen Gewölbbogens

$$\delta=b\sqrt{\frac{\sqrt{h}-\sqrt{c}}{\sqrt{h}+\sqrt{c}}}$$

420. Anmerkung. Bei der hier vorgetragenen Theorie der Gewölbe wurde auf die Verbindung der Gewölbsteine durch Mörtel keine Rücksicht genommen, obschon bekanntlich jene zur Vermehrung der Festigkeit eines Gewölbes viel beiträgt, weil man hier als Grundsatz aufstellen muß, daß ein jeder Gewölbstein gegen die benachbarten eine solche Stellung erhalten soll, daß er mit seinem Gewichte nicht nur den nächst darüber befindlichen, sondern auch allen, von welchen dieser Stein gedrückt wird, bis zum Schlußsteine das Gleichgewicht halte. Vieles hieher Gehörende findet man noch in Eytelweins Statik II. Bande, Gerstner's Mechanik, Band I., und in Unger's Uebungen. Der Theorie der Gewölbe ausschließlich gewidmete Schriften sind aber

Dietlein, J. F. W., Beitrag zur Statik der Kreuzgewölbe. Halle, 1823.

Hutton, *Ch.*, The principles of bridges. The 2. Edit. London 1801.

Die Statik der Gewölbe von K. W. Knochenhauer. Berlin 1842.

III. Die Hängebrücken.

421. Anmerkung. Die Materialien, deren man sich zum Bau der Brücken vorzugsweise bedient, sind: Steine, Eisen und Holz. Allein die beiden ersteren sind zu kostspielig, und ihr spezifisches Gewicht, welches bei Steinen 3- bis 4mal, beim Eisen 8mal größer ist, als jenes des Holzes, erfordert einen sehr festen Unterbau, nebstdem gestattet die geringe Elastizität der Bausteine, nur Brückenbögen von kleiner Spannweite und bedeutender Masse, wodurch zugleich die Nothwendigkeit des Baues mehrerer massiven Mittelpfeiler herbeigeführt wird. Obschon nun frisch gefälltes Holz

Digitized by Google

zum Bau untauglich ist, und auch, wenn es längere Zeit nach dem Fällen gelegen hat, dennoch keine lange Dauer besitzt, sondern in wenigen Jahren morsch wird, oder in Fäulniß übergeht, so läßt sich nichtsdestoweniger durch künstliche Zubereitung dem Holze eine Festigkeit verschaffen, wodurch dessen Dauer für eine unübersehbare Anzahl Jahre gesichert wird. Daß Holz unter Wasser eine sehr lange Dauer weiset, ist unter Anderem aus der von Trajan erbauten Brücke über die Donau zu entnehmen, wo das vorgefundene Holz noch vollkommen erhalten und etwa ¼ Zoll tief, versteinert befunden wurde. Daß aber auch in der Luft das Holz sich durch Jahrhunderte erhalten läßt, bemerkt man an den 1000 Jahre alten Dachstühlen der ältesten Kirchen — an den 3000 Jahre alten egyptischen Mumienkästen — an den noch aus den Zeiten des byzantinischen Kaiserthums auf Holz gemalten Tafelgemälden, die noch immer in der Vatikanischen Bibliothek zu Rom im guten Zustande sich befinden, und ein hohes Alter von mehr als 1000 Jahren beurkunden. Bevor ein Holz in Verwesung übergeht, bemerkt man an seiner Oberfläche weiße, in schleimige Flocken zusammenfließende Punkte, die, einen zartwolligen Anflug bildend, allmählig zu einem feinen, silberartigen, die Holzoberfläche anfeuchtenden Gespinnste werden, das durch Wachsthum sich zu einem feinen, blättrigen, aschgrauen Fadengeflechte vergrößert. So durchdringt es die feinsten Fugen des Zimmerholzes, selbst Mauersteinritzen, und verbreitet sich über Steine, Metalle von einem Gebäudetheil zum andern. Mit der Zeit bildet sich hieraus der verwüstende Hausschwamm, der zweijährige Becherzackenschwamm, der dünnhäutige Kehrzackenschwamm, je nach den Holzgattungen, bei welchen die Verwesung eintritt. Mit dem Alter des ausgewachsenen Schwammes werden die Holzzellen mit Körnern erfüllt, die sich nach und nach in braunrothes Pulver verwandeln, das nachher ringsum ausstäubt. Ueberall und stets wird der Schwamm vermieden, wo Trockenheit, Luft und Licht herrschen. Die Ursache dieser holzzerstörenden Schwammbildung kann wohl keine andere sein, als die Fäulniß der Säfte, die unter Zutritt von Feuchtigkeit und dem Wechsel der Temperatur auch bei lang gefälltem Bauholze vor sich gehen kann. Hat man daher das Bauholz vor

Digitized by Google

seiner Verwendung nach der Vorschrift, welche Regierungsrath Prechtl in dessen Jahrbüchern des k. k. polytechnischen Institutes Band III. S. 129 bis 161 umständlich beschrieben hat, mit Wasserdämpfen gehörig ausgelaugt, und hierauf mit Theerdämpfen imprägnirt, so ist der Keim der künftigen Zerstörung des Holzes, wo nicht für immer, doch wenigstens auf eine lange Zeit beseitiget; zugleich erhält das so präparirte Holz die gewiß sehr schätzbare Eigenschaft, daß es nicht mehr schwindet, und sich wirft. Die Operation ist übrigens so einfach, und mit so wenigen Vorauslagen verbunden, daß es wahrlich zu verwundern ist, wie sie bisher nur ausnahmsweise in Anwendung gebracht, und in der Regel alles Bauholz, fast im Naturzustande, verwendet wird.

422. Anmerkung 2. Wenn aber dem Holze, aller Wahrscheinlichkeit nach, die Dauer des Eisens oder Steines, verschafft werden kann, so behauptet schon das Holz vor diesen Stoffen den wesentlichen Vorzug, daß es elastisch ist, und Schwingungen und Stöße leichter vertragen kann, als jene. Der Hofbaurath Schemerl sagt in seinem Werke über den Straßenbau Wien 1807 S. 185. „Soll ein gemauerter Pfeiler jene Last unterstützen, welche oft ein schlanker kaum 8 bis 10 Zoll dicker Baum zu tragen im Stande ist, welche Stärke müßte er besitzen?" und an einer andern Stelle: „der steinerne Pfeiler würde kaum im Stande sein, sich selbst zu tragen, wenn er die Abmessungen eines Baumes hätte." Ich frage, welcher Stein würde als Pfahl, mit einem mehrere Zentner schweren Rammbären, der 10 und mehr Fuß hoch über ihn fällt, so viele Stöße aushalten als ein hölzerner Pfahl, ohne in tausend Stücken zertrümmert zu werden? Nur der inneren Elastizität der Holzfasern, und ihrer innigen Verbindung unter einander, läßt sich diese Tragfähigkeit des Holzes zuschreiben, eine Eigenschaft, welche das Holz zum Bau der Brücken weit geeigneter macht, als den Stein oder das Eisen.

423. Erklärung. Wenn eine Anzahl hölzerner Prismen nach der Krümmung einer gleichgespannten Kettenlinie entweder ohne alle Bindungsmittel, oder aber gehörig verankert so aufgestellt werden, daß die Enden dieses vertikalen Bogens in festen Widerlagen ruhen, und in gleichen Abständen an dem Bogen, eiserne

Digitized by Google

Stangen herabhängen, welche die horizontale Fahrbahn tragen; so nennt man eine solche Bauvorrichtung, eine Hängebrücke.

In der (Figur 106) stellt ACB' eine Bogenrippe vor, deren Ende A und A' in den steinernen Lagern der ausgemauerten Landpfeiler B und B' sich stützen, D und D' sind die Thorpfeiler, deren Gewicht die Stabilität jener Landpfeiler vergrößern soll, FF' bezeichnet die Fahrbahn, welche mittelst der Tragstangen, wie EE', CG von der Bogenrippe herabhängt, HH' ist das Brückengeländer.

424. Erklärung. Man nennt, wie bei den Kettenbrücken den Bogen ACA', den Tragebogen, den obersten Punkt C, dessen Scheitel, die Punkte A und A' die Kämpfer, die horizontale Entfernung der beiden Kämpfer die Spannweite, den vertikalen Abstand CG des Scheitels von der horizontalen Geraden durch die Kämpfer den Pfeil der Hängebrücke. Wird der Druck des im Scheitel befindlichen Prisma durch das Gewicht der Längeneinheit des Tragebogens dividirt, so ist der Quotient eine lineare Größe, welche der Parameter heißt. Ueberträgt man den Parameter auf die durch den Scheitel gehende vertikale Gerade GCO von C gegen O aufwärts und führt durch den so bestimmten Punkt O eine horizontale Gerade XX', so heißt diese eine Direktrix des Tragebogens: dividirt man aber das Gewicht der Längeneinheit des Tragebogens durch die Summe der Gewichte der Längeneinheit des Tragebogens und der Fahrbahn, so heißt dieser Quotient der Modulus der Hängebrücke.

425. Aufgabe. Die Gleichung für die Krümmung des Tragebogens einer Hängebrücke zu finden.

Auflösung. Der Tragebogen bildet eine Kettenbrückenlinie, deren Gleichung $y=\frac{p}{q}\lambda\sec\frac{x\sqrt{q}}{p}+p$ ist, wo p den Parameter, q den Modulus der Hängebrücke vorstellt, und die Direktrix zur Abszissenaxe genommen wird.

Beweis. Sei T der Druck, welchen ein Punkt M des Tragebogens von dem Gewichte des Bogens CM, und des zugehörigen Theiles GI der Fahrbahn zu erleiden hat, und es sei für diesen Punkt $OP=x$, $PM=y$ der Stellungswinkel $TMQ=v$, sei ferner

Digitized by Google

der erforderliche Querschnitt des Tragebogens im Punkte M gleich u, wenn dessen Querschnitt im Scheitel C zur Einheit genommen wird, so hat man I. $T\cos v = p(g+h)$, also $T = p(g+h)\sec v$, und weil die Querschnitte des Tragebogens in seinen verschiedenen Punkten sich wie die Drückungen verhalten sollen, wird $u : 1 = T : p(g+h) = \sec v : 1$, es ist also $u = \sec v$, oder allgemein, wenn der erforderliche Querschnitt im Scheitel des Tragebogens c heißt, so wird derselbe an der Stelle, wo v der Stellungswinkel ist, $u = c\sec v$.

Hieraus findet man das Gewicht des Bogens $CM = g\int ds.\sec v$, wenn die Bogenlänge $CM = s$ bedeutet: und weil $ds = dx\sec v$ ist, so erhält man zum Gewichte des Bogens CM den Ausdruck

$$g\int dx\sec^2 v = g\int dx(1+\operatorname{tg}^2 v)$$

Ferner ist das Gewicht des zugehörigen Theils GI der Fahrbahn $= hx$, und somit

$$\text{II.}\quad T\sin v = hx + g\int dx(1+\operatorname{tg}^2 v)$$

Die Division der Gleichungen I. und II. liefert

$$\operatorname{tg} v = \frac{hx + g\int dx(1+\operatorname{tg}^2 v)}{p(g+h)}$$

und hieraus findet man genau wie in (354)

$$dx = \frac{p\,d\operatorname{tg} v}{1+q\operatorname{tg}^2 v},\quad dy = \frac{p\operatorname{tg} v.d\operatorname{tg} v}{1+q\operatorname{tg}^2 v}$$

durch deren Integration für $\operatorname{tg} w = \operatorname{tg} v.\sqrt{q}$ sofort

$$x = \frac{pw}{\sqrt{q}},\quad y = \frac{p}{q}\lambda\sec w + p$$

folgt, und durch Elimination der Größe w ergibt sich hieraus sogleich die obige Gleichung.

426. *Folgesatz.* Der Tragebogen erhält die Krümmung einer Parabel, sobald der Modulus $q = 0$ ist (357), dagegen die Krümmung einer gleichgespannten Kettenlinie, wenn $q = 1$ gesetzt wird.

427. *Folgesatz 2.* Das Gewicht des Tragebogens und das Gewicht der Fahrbahn ergibt sich bei derselben Bezeichnung wie (361)

$$G = p\left(\frac{g\operatorname{tg}\alpha}{q} - \frac{h\alpha}{\sqrt{q}}\right),\quad H = \frac{ph\alpha}{\sqrt{q}}$$

und die halbe Länge des Tragebogens nach (365)

Digitized by Google

$$l=\frac{p}{q}[\mathfrak{L}a+\sqrt{(1-q)}\lambda\frac{\cos\alpha}{\cos a}(1-\sin a\sqrt{(1-q)})].$$

428. Folgesatz 3. Die Länge der Tragstangen erhält man aber, wenn man den Abstand des Brückenweges von der Direktrix mit k bezeichnet, gleich $k-y$, wo y nach (371) durch die Reihe

$$y=\tfrac{1}{2}p\Big[\Big(\frac{s}{p}\Big)^2+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}q-1)\Big(\frac{s}{p}\Big)^4+\tfrac{1}{45}(2q^2-11q+11)\Big(\frac{s}{p}\Big)^6$$
$$+\frac{1}{105}\Big(\frac{17}{12}q^3-15q^2+\frac{73}{2}q-\frac{73}{3}\Big)\Big(\frac{s}{p}\Big)^8\Big]$$

bestimmt wird.

Erhält die Fahrbahn von der Einfahrt gegen die Mitte zu eine Steigung, so ist auch die Größe k in diesem Verhältnisse zu vermindern.

429. Folgesatz 4. Endlich ist der Querschnitt der Fuge, deren Stellungswinkel v ist, $u=c\sec v$, wo c den Querschnitt im Scheitel des Tragebogens bedeutet. Besteht aber der Tragebogen aus gleich breiten Prismen, die Breite in horizontaler Richtung senkrecht auf ihre Länge genommen, so bezeichnet $u=c\sec v$ die Fugenlängen, und v den Winkel der Fugen mit einer vertikalen Geraden. Der Druck, welchen die Prismen in ihren Fugen auf einander üben, ist $T=p(g+h)\sec v$, also im Scheitel ist derselbe $C=p(g+h)$, an den Kämpfern aber $A=p(g+h)\sec a$.

430. Anmerkung. Wir werden in der Folge die Breiten der Fugen eines Tragebogens durchgängig einander gleich setzen, und die Längen der Fugen nach der Formel $u=c\sec v$ (429) zunehmen lassen, wodurch bewirkt wird, daß der Druck des mit der Fahrbahn belasteten Tragebogens in jedem seiner Theile auf die Flächeneinheit einer Fuge gleich groß ausfallen muß, und somit ein so konstruirter Tragebogen ohne Bindungsmittel sich selbst und die Fahrbahn stützt, und dabei mit der kleinsten Masse von Bauholz die größtmögliche Festigkeit gewährt.

431. Anmerkung 2. Vor Allem aber ist es nöthig, die rückwirkende Festigkeit r eines eichenen Balkens zu ermitteln, dessen Querschnitt c ein Quadrat mit der Seite $\frac{1}{2}l$, und dessen Länge l, mithin Inhalt $\frac{1}{4}l^2$ wäre. Setzt man hier $l=24''$, so gibt die

Digitized by Google

Tafel (267) $r=186$ W. Pfunde, für den Querschnitt eines W. Quadratzolles, wobei zu bemerken ist, daß diese rückwirkende Festigkeit eines 24″ langen, und einen Quadratzoll im Querschnitte haltenden Prisma für die Dauer gemeint ist, und etwa den 20. Theil desjenigen Gewichtes beträgt, bei welchem dasselbe zerdrückt würde. Ein 24″ langes, 12″ breites und 1″ dickes Brett von Eichenholz hätte also $12r=22.32$ Ctr. zur rückwirkenden Festigkeit und dem in (262 und 266) angeführten Gesetze gemäß, wird dieselbe für ein 2′ langes Prisma, dessen Querschnitt einen Wiener Quadratfuß beträgt, auf die Größe $22.32\times12^2=38569$ Wiener Centner steigen.

Ein Blick auf die Tafel (267) zeigt uns zur Genüge, daß die rückwirkenden Festigkeiten zweier Prismen von gleichem Querschnitte in einem viel kleineren Verhältnisse abnehmen, als der Theorie gemäß die Quadrate ihrer Längen zunehmen: man sieht nämlich, daß bei 2″ Länge die Festigkeit doppelt so groß ist, als bei 24″ Länge. Berechnet man diesem gemäß die Festigkeit eines 6′ langen Prisma vom Querschnitte eines Quadratfußes*), so stellt sich dieselbe gleich 28389 W. Ctr. heraus, d. i. ein sechs Fuß langer und einen Quadratfuß im Querschnitte haltender, vierkantiger, eichener Balken kann in der Richtung der Fasern einem Drucke von 28389 W. Ctr. für die Dauer und mit voller Sicherheit unterworfen werden.

432. Anmerkung 3. Es herrscht unter den Technikern ziemlich allgemein die Meinung, daß hölzerne Brücken mit größeren Spannweiten als 20 W. Klafter um so weniger zulässig sind, als die Tragfähigkeit hölzerner Brücken mit der Zeit abnimmt, und ungedeckte Brücken nach etwa 20 Jahren, gedeckte Brücken hingegen nach 50 bis 60 Jahren gänzlich umgebaut werden müssen. So sehr auch eine solche Ansicht bei bisher ausgeführten Brücken durch die Erfahrung begründet sein mag, so kann man sie auf die in Rede stehenden Hängebrücken, welche ihrer Konstruktion und dem Prinzip nach, von den bis nun gebauten ganz abweichen, und welche unter keine der bekannten Gattungen: als Jochbrücken,

*) Setzt man nämlich $1:12^n=2:1$, und $1:3^n=x:39569$, so findet man $n=0.27894$, $3^n=1.3585$ und $x=28389$.

Bogenhängwerkbrücken, und Bogenbrücken eingereihet werden dürfen, nicht ausgedehnt werden. Denn erstlich kann man dem Holze durch Auslaugung mit Wasserdämpfen, durch Inprägnirung mit Theerdämpfen und Bekleidung von außen mit Bleiplatten oder Eisenblech die Dauer des Steines ertheilen: sodann hat man bisher zweitens fast allein nur die respektive Festigkeit des Holzes in Anwendung gebracht, welche bekanntlich weit geringer ist, als dessen absolute und rückwirkende Festigkeit; es hat aber die letztere innerhalb einer gewissen Grenze in der Richtung der Länge unter allen Gattungen der Festigkeit den größten Werth: endlich drittens stellt sich diese Konstruktionsweise als die mindest kostspielige heraus, weil bei der Anlage des Tragebogens, auch kürzere Stämme sich verwenden lassen, sobald sie die erforderlichen Querschnitte besitzen, und man sonach aus längeren Stämmen, welche an einer Stelle fehlerhaft wären, den schadhaften Theil gleich entfernen kann.

Um unsere Ideen zu fixiren, wollen wir zu der im Jahre 1841 in der Bohemia besprochenen hölzernen Brücke über die Moldau bei Prag vorerst die Abmessungen und Stärke einzelner Bestandtheile durch Rechnung bestimmen, da dann sich ihre Konstruktion leicht ergeben wird. Die Moldau besitzt an der Stelle, wo eine Brücke angetragen wird, eine lichte Breite von 624 W. Fuß, und da der Pfeil der Brücke in ihrer Mitte ganz willkührlich ist, indem bei Hängebrücken von der Größe des Pfeils bloß die Stärke der Landpfeiler, nicht aber ihre Höhe abhängt, so wollen wir denselben auf 40 W. Fuß setzen, welches um 9 Fuß mehr beträgt, als der Pfeil, welchen die Hälfte der K. Franzens-Kettenbrücke besitzt. Die lichte Breite und das Gewicht eines Kurrentfußes der Brückenbahn, nehmen wir, wie bei der eben genannten Brücke an, jene zu 28 W. Fuß, dieses mit $5\frac{1}{2}$ W. Ctr. Die 624′ lange und 28′ breite Brückenbahn hält 17472 W. Quadratfuße, mithin ist die zufällige Belastung zu $\frac{1}{2}$ Ctr. auf 1 Quadratfuß gerechnet, 8736 W. Ctr.: ferner weil ein Kurrentfuß der Brückenbahn auf $5\frac{1}{2}$ Ctr angenommen wird, so beträgt das permanente Gewicht der Brückenbahn 3328 Ctr., mithin zusammen 12064 W. Ctr., woraus auf einen Kurrentfuß der Brückenbahn sammt zufälliger Belastung der Werth $h=19\frac{1}{2}$ Ctr., entfällt, wo-

für wir, um bei der Konstruktion der Brückenbahn nicht beengt zu werden, in runder Zahl $h=20$ W. Ctr. setzen wollen. Obschon bei einer Mauthbrücke, wo Fußgänger und Fahrende ihren Zoll zu entrichten haben, der Fall sich nicht leicht ereignen wird, daß die Brücke ihre größte Belastung erhält: nichts desto weniger wollen wir die Berechnung so führen, als ob diese Belastung von 8736 Ctr., welche von dem Ueberschuße (431) des Tragvermögens eines nach der bloß permanenten Last der Fahrbahn berechneten Tragebogens zweifelsohne gestützt wird, beständig auf der Fahrbahn der Brücke vorhanden wäre, und um in einer ganz neuen Sache auch die skrupulösesten Zweifler zu beruhigen, soll überdieß statt der in (431) mit 28389 W. Ctr. ausgewiesenen Tragfähigkeit eines 6′ langen und einen Quadratfuß im Querschnitte haltenden eichenen Balkens dieselbe mit 2000 W. Ctr. der nun folgenden Berechnung zu Grunde gelegt werden. *)

434. Aufgabe. Auf der Spannweite $624'$, dem Pfeile einer Hängebrücke $40'$, und dem Gewichte eines Kurrentfußes der Fahrbahn $h=20$ Centner, den Druck und Querschnitt des Tragebogens an den Kämpfern zu berechnen.

Auflösung. Mit $\delta=40'$, $b=312'$ erhält man nach (359)

$$\left.\begin{array}{r} 12\delta=1.903090 \\ 1b=2.494155 \\ \hline 1\,\mathrm{tg}\alpha=9.408935 \end{array}\right\} \text{also } \alpha=14°22'53''=14°.3814, \text{ oder in Centesimalgraden } \alpha=15°.9793.$$

*) Prof. Jenko zu Wien, dem ich vorstehende Idee einer Hängebrücke im Wesentlichen verdanke, hat im Jahre 1826 über die rückwirkende Festigkeit des Eichenholzes eine Reihe von Versuchen angestellt und gefunden, daß bei einem Drucke von 2575 Ctr., welchen er mittelst einer sorgfältig konstruirten, dem k. k. Wiener polytechnischen Institute angehörenden Wasserpresse zu erzielen im Stande war, eichene Cylinder mit den Querschnitten $^1/_4$, $^5/_4$, $^6/_4$ Quadratzollen, und deren Längen das Doppelte ihres Durchmessers betrugen, sämmtlich zerquetscht wurden, daß dagegen ein derlei Cylinder von $^7/_4$ Q. Zoll Querschnitte einem wiederholten Drucke widerstanden hat, ohne eine bemerkbare Veränderung seiner Gestalt zu erfahren. Allem Anscheine nach ist die rückwirkende Festigkeit des Eichenholzes bedeutend größer, als die in (267) angegebene.

Digitized by Google

Ferner ist

$l\,b = 2.494155$	$tg\alpha\sec\alpha = 0.265315$
$l\,tg\alpha = 9.408935$	$La = 0.253680$
$l\,p = 3.085220$	Summe $= 0.518995 = n$
$l\,tg\alpha = 9.408935$	$l\,n = 0.715163 - 1$
$l\cos\alpha = 9.986173$	$l\,\frac{1}{2}p = 2.784189$
$l\,tg\alpha\sec\alpha = 0.422762 - 1$	$l\,t = 2.499352$

Es ist also die Länge l des halben Tragebogens, wenn er nach der Parabel gekrümmt wäre, $l = 315.756$ W. Fuß. Da nun für jeden Q. Fuß Querschnitt die rückwirkende Festigkeit 2000 W. Ctr. beträgt, so folgt, wenn der Tragebogen in irgend einer Stelle den Druck Q auszuhalten hätte, der erforderliche Querschnitt q an dieser Stelle, $q = Q : 2000$. An den Kämpfern ist $Q = A = p(g+h)\sec\alpha$, und weil bei der Parabel $g = 0$, $p = b : tg\alpha$ ist, so erhält man

$$\text{I. } q = \frac{bh\sec\alpha}{2000 tg\alpha} = \frac{bh}{2000\sin\alpha}$$

in W. Quadratfußen, und der Inhalt des halben Tragebogens wird $ql = bhl : 2000\sin\alpha$. Das Gewicht eines Kubikfußes Eichenholzes ist aber 43.5 W. Pfund, und weil es mit Theer eingelassen und mit Eisenblech bekleidet wird, so wollen wir es auf 47 W. Pf. setzen, demnach wird $bhl \times 0.47 : 10000\sin\alpha$ das Gewicht des halben Tragebogens und wenn man diesen Ausdruck mit b dividirt, so wird $hl \times 0.48 : 2000\sin\alpha$ das genäherte Gewicht g_1 eines Kurrentfußes des Tragebogens sammt der Fahrbahn. Bezeichnet man die konstante Größe $\frac{l \times 0.48}{2000\sin\alpha}$ mit E, so folgt II. $g_1 = Eh$ in W. Ctr. Die Größen E und g_1 ergeben sich im vorliegenden Falle durch nachstehende Rechnung:

$l\,l = 2.499352$	$l\,E = 0.484455 - 1$
$l\,0.48 = 0.681241 - 1$	$l\,h = 1.301030$
Summe $= 2.180593$	$l\,g_1 = 0.85485$
$l\,2000\sin\alpha = 2.696138$	$g_1 = 6.1021$
$l\,E = 0.484455 - 1$	$g_1 + h = 26.1021$

Ferner hat man wie im (381)

$l(g_1+h)=1.416673$	$l(g_2+h)=1.446598$
$lE=0.484455-1$	$lE=0.484455-1$
$lg_2=0.901130$	$lg_3=0.931063$
$g_2=7.9639$	$g_3=8.5322$
$g_2+h=27.9639$	

und eben so findet man $g_4=8.7054$, $g_5=8.7583$ und $g_6=8.7743$ welcher Werth von dem vorhergehenden g_5 nur noch um 1.6 Pfund abweicht. Man hat also $g=8.7744$, daher $A=p(g+h)\sec\alpha=36144$ Ctr., und sonach der Querschnitt an den Kämpfern $q=18.07$ W. Quad. Fuß.

434. Aufgabe. Den Modulus, den Druck im Scheitel und an den Kämpfern der in Rede stehenden Hängebrücke zu finden.

Auflösung. Man findet den Modulus wie in (381), wenn man $g=8.7744$, $h=20$ W. Ctr. setzt, nach folgender Rechnung: Heißt C der Druck im Scheitel, also $C:2000$ der erforderliche Querschnitt in W. Quad. Fußen, und $C\times 0.48:2000=CF$ das Gewicht der Längeneinheit des Tragebogens im Scheitel bezogen auf W. Ctr.; so folgt $F=0.00024$ und $\log F=0.380211-4$. Man hat also

$lg=0.943217$	$lb=2.494155$
$l(g+h)=1.459005$	$l\sqrt{q_1}=0.742106-1$
$lq_1=0.484212-1$	$lb\sqrt{q_1}=2.236261$
$l\sqrt{q_1}=0.742106-1$	$l\alpha'=0.148164-1$
$l\operatorname{tg}\alpha=9.408935$	$lp_1=3.088097$
$l\operatorname{tg}\alpha=9.408935$	$l(g+h)=1.459005$
$\alpha=8°3'32''8$, $\alpha'=0.140658$	$lC_1=4.547102$
	$lF=0.380211-4$
	$lg=0.927313$, $g_1=8.4588$

Es ist also das genäherte Gewicht der Längeneinheit des Tragebogens $g_1=8.4588$ W. Ct., hiemit erhält man bei Wiederholung der Rechnung die genaueren Werthe $g_2=8.3647$, $g_3=8.3366$, $g_4=8.3282$, da die beiden letzteren um weniger als 1 W. Pfund unterschieden sind, so hat man $g=8.3282$ W. Ctr.

Digitized by Google

$l\,g=0.920555$	$l\,b\sqrt{q_1}=2.228323$
$l\,(g+h)=1.452219$	$l\,\alpha'=0.140365-1$
$l\,q=0.468336-1$	$l\,p=3.087958$
$l\sqrt{q}=0.734168-1$	$l\,(g+h)=1.452219$
$l\,\mathrm{tg}\alpha=9.408935$	$l\,C=4.540177$
$l\,\mathrm{tg}\alpha=9.143103$	$l\cos\alpha=9.986173$
$\alpha=7^{\circ}54'56''5$, $\alpha'=0.138154$	$l\,A=4.554004$

hiedurch wird $q=0.293992$, und $C=34687$, $A=35810$. W. Ctr.

Dividirt man aber die eben gefundenen Werthe von C und A mit 2000, so ergeben sich die Querschnitte des Tragebogens im Scheitel und an den Kämpfern beziehungsweise 17.343 und 17.905 W. Quadratfuße.

435. Aufgabe. Den Modulus der unbelasteten Brücke, den Parameter und die Länge des Tragebogens zu bestimmen.

Auflösung. Aus den Werthen von $g=8.3282$, $h=6$ W. Ctr. ergibt sich $q=0.581245$, $\alpha=11^{\circ}3'39''.6$ und die zugehörige Bogenlänge $\alpha'=0.1930509$. Nun steht die Rechnung so:

$l\,b=2.494155$	$l\,\beta=0.923903-1$
$l\sqrt{q}=0.882180-1$	$l\cos\alpha=9.991856$
$l\,b\sqrt{q}=2.376335$	9.915759
$l\,\alpha'=0.285672$	$l\cos\alpha=9.986174$
$l\,p=3.090663$	$l\,\gamma=0.929585-1$
$1-q=0.418755$	$1-l\,\gamma=0.070414$
$l\,(1-q)=0.621960-1$	$l\,(1-l\,\gamma)=0.847660-2$
$l\sqrt{(1-q)}=0.810980-1$	$l\sqrt{(1-q)}=0.810980-1$
$l\sin\alpha=9.395109$	Konst. $=0.362216$
Summe $=0.206089-1$	Summe $=0.020856-1$
$\sin\alpha\sqrt{(1-q)}=0.160727$	$\sqrt{(1-q)}\lambda\gamma=0.104919$
$\beta=0.839273$	

Es ist aber $\angle\alpha=0.253677$, also

$$\angle\alpha-\sqrt{(1-q)}\lambda\gamma=0.148758=D$$

$$l\,D=0.172480-1$$

$$l\,(p:q)=3.326303$$

$l\,l=2.498783$, mithin $l=315.343$ W. Fuß.

436. Erklärung. Der Tragebogen besteht aus zwei oder meh-

Digitized by Google

reren Bogenrippen, die entweder bloß an den beiden Seiten der Fahrbahn, oder nebstdem auch in ihrer Mitte angebracht werden. Es ist zwar im Allgemeinen gleichgiltig, in wie viele partielle Tragebogen man die Last der Fahrbahn zerfällt, doch ist es vortheilhafter, die Bogenrippen nicht zu vervielfältigen, weil hiedurch ihre Tragkraft in einem höheren Verhältnisse vermindert wird. Jede Bogenrippe wird nun aus mehreren Gliedern zusammengesetzt, deren Anzahl gleich der Länge des Tragebogens getheilt durch die Länge eines Gliedes gleich ist, und dessen Querschnitt man erhält, wenn man den durch Rechnung gefundenen Querschnitt des Tragebogens durch die Anzahl der Bogenrippen theilet. Nach Maßgabe des erforderlichen Querschnittes kann man ein Glied aus 2, 4 oder 6 vierkantigen Balken zusammensetzen, und paarweise über einander laufen lassen, doch müssen ihre Enden genau in die Ebene der Fugen fallen. Ihre Vereinigung zu einem Gliede geschieht beim Zusammenstoßen der Fugen durch zwei Zoll breite und einem Zoll dicke schmiedeeiserne Schließen, wie Fig. 92 zu ersehen ist, und nebstdem durch eiserne Bolzen, welche in der Mitte eines Gliedes in horizontaler Richtung hindurchgehen, und an ihrem einem mit Gewinden versehenen Ende verschraubt werden. Die Schließe hat die Gestalt zweier abgesonderten Rahmen, deren jede die Hälfte der Balken, welche ein Glied enthält, einfaßt, und zwischen durch lauft die Tragstange vertikal herab.

437. Erklärung. Die Gestalt der Tragstangen und der Bau der Fahrbahn ist wie bei den Kettenbrücken, allein die Ende der einzelnen Bogenrippen sind mit einer schmiedeeisernen Hülle umgeben, und greifen in einen gußeisernen Kasten, dessen Basis horizontal ist, und dessen obere Fläche dieselbe Neigung besitzt, welche die Fugen der Kämpfer mit dem Horizonte bilden. Die Basis wird durch gußeiserne Röhren mit dem Fundamente der Widerlager fest verbunden.

438. Erklärung. Da die Kämpfer unter dem Horizonte der Fahrbahn sich befinden, so ist für die Stabilität der Widerlager hinreichend gesorgt, sobald ihr absolutes Gewicht der horizontalen Seitenkraft des Druckes an den Kämpfern gleich kommt; selbst dann, wenn auf den Gegendruck des die Widerlager umgebenden Erdreichs keine Rücksicht genommen wird. Die Höhe der Pfeiler auf

Digitized by Google

den Widerlagern ist somit willkührlich, und richtet sich nach den Regeln der Symmetrie in der Baukunst.

Die Figur 107 stellt eine so eben beschriebene Hängebrücke im Längenprofil vor.

439. Anmerkung. Nach (425) läßt sich aus dem bekannten Parameter und Modulus der Hängebrücke zu jeder Abszisse die zugehörige Ordinate, und nach (410) der Krümmungshalbmesser und die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes berechnen; es kann sonach der Tragebogen so genau verzeichnet werden, als man immer will, und hiernach auch der Lehrbogen für die Anlage des Tragebogens gebaut werden. Da jedoch das Unterbringen des im Scheitel zu stehen kommenden Gliedes, nämlich des Schlußgliedes, einen Druck in Anspruch nimmt, welcher durch keine bisher bekannte Vorrichtung sich erzielen läßt, so ist man hier, wie beim Baue der Gewölbe, genöthiget, zwei oder mehrere Lehrbögen über einander zu errichten, deren Spannweite einander gleich, deren Pfeile aber um so viel zunehmen, daß beim obersten Lehrbogen das Schlußglied ohne bedeutende Mühe sich einschieben läßt.

Der Zwischenraum eines Lehrbogens von dem darüber gestellten wird aber mit Keilen ausgefüllt, die sich leicht herausschlagen lassen. Das erforderliche Gerüst zur Stützung des Lehrbogens wird natürlich auf einer vorläufig erbauten Jochbrücke errichtet.

440. Anmerkung 2. Da man den Winkel, den eine Fuge mit einer vertikalen Geraden bildet, und welcher nach (401) dem Stellungswinkel des Gliedes gleich ist, berechnen kann, so läßt sich immer die Lage der Fuge für jedes Glied des Tragebogens bestimmen, wodurch bewirkt wird, daß zwei benachbarte Glieder sich in allen Punkten der Fuge berühren müssen. Ist aber die Spannweite der Hängebrücke nicht gar groß, so kann ein geschickter Arbeiter die Stoßfugen der Glieder sogleich auf dem Gerüste ausfindig machen. So wie zwei Bogenrippen aufgestellt sind, müssen sie durch Querbäume und durch eiserne Klammern verbunden werden, damit kein Bogen ohne den andern aus der vertikalen Lage gebracht werden kann. Nun werden die Keile des obersten Lehrbogens von unten gegen den Scheitel hin mit Vorsicht her-

Digitized by Google

ausgeschlagen, daß sich der Tragebogen etwas senken könne, nach einem Zeitraume von mehreren Stunden, entfernt man sodann auch den tiefer stehenden Lehrbogen, und hängt die Fahrbahn ein, und allmählig wird auch der tiefste Lehrbogen beseitiget.

441. Anmerkung 3. Obschon die Lage der Stoßfugen einzelner Glieder sich genau bestimmen läßt, und zweifelsohne ihre Verzeichnung durch eine Art *Chablone* bewirkt werden kann, so ist es doch wünschenswerth, dieser Arbeit, auf deren Genauigkeit Alles ankommt, überhoben zu werden. Ein scharfsinniges Mittel hat hiezu Prof. Jenko vorgeschlagen, welches darin besteht, daß man die Fugen eines Gliedes cylindrisch begrenzt, so daß ein Ende desselben hohl, das andere hingegen konver wird. Ein so gebildetes Glied stellt Fig. 108 nach dessen vertikalen Längendurchschnitte vor. Daß solche kreisförmigen Begrenzungen an jedem Gliede eines Tragebogens schnell und genau sich richten lassen, unterliegt wohl kaum einem Zweifel: andererseits gewinnt man mit so geformten Gliedern bei ihrer Zusammenstellung zu einem Tragebogen an der Zeit, und man lauft bei Entfernung der Lehrbogen keine Gefahr, daß irgend ein Glied, dessen Fuge nicht die genaue Lage erhielt, durch den Druck der benachbarten Glieder hinausgeschnellt wird: denn stets müssen sich so geformte Glieder, wie bei einer Tragkette von selbst in jene Lage versetzen, welche ihrem Gleichgewichte entspricht. Um die Berührung zweier derlei cylindrischen Fugen noch inniger zu machen, kann man noch eine der beiden Flächen mit Zinnfolien belegen.

Sind einmal sämmtliche Bogenrippen einer Hängebrücke aufgestellt, die Fahrbahn eingehängt, die Lehrbogen und Gerüste entfernt, so lasse man mit Theer oder einen guten Oelfirniß sämmtliches Holzwerk anstreichen, und bekleide überdieß die Bogenrippen mit einem nicht verzinnten Eisenblech, welches gleichfalls mit einer weißen Oelfarbe anzustreichen ist — und so ist gewiß für eine lange Dauer der Brücke gesorgt.

442. Erklärung. Man kann ein jedes Glied eines Tragebogens aus zwei oder mehreren vierkantigen Balken so zusammensetzen, daß die Stoßfugen eines oberen Balkens der Mitte des unteren Balkens entsprechen, mithin die Glieder des Tragebogens

Digitized by Google

wie die Bausteine einer Mauer in einander greifen, nur muß zu dem Ende den höher gelegenen Balken eine kleine Biegung in der Art ertheilt werden, wie sie Wiebeking bei seinen Bogenbrücken zu Stande brachte. Eine aus so geformten Gliedern zusammengesetzte Hängebrücke ist vom Bauinspektor *Pancer* über den Wieprz bei Kosmin im Jahre 1840 wirklich ausgeführt worden, und in dem in polnischer Sprache erscheinenden Journale „Biblioteka Warszawska", Jahrgang 1842 beschrieben. Die Spannweite dieser von Lastwägen befahrbaren Brücke beträgt 270 Fuß.

443. Erklärung. Um den Seitenschub der Hängebrücke zu beseitigen, kann mit dem Tragebogen einer Hängebrücke, welcher nach unten konkav ist, ein zweiter Bogen, welcher seine konvexe Seite der Fahrbahn zuwendet, verbunden werden. Das Längenprofil einer solchen Brücke stellt Fig. 90, den Grundriß aber Fig. 91 vor. A, A' sind die Tragpfeiler, welche auf den Widerlagen B, B' ruhen, AEA' ist der konkave, $AE'A'$ der konvexe Tragebogen von Holz, beide sind in A und A' mittelst Schließen vereiniget: die Art der Verbindung ersieht man aus Fig. 96. Die Tragstangen wie $DD'F'$ gehen abwechselnd vom oberen und unteren Tragebogen zur Fahrbahn, ihre Form ist in Fig. 95 abgebildet. Fig. 97 zeigt das Querprofil der auf drei Tragebogen herabhängenden Brücke, wovon einer in der Mitte, und zwei zu beiden Seiten der Fahrbahn angebracht sind.

444. Folgesatz. Da der Aufhängewinkel für beide Tragebogen derselbe ist, so ist der horizontale Druck des oberen Tragebogens nach Außen, gleich dem horizontalen Zuge des unteren Tragebogens nach Innen, mithin der Seitenschub der Hängebrücke null. Eine nähere Beschreibung dieser Hängebrücke findet man in der Schrift: O moscie wiszącym pomysłu Teofila Zebrawskiego. w Krakowie 1841.

Anmerkung. Für die Anwendung ist die Bemerkung von Wichtigkeit, daß die Länge des Tragebogens mit jener Genauigkeit berechnet werde, welche die vorhandenen logarithmischen Tafeln noch zulassen. Wie man leicht sieht, ist diese Größe stets größer als die Länge einer gleigespannten Kettenlinie, und kleiner als die Länge einer Parabel, wenn Spannweite und Aufhängewinkel dieselben bleiben. Denn berechnet man nach den Formeln

Digitized by Google

für die Bogenlänge beider Kurven nämlich:

$$l = b\angle a : a, \text{ und } l' = b(\angle a + \operatorname{tg}a\operatorname{seca}) : 2\operatorname{tg}a$$

die Werthe für $b = 100000$ und für die Aufhängewinkel a zwischen 13° und 20°, so findet man folgende Ergebnisse:

a	l	l'	Unterschied
13°	100869	100881	12
14	101010	101027	17
15	101162	101184	22
16	101325	101354	29
17	101500	101537	37
18	101686	101733	47
19	101885	101942	57
20	102092	102165	73

Der Einfluß des Modulus auf die Länge des Tragebogens steigt also mit dem Aufhängewinkel.

Multiplizirt man diese Zahlen mit irgend einer anderen gegebenen halben Spannweite und dividirt das Produkt mit 100000, so folgt sofort die Länge des derselben zugehörenden halben Tragebogens z. B. für $a = 13°$ und $b = 312$ findet man

$$l = 100869 \times 312 : 100000 = 314.711$$
$$l' = 100881 \times 312 : 100000 = 314.749.$$

IV. Der Hebel und die Wage.

446. Erklärung. Vorrichtungen, welche dazu dienen, Kräfte in ihrer Wirkung der Größe und Richtung nach abzuändern, bewegende Kräfte entweder zu vermehren, zu vermindern, oder zu reguliren, Bewegungen mit Ersparniß an Zeit oder an Kraft zu bewirken, und überhaupt gewisse mechanische Zwecke zu erreichen, die ohne derselben entweder gar nicht oder nur unvollkommen zu erzielen sind, nennen wir Maschinen.

447. Erklärung. Man unterscheidet einfache und zusammengesetzte Maschinen. Zu den ersteren zählt man gewöhnlich den Hebel, die Rolle, das Wellrad, die schiefe Ebene, den Keil und die Schraube: die letzteren lassen sich aber in mehrere Bestandtheile zerlegen, welche selbst wieder einfache Maschinen sind.

Digitized by Google

448. Erklärung. Ein physischer Hebel oder schlechtweg ein Hebel ist jede unbiegsame Stange, welche sich um einen unbeweglichen Stift oder Bolzen drehen läßt. Nach der verschiedenen Form der Stange und ihrer Bestimmung erhält der Hebel besondere Namen: Druckhebel, Wurfhebel, Winkelhebel, Kurbel, Balancier u. s. f.

449. Aufgabe. An einem Hebel, dessen Abmessungen gegeben sind, die Kraft zu bestimmen, welche der gleichfalls gegebenen Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Sei ACB (Fig. 109) der vertikale Durchschnitt eines Hebels, DF eine kreisförmige Oeffnung zur Aufnahme des cylindrischen Bolzens vom Halbmesser $CD=\varrho$, A sei der Angriffspunkt einer nach der Richtung AP wirkenden Kraft, und B der Angriffspunkt der nach der Richtung BQ angebrachten Last: man bezeichne mit α, β die Winkel zwischen den Richtungen AP, BQ mit einer durch den Punkt C geführten horizontalen Geraden CX, welche Winkel nach der Richtung XYX' von 0^0 bis 2π gezählt werden, sei ferner G das Gewicht des ganzen Hebels in seinem Schwerpunkte G vereinigt, GH eine vertikale Gerade durch denselben, und p, q, g die Perpendikel, welche aus dem Punkte C auf die Richtungen AP, BQ, GH gefällt werden, so hat man zur Bestimmung der Kraft P die quadratische Gleichung:

$$(p^2-k^2\varrho^2)P^2-2[(pq+k^2\varrho^2\cos(\beta-\alpha))Q-(pg-k^2\varrho^2\sin\alpha)G]P$$
$$+(q^2-k^2\varrho^2)Q^2+(g^2-k^2\varrho^2)G^2-2(qg+k^2\varrho^2\sin\beta)QG=0$$

wo Kürze halber $k^2=\mu^2:(1+\mu^2)$ gesetzt wird, und es ist von den beiden Wurzeln für P die größere zu nehmen, wenn die Kraft gerade die Last Q sammt der Reibung überwältigen, dagegen die kleinere Wurzel, wenn die Kraft bloß das Steigen des Angriffspunktes verhindern soll.

Beweis. Sei N der Druck, welchen der Punkt D nach der Richtung CN erleidet, welche durch den Winkel $NCX=\gamma$, der hier im dritten Quadranten angenommen wird, bestimmt wird, so ist μN die hiedurch entstehende Reibung, welche nach der Tangente DE wirkend, als eine besondere Kraft anzusehen ist, deren Moment $=\mu N\varrho$ ist. Zerlegt man die Kräfte P, Q, N in zwei Seitenkräfte, welche beziehungsweise mit den Axen CX, CY parallel laufen, so zerfällt die Kraft

Digitized by Google

$$\left.\begin{matrix} P \\ Q \\ N \\ \mu N \end{matrix}\right\} \text{ in die Seiten- kräfte } \left\{\begin{matrix} P\cos\alpha & \text{und} & P\sin\alpha \\ -Q\cos\beta & \text{„} & -Q\sin\beta \\ -N\cos\gamma & \text{„} & -N\sin\gamma \\ -\mu N\sin\gamma & \text{„} & +\mu N\cos\gamma \end{matrix}\right.$$

Man hat also im Zustande des Gleichgewichtes

I. $P\cos\alpha+Q\cos\beta+N\cos\gamma+\mu N\sin\gamma=0$

II. $P\sin\alpha+Q\sin\beta+N\sin\gamma-\mu N\cos\gamma+G=0$

III. $Pp+Gg-Qq-\mu N\varrho=0.$

Multiplizirt man die Gleichung I. mit μ und addirt zum Produkte die Gleichung II., so ergibt sich

IV. $-N\sin\gamma(1+\mu^2)=P(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)+Q(\sin\beta+\mu\cos\beta)+G$

multiplizirt man aber die Gleichung II. mit μ, und zieht das Produkt von der Gleichung I. ab, so folgt

V. $-N\cos\gamma(1+\mu^2)=P(\cos\alpha-\mu\sin\alpha)+Q(\cos\beta-\mu\sin\beta)-\mu G$

Quadrirt man aber die Gleichungen IV. und V., so gibt deren Summe nach Beseitigung ihres gemeinschaftlichen Faktors $1+\mu^2$,

VI. $(1+\mu^2)N^2=P^2+Q^2+2PQ\cos(\beta-\alpha)+2PQ\sin\alpha+2GQ\sin\beta+G^2$

dagegen folgt aus III.

$$N=\frac{Pp+Gg-Qq}{\mu\varrho}$$

und mit diesem Werthe erhält man aus VI. den obigen Ausdruck.

450. Folgesatz. Läßt man das Gewicht G des Hebels außer Acht, was jedoch nur dann geschehen kann, wenn G gegen Q selbst klein ist, so geht die quadratische Gleichung über in die einfachere

$P^2(p^2-k^2\varrho^2)-2PQ(pq+k^2\varrho^2\cos(\beta-\alpha))+Q^2(q^2-k^2\varrho^2)=0,$

woraus man

$$P=\frac{[pq+k^2\varrho^2\cos(\beta-\alpha)\pm\sqrt{W}]Q}{p^2-k^2\varrho^2} \text{ erhält,}$$

wo $W=[pq+k^2\varrho^2\cos(\beta-\alpha)]^2-(p^2-k^2\varrho^2)(q^2-k^2\varrho^2)$ bedeutet.

Ist dabei zu gleicher Zeit $\alpha=\beta$, oder es sind die Richtungen der Kräfte parallel, so ergibt sich

$$P=\frac{pq+k^2\varrho^2\pm(p+q)k\varrho}{p^2-k^2\varrho^2}\,.Q=\frac{q\pm k\varrho}{p\mp k\varrho}Q$$

Wird aber von der Reibung abgesehen, so ist $k=0$ und $P=qQ:p$ wie bekannt.

451. Erklärung. Eine Wage nennt man jene Vorrichtung,

Digitized by Google

welche zur Bestimmung der absoluten Gewichte der Körper angewendet wird.

Man hat Federwagen, wo die Kraft einer Feder dem Gewichte eines Körpers das Gleichgewicht hält, und Hebelwagen, welche nichts weiter als gewöhnliche Hebel sind, und so vorgerichtet, daß der abzuwägende Gegenstand, die Waare und die Einsatzgewichte, bequem untergebracht werden können. Je nachdem bei einer Hebelwage das Einsatzgewicht genau dem Gewichte der Waare gleich, oder aber in einem bekannten Verhältnisse kleiner ist als das der Waare, nennt man dieselbe eine Krämerwage oder eine Schnellwage; eine Abart der letzteren führt den Namen der Decimalwage. Zu den Hebelwagen gehört auch noch die Brückenwage, auf welcher ganze Lastwägen auffahren und gewogen werden können.

452. Erklärung. Bei der Krämerwage unterscheidet man den Wagebalken, an dessen Enden die Wageschalen hängen, die Zunge welche senkrecht auf dem Wagebalken befestiget ist, und die in ihrer Verlängerung unterhalb befindlichen Zapfen, welche in den Pfannen der Schere ruhen. Wird die Schere fest gehalten, so spielt im Zustande des Gleichgewichtes der Einsatzgewichte mit der Waare die Zunge innerhalb der Schere ein, welches die horizontale Lage des Wagebalkens anzeigt. Findet eine Ueberwucht Statt, so tritt die Zunge außerhalb der Schere hervor, und man nennt den Winkel zwischen der Zunge und der Schere den Ausschlagwinkel. Eine Krämerwage heißt empfindlich, wenn sie bei der kleinsten Ueberwucht einen bemerkbaren Ausschlagwinkel weiset. In der Figur 114 stellt AB den Wagebalken, CD die Zunge, C den prismatischen Zapfen, CE die Schere, H, I die Wageschalen vor.

453. Aufgabe. Die Einrichtung einer richtigen Krämerwage anzugeben.

Auflösung. Soll eine Krämerwage richtig sein, so muß sie zweien Bedingungen Genüge leisten, erstlich daß sie gleicharmig sei, und sodann, daß sie unbelastet den Wagebalken in horizontaler Lage erhält.

Beweis. Bezeichnet man mit a, b die Hebelsarme AC,

BC mit l, l' das Gewicht der Wageschalen bei H und I, mit G das Gewicht des Wagebalkens, und mit g den Abstand seines Schwerpunktes G von der vertikalen Geraden CE durch den Unterstützungspunkt C, so hat man bei einem Einsatzgewicht P, welchem das Gewicht der Waare gleich sein muß, für das Gleichgewicht $(P+l)a=(P+l')b+Gg$, hieraus $P(a-b)+la-l'b-Gg=0$, welcher Gleichung Genüge geschieht, wenn

I. $P(a-b)=0$, oder $a=b$ ist, und

II. $la-l'b-Gg=0$, oder wenn die unbelastete Wage für sich im Gleichgewichte ist.

454. Folgesatz. Sind die Gewichte der Wageschalen einander gleich, so hat man $l=l'$, und aus der Gleichung II. wegen $a=b$ auch $Gg=0$ oder $g=0$, d. i. bei gleich schweren Wageschalen muß der Schwerpunkt des Wagebalkens in der verlängerten Richtung der Zunge sich befinden.

455. Aufgabe. Bei einer gegebenen Ueberwucht und den Abmessungen des Wagebalkens den Ausschlagwinkel zu finden.

Auflösung. Man ziehe die Verbindungslinie AB der beiden Angriffspunkte A, B (Fig. 111) und setze $AE=EB=a$, $CE=b$, $GC=c$, $AC=m$, das Gewicht des im Schwerpunkte G vereinigten Wagebalkens $=G$, und die Ueberwucht $=q$; so ist der Ausschlagwinkel $DCD'=\varphi$ durch die Formel gegeben

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{aq}{(2P+q)b+Gc}$$

Beweis. Gesetzt, der Wagebalken ACB sei in den Schalen, welche bei A und B hängen, mit gleichen Gewichten, jedes gleich P, belastet, und der Schwerpunkt des Wagebalkens befinde sich in G, in der verlängerten Richtung der Zunge CD, so findet zwischen der Belastung ein Gleichgewicht Statt, und die Gerade AB nimmt eine horizontale Lage an. Wird aber in die Schale bei A ein kleines Gewicht q noch hinzugefügt, so muß der Punkt A sinken, der Punkt B steigen, und der Wagebalken dreht sich um den unterstützten Punkt C, um einen Winkel $ACA'=BCB'$, welcher dem Ausschlagwinkel DCD' gleich ist; es komme hiebei der Schwerpunkt aus dem Punkte G in den Punkt G'. In dieser veränderten Lage des Wagebalkens findet nun zwischen dem Ge-

Digitized by Google

wichte $P+q$ in A', dem Gewichte P in B', und dem Gewichte G in G' ein Gleichgewicht Statt, und man hat, wegen der Gleichheit der statischen Momente

I. $(P+q)A'F=P.B'H+G.G'I$

heißt nun α der Winkel $ACE=ECB$, so hat man sogleich

$A'F=A'C\sin A'CE=m\sin(\alpha-\varphi)=m\sin\alpha\cos\varphi-m\cos\alpha\sin\varphi$

$B'H=B'C\sin B'CH=m\sin(\alpha+\varphi)=m\sin\alpha\cos\varphi+m\cos\alpha\sin\varphi$

da nun $m\sin\alpha=AE=a$, $m\cos\alpha=CE=b$ ist, so folgt

$A'F=a\cos\varphi-b\sin\varphi$, $B'H=a\cos\varphi+b\sin\varphi$, $G'I=c\sin\varphi$

und durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung I. erhält man

II. $(P+q)(a\cos\varphi-b\sin\varphi)=P(a\cos\varphi+b\sin\varphi)+Gc\sin\varphi$

wird die Multiplikation gerichtet, beiderseits $aP\cos\varphi$ weggelassen, und darauf mit $\cos\varphi$ dividirt, so folgt

$-Pb\,tg\varphi+q(a-b\,tg\varphi)=Pb\,tg\varphi+Gc\,tg\varphi$, woraus sich sogleich $tg\varphi$ wie oben ergibt.

456. Folgesatz. Der oben erhaltene Ausdruck zeigt, daß die Empfindlichkeit einer Krämerwage um so größer ist, I. je kleiner die Belastung $2P+q$ ist; daher man zu gar ungleichen Abwägungen mehrere Wagen vorräthig haben muß, um die Stärke des Wagebalkens der Belastung proportional zu erhalten, II. je kleiner die Größe b, oder je kleiner der Abstand der centrischen Linie AB vom Drehpunkte C ist, endlich III. je kleiner die Größen G und c sind, d. i. je kleiner das Gewicht des Wagebalkens und der Abstand seines Schwerpunktes vom Drehpunkte ist. Zu bestimmten Abwägungen wäre es daher vortheilhaft, die Wage so vorzurichten, daß c negativ würde, d. i. daß der Schwerpunkt des Wagebalkens oberhalb des Drehpunktes zu liegen käme, welches durch oben über C aufgeschraubte Gewichte sich erzielen läßt; nur dürfte c den Werth $(2P+q)b:G$ nicht übersteigen, weil dann die Wage sammt der Belastung umschlagen müßte.

457. Anmerkung. Sobald eine Krämerwage empfindlich ist, läßt sich immer eine genaue Abwägung eines Körpers so vornehmen. Man lege in die Schale bei A (Fig. 114) den abzuwägenden Körper, und in die Schale bei B Gewichte beliebiger Gattung, etwa Schrott oder Sand so lange zu, bis Gleichgewicht erfolgt, so-

Digitized by Google

dann hebe man aus der Schale in A den Gegenstand heraus, und bringe bekannte Einsatzgewichte so lange unter, bis die Last in B mit jenen ins Gleichgewicht kommt, so ist stets das so erhaltene Einsatzgewicht dem Gewichte des Körpers genau gleich. Man nennt dieses Verfahren das doppelte Abwägen. Diese Methode ist immer in Anwendung zu bringen, so oft genaue Abwägungen, etwa bei physikalischen oder chemischen Versuchen, vorzunehmen sind, weil jede Wage mehr oder weniger falsch ist, und ihre Fehler können sogar so klein werden, daß sie nicht immer in die Augen fallen.

458. Erklärung. Die Schnellwage besteht aus einem ungleicharmigen Hebel ABX (Fig. 112) an dessen kürzerem Arme die Schale zur Aufnahme des abzuwägenden Körpers hängt, der längere Arm trägt ein mittelst eines Ringes verschiebbares Gewicht, das sogenannte Laufgewicht, welches nach Maßgabe der Waare in verschiedene Entfernungen von dem Unterstützungspunkte gebracht wird. Um das zufällige Verschieben des Laufgewichts zu verhindern, wird der Ring mit einer Feder an den prismatischen Balken angedrückt. Uebrigens enthält der Wagebalken die Schere mit der Zunge, welche im Zustande des Gleichgewichts innerhalb der Schere einspielt.

459. Lehrsatz. Die Abstände des Laufgewichtes von einem gewissen Punkte an, sind den Gewichten der Waare in der Schale proportional.

Beweis. Sei P das Laufgewicht und D der Punkt an dem Wagebalken, wo es angebracht dem Gewichte Q der Waare das Gleichgewicht hielte: sei ferner der Punkt G der Schwerpunkt und zugleich das Gewicht des Wagebalkens, l das Gewicht der Schale, so hat man $(l+Q)\times AB=P\times BD+G\times BG$, man nehme BH so an, daß $G\times BG=P\times BH+l\times AB$ wird, und man erhält durch Subtraktion beider Gleichungen

$$Q\times AB=P\times BD+P\times BH=P\times DH$$

Wenn für ein anderes Gewicht der Waare Q' das Laufgewicht im Punkte E unterzubringen wäre, so hätte man ebenso

$$Q'\times AB=P\times EH, \text{ somit } Q:Q'=DH:EH.$$

460. Folgesatz. Verzeichnet man also längs des Armes HX

Digitized by Google

eine Skale, indem man den Abstand H, in welchem das Laufgewicht für die Einheit der Gewichte, z. B. für ein W. Pfund, angebracht werden muß, von H gegen X aufträgt, und mit numerirten Strichen bezeichnet, so läßt sich jedesmal aus der beobachteten Entfernung des Laufgewichts an der Skale das zugehörige Gewicht der Waare erkennen.

461. Folgesatz 2. Die Abwägungen können zwar nur bis zur Grenze vorgenommen werden, so weit die Skale reicht, ist aber die Schnellwage so eingerichtet, daß sich der Drehpunkt B nach C näher an den Punkt A versetzen läßt, so kann man an einer zweiten Fläche des vierkantigen Wagebalkens eine Skale verzeichnen, welche für ein größeres Laufgewicht dessen Abstände angibt, wenn dieselbe Schnellwage auch zu größeren Abwägungen dienen soll.

Man bedient sich der Schnellwage in Fällen, wo mit wenigen Einsatzgewichten verschiedene Abwägungen vorzunehmen sind. Ihr Gebrauch gewährt jedoch keine große Genauigkeit.

462. Erklärung. Zu sehr genauen Abwägungen bedient man sich der Probirwage. Diese ist ein gleicharmiger Hebel ACB (Fig. 113), welcher mit seinem herzförmigen, stählernen Zapfen C im steinernen Lager einer Säule EF aufliegt. Die Zunge CD endiget sich spitzig, und weiset auf einen mit dem Halbmesser CD verzeichneten Gradbogen. Der Wagebalken endet sich beiderseits in Ringe, an denen die gleich schweren Schalen P, Q hängen. Beim Gebrauche wird das Gestell HI mittelst Stellschrauben in eine horizontale Lage gebracht, wodurch die Säule EF in eine vertikale Lage kommt, und die Zunge CD auf den Nullpunkt weiset. Legt man aber in die Schale bei Q den abzuwägenden Körper, und bei P die erforderlichen Einsatzgewichte, so wird im Zustande des Gleichgewichts die Zunge um gleiche Bögen beiderseits vom Nullpunkte schwingen.

463. Erklärung. Die Dezimalwage, so benannt, weil die Einsatzgewichte gerade den zehnten Theil der abzuwägenden Waare betragen, besitzt folgende Einrichtung: Der Wagebalken $ACDI$ (Fig. 116) hat seinen Drehpunkt im Punkte C, der selbst auf einer vertikalen Säule CN aufliegt, in A hängt eine Schale, in welche die Einsatzgewichte zu liegen kommen. An den bestimmten

Digitized by Google

Punkten D, I hängen, wenn der Wagebalken in der horizontalen Lage gedacht wird, an vertikalen Stangen DE, IK, welche sich in den Punkten D, E, I, K ohne merkliche Reibung drehen, horizontale, feste Unterlagen EH und KM, so daß die letztere sich um den fixen Punkt M, die erstere aber um einen Punkt H, drehen kann. Auf der oberen Unterlage EH ist nun die Brücke FH befestiget, auf welche die zu wiegende Waare aufgelegt wird. Es stützt sich also die Brücke auf den beweglichen Punkten E und H, während die Unterlage KM auf den Punkten K und M aufliegt, von denen nur der letzte fest ist, und es heißen die Längen KM, LM die Abschnitte der Unterlage, und die Längen CI, CD die Abschnitte des Wagebalkens, endlich AC, CD dessen Hebelsarme. Zur Beurtheilung der horizontalen Lage des Wagebalkens dient die Zunge po, welche im Zustande des Gleichgewichts mit der gegenüberstehenden an dem Träger CN befestigten Spitze qr übereinstimmt.

464. Lehrsatz. In einer Decimalwage ist der Hebelsarm des Einsatzgewichtes zehnmal so groß als der Hebelsarm der Last, und die Abschnitte des Wagebalkens und der Unterlage sind einander proportional.

Beweis. Sei $AC=a$, $CD=b$, $CI=c$, $ML=d$, $KM=e$, sei ferner G der Schwerpunkt der Brücke, und G' ein Punkt, welcher vertikal unter dem Schwerpunkte der Last sich befindet, und man setze $EG=p$, $EH=q$, $EG'=p'$ das Gewicht der Schale $=l$, das der Brücke $=B$. Da die Brücke auf zwei Punkten E, L ruhet, so drücket von der Waare Q auf den Punkt L die Last $Qp':q$ und auf den Punkt E die Last $Q(q-p'):q$. Eben so drücket von dem Gewichte B der Brücke auf den Punkt L der Theil $Bp:q$, und auf den Punkt E der Theil $B(q-p):q$. Demnach hat man auf dem Punkte E die Last

$$\frac{Q(q-p')+B(q-p)}{q}$$

mit welcher die Zugstange DE herabgezogen wird, und am Punkte L die Last

$$\frac{Qp'+Bp}{q}$$

welche mittelst des Hebelsarmes $ML=d$ wirkt; es ist daher die Kraft, mit welcher die Zugstange IK abwärts gezogen wird, gleich

$$\frac{Qp'+Bp}{q}\cdot\frac{d}{e}$$

ihr Moment in Beziehung auf den Drehpunkt C ist aber $cd(Qp'+Bp):eq$. Man hat somit im Zustande des Gleichgewichts

$$\text{I. } (P+l)a=\frac{cd}{eq}(Qp'+Bp)+\frac{bQ(q-p')}{q}+\frac{bB(q-p)}{q}$$

soll diese Gleichung eine einfachere Gestalt erhalten, so ist erforderlich II. $b=cd:e$, oder $b:c=d:e$ anzunehmen, hiedurch verwandelt sich dieselbe in III. $(P+l)a=b(B+Q)$.

Nimmt man nun hier $P=o$ an, so muß auch $Q=o$ werden; hiedurch wird die Gleichung III. $la=bB$, durch deren Abziehung sofort $Pa=bQ$ oder $P:Q=b:a$ folgt. Da aber $Q=10P$ sein soll, so ist auch $a=10b$. Endlich ist aus der Gleichung II. zu ersehen, daß die Abschnitte b, c des Wagebalkens den Abschnitten d, e der Unterlage proportional sind.

465. Anmerkung. In dieser Rechnung ist jedoch auf das Gewicht der einzelnen Theile der Wage, und auch auf die Reibung an den Zapfen beider Zugstangen keine Rücksicht genommen, welche Größen, wenn die Theorie gründlicher werden soll, bedeutend genug sind, um in Rechnung gebracht zu werden. Für den Gebrauch ist die Decimalwage deßhalb bequem, daß man nur den zehnten Theil der Einsatzgewichte benöthiget, und daß die Brücke, worauf die Last zu liegen kommt; ganz frei und zugänglich ist, und so nahe dem Erdboden gebracht werden kann, als man will, wodurch sie sich auch zum Abwägen befrachteter Lastwägen als Brückenwage eignet.

Eine Abbildung der Decimalwage, sowie die Beschreibung von Brückenwagen, Federwagen, Garnwagen findet man in Gerstner's Mechanik, Band I.

466. Erklärung. Eine Hebbade ist eine Vorrichtung, bei welcher nach jedem Hube die Last auf der bewirkten Höhe erhalten, sodann der Unterstützungspunkt erhöht, ein neuer Hub gemacht wird, und auf solche Art die Erhebung der Last durch mehrere Hübe zu einer Höhe gebracht werden kann, um sie auf Schlei-

Digitized by Google

fen oder Wägen zu laden. Die einfachste Vorrichtung dieser Art ist der Geißfuß, welcher eine eiserne konische Stange ist, die an ihrem breiteren Ende keilförmig zugespitzt ist: wird die Schärfe derselben unter einen schweren Stein gestemmt, und an dem äußersten Ende der Druck angebracht, so kann immer eine kleine Erhebung der Last bewirkt werden, durch Anbringung der Keile unter der Last kann schon bei einem zweiten Hub die Erhebung merklicher werden u. s. f.

467. Erklärung. Eine Hutsche oder die deutsche Hebelade besteht aus zwei Pfostenstücken *AB*, *CD* (Fig. 115), welche oben und unten durch eiserne Beschläge so mit einander verbunden sind, daß sie einen Schlitz bilden, in welchem sich ein Hebel *EF* auf und ab bewegen läßt. Die Pfosten sind mit zwei Reihen Löcher versehen, in welche eiserne Bolzen gesteckt werden, für welche der eiserne Hebel zwei Einschnitte hat. Sie sind 8 bis 10 Zoll breit, 2 Zoll dick und 6 bis 7 Fuß lang, durch oben und unten zwischengelegte 2 bis 3 Zoll dicke Hölzer von einander getrennt, und damit die Löcher nicht ausbrechen, inwendig mit Blech beschlagen. Zur Befestigung der Last hat der Hebel an seinem andern Ende bei *G* einen Haken, und die feste Stellung der Pfosten wird durch die Stützen *H*, *I* gesichert.

468. Anmerkung. Die Last *Q* wird nun so gehoben: man steckt den Bolzen in das unterste Loch, drückt den Hebel, an dessen Ende die Last festgemacht wurde, herab, und steckt den Bolzen in das nächst höhere Loch, hierauf wird der Hebel zu einem neuen Hub gehoben, und hiebei der Bolzen in das zunächst gelegene höhere Loch gesteckt, und der Hebel abermals herabgedrückt u. s. w. Befinden sich einmal die Bolzen in den Löchern m, n, und man drückt den Hebel herab, so läßt sich sogleich der Bolzen aus n in n' versetzen, und bei Erhebung des Hebels aus m in m' bringen, u. s. w. Zu bemerken ist noch, daß die Kraft des Arbeiters abwechselnd größer und kleiner wird, weil die Hebellängen verschieden sind, je nachdem der Hebel in den Bolzen m oder n' eingreift. Ferner muß die Lage der Löcher so bestimmt werden, daß der Arbeiter den Hebel nicht höher zu heben oder tiefer zu senken braucht, als die Größe des Arbeiters und die davon abhängende

Digitized by Google

Höhe eines Hubes zuläßt. Es sei zu dem Ende ab (Fig. 110) $=h$ die Höhe eines Hubes, $ac=cb=l$ die Länge des Hebels, $cf=d$ der Abstand zweier an den Pfosten korrespondirenden Löcher, so hat man wegen der ähnlichen Dreiecke cfg, cab die Proportion

$$cf:ca=fg:ab, \text{ oder } d:l=fg:h, \text{ also } fg=\frac{dh}{l}$$

und die ähnlichen Dreiecke cad, fag geben

$$ca:fa=cd:fg \text{ oder } l:l-d=cd:\frac{dh}{l}, \text{ mithin } cd=\frac{dh}{l-d}$$

demnach ist $cd>fg$. Man sieht hieraus, daß die Entfernung der Löcher in der vordern Reihe, nämlich $cd=ce$ größer als die Entfernung der Löcher $fg=gh$ der hinteren Reihe sein müsse. Wenn aber der Punkt c in der Mitte der Höhe fg sich befindet, so steht e etwas über die Mitte der Höhe if.

469. Erklärung. Die französische Hebelade hat vor der so eben beschriebenen den Vortheil, daß der Hebel sich von selbst einhängt, und das Vorstecken der Bolzen erspart wird. Sie besteht aus einer eisernen, einerseits gezähnten Stange AB (Fig. 117), welche mit der Last zugleich in die Höhe gehoben wird. An dem dreifüßigen Gestell hängt bei E ein eiserner Haken Em, welcher bei n und p mit beweglichen Biegeln versehen und im Punkte m mit dem Hebel verbunden ist. Befindet sich der Hebel in der Lage CD, und wird bei C gehoben, so geht der Biegel no hinunter und hängt sich in den nächsten Zahn ein, während inzwischen die Last von dem Biegel pq gehalten wird. Drückt man nun den Hebel CD herab, so wird die Last mit der gezähnten Stange durch den Biegel no gehoben, und der zweite Biegel fällt durch sein eigenes Gewicht in einen folgenden Zahn ein. Auf diese Weise geht beim Auf- und Abbewegen des Hebels das Spiel der Biegel fort, bis die Last sammt der gezähnten Stange auf die verlangte Höhe von zwei oder drei Fuß gebracht ist.

470. Erklärung. Wenn man mehrere Hebel vermittelst Fäden miteinander so verbindet, daß die Bewegung des einen derselben allen andern mitgetheilt wird, so heißt die Vorrichtung ein zusammengesetzter Hebel. Die Figur 118, welche auch auf mannigfaltige Weise abgeändert werden kann, stellt einen zusammengesetzten Hebel dar. A, B, C sind die Unterlagen einzelner Hebel,

Digitized by Google

sie theilen dieselben in ungleiche Theile a und α, b und β, c und γ, die man beziehungsweise Hebelsarme der Kraft und Last nennt.

471. Lehrsatz. Bei einem zusammengesetzten Hebel verhält sich die Kraft zur Last, wie das Produkt der Hebelsarme der Last zum Produkte der Hebelsarme der Kraft.

Beweis. Sei x der Zug im Punkte D, und y der Zug im Punkte E, so hat man

$$P : x = \alpha : a$$
$$x : y = \beta : b$$
$$y : Q = \gamma : c \text{ demnach}$$
$$P : Q = \alpha\beta\gamma : abc.$$

V. Rollen und Flaschenzüge.

472. Erklärung. Eine metallene oder hölzerne kreisförmige Scheibe, welche zur Aufnahme eines Seiles an ihrem Umfange mit einer Rinne versehen, und um einen, durch ihren Mittelpunkt gehenden, in einem Gehäuse, dem sogenannten Kloben, befestigten Bolzen beweglich ist, heißt eine Rolle.

Die Rolle heißt eine Leitrolle oder feste Rolle, wenn der Kloben derselben selbst unbeweglich ist: sie heißt dagegen eine Zugrolle oder bewegliche Rolle, wenn der Kloben, in welchem sie steckt, sammt dem daran hängenden Gewichte beweglich ist. Die Figur 119 stellt eine Leitrolle, Figur 120 eine Zugrolle vor.

473. Aufgabe. Die Kraft zu finden, welche bei einer Leitrolle der Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Heißt P die Kraft, Q die Last, r der Halbmesser der Rolle, ϱ der Halbmesser des cylindrischen Bolzens, α der Winkel, welchen die verlängerten Richtungen der Kraft und Last mit einander bilden, so hat man

$$P = Q\frac{[r^2+\varrho^2\mu^2\cos\alpha \pm \varrho\mu\sqrt{(4r^2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha-\varrho^2\mu^2\sin^2\alpha)}]}{r^2-\varrho^2\mu^2}$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn die Kraft der Last und der Reibung das Gleichgewicht hält, hingegen das untere Zeichen, wenn die Kraft bloß eine Bewegung ihres Angriffspunktes verhindern soll.

Beweis. Sei A, Figur 119, der Angriffspunkt der nach der

Digitized by Google

Richtung AP wirkenden Kraft P, B der Angriffspunkt der nach BQ thätigen Last Q, C der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Rolle und des Bolzens: da die Richtungen der Kräfte P, Q den Winkel $PDQ=\alpha$ einschließen, so ist $\sqrt{(P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha)}$ ihre Resultirende, welche nach der Richtung CD wirkt, und im Punkte E am Umfange des Bolzens einen derselben gleichen Druck erzeugt; die hieraus entstehende Reibung ist $\mu\sqrt{(P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha)}$, welche am Hebelsarme $CE=\varrho$ wirkend, einer Kraft gleichgilt, deren Moment in Beziehung auf den Umdrehungspunkt C $\varrho\mu\sqrt{(P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha)}$ ist. Man hat also im Zustande des Gleichgewichts die Momente

$$Pr=Qr+\varrho\mu\sqrt{(P^2+Q^2+2PQ\cos\alpha)}$$

woraus durch Rationalmachung dieses Ausdruckes die quadratische Gleichung

$$P^2(r^2-\varrho^2\mu^2)-2PQ(r^2+\varrho^2\mu^2\cos\alpha)+Q^2(r^2-\varrho^2\mu^2)=0$$

zum Vorschein kommt. Löset man diese Gleichung auf, und bemerkt, daß

$$(r^2+\varrho^2\mu^2\cos\alpha)^2-(r^2-\varrho^2\mu^2)^2=4r^2\varrho^2\mu^2\cos^2{}^1/_2\alpha-\varrho^4\mu^4\sin^2\alpha$$

sei, so ergibt sich P wie oben. Von den beiden Vorzeichen der Wurzelgröße gilt natürlich bloß das obere, wenn die Kraft der Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält, dagegen das untere, wenn die Kraft von der Reibung begünstiget wird, nur bloß die Bewegung ihres Angriffspunktes zu hindern hat.

474. *Folgesatz.* Sind die Richtungen der Kraft und Last parallel, also $\alpha=0$, so vereinfacht sich der Werth von P auf den Ausdruck

$$P=\frac{Q(r^2+\varrho^2\mu^2\pm2\varrho\mu r)}{r^2-\varrho^2\mu^2}=\frac{Q(r\pm\varrho\mu)}{r-\varrho\mu}$$

wenn z. B. $\varrho={}^1/_8r$, $\mu={}^1/_5$, $Q=1000$ Pf. ist, so findet man

$$P=\frac{1601\pm80}{1599}=1051 \text{ Pf. im ersten, und } P=951 \text{ Pf. im zweiten}$$

Falle.

475. *Folgesatz 2.* Setzt man $\alpha={}^1/_2\pi$, so ergibt sich

$$P=\frac{Q[r^2\pm\varrho\mu\sqrt{(2r^2-\varrho^2\mu^2)}]}{r^2-\varrho^2\mu^2}$$

für $\varrho={}^1/_8$, $\mu={}^1/_5$ wird $P=1036$ Pf. im ersten, und $P=965$ Pf.

Digitized by Google

im zweiten Falle. Ist aber $\mu = 0$, dann wird ohne Rücksicht auf Reibung $P = Q$.

476. Anmerkung. Man bedient sich der Leitrolle, so oft Lasten auf eine große Höhe gebracht werden sollen, wenn nur in dieser Höhe für die Rolle Befestigungspunkte vorhanden sind, über die Rolle ein Seil von zweimal größerer Länge geschlungen werden kann, und die ganze Vorrichtung die erforderliche Festigkeit besitzt. Außerdem werden noch die festen Rollen vorzüglich angewendet, um die Richtungen der Kräfte nach besonderen Umständen abzuändern. Es gibt nämlich bei der Anwendung der Thierkräfte so wie der andern Naturkräfte immer gewisse Richtungen, in denen diese Kräfte mit größerer Bequemlichkeit und größerem Vortheile als in andern Richtungen angebracht werden können, und in manchen Fällen ist bei der Wirksamkeit dieser Kräfte nur eine einzige Richtung möglich. In solchen Fällen ist oft die Leitrolle ein vortreffliches Mittel zur Aenderung der Richtungen, nach denen die Kräfte ihre Wirksamkeit äußern. Es ist räthlich, die Zahl der Leitrollen nicht ohne Noth zu vervielfachen, weil mit dieser Anzahl die Größe der Reibung ungemein steigt.

477. Anmerkung 2. Auf die Leitrolle gründet sich auch noch ein einfacher Apparat zur Rettung der Menschen aus hohen, vom Feuer ergriffenen Häusern, in welchen die Treppen vom Feuer bereits verzehrt sind. Er besteht aus einer messingenen drei oder vier Zoll im Durchmesser haltenden Rolle, dessen eiserne Kapsel an ihrem Ende schraubenförmig eingeschnitten ist, und aus einer ledernen oder leinenen Gurte, die sich unter die Achseln am Körper festschnallen läßt. An der Gurte sind zwei oder mehrere eiserne Ringe eingenäht, an welche man eben so viele Stricke befestiget, deren andere Enden mit einem etwas stärkeren Stricke in einem Knoten verbunden sind. Bohret man die feste Rolle in dem Holzrahmen eines Fensters fest ein, befestiget den Gurt um den Leib, führt das Seil um die Rolle, so kann ein Mensch, welcher den an der Kehrseite der Rolle herabhängenden Theil des Seiles mit den mit Tuch oder Leinwand umwickelten Händen ergreift, durch allmähliges Nachlassen des Seiles sich ohne Gefahr von der Höhe herablassen. Die Kraft, mit welcher das Seil festzuhalten ist, ist

Digitized by Google

offenbar kleiner, als die Hälfte des Gewichtes vom Menschen: auch ist es zweckdienlich, an dem Seile von Klafter zu Klafter Knoten anzubringen.

478. Lehrsatz. An einer Zugrolle, wenn von der Reibung abgesehen wird, verhält sich die Kraft zur Last, wie der Halbmesser der Rolle zur Sehne des Bogens, um welchen das Seil gespannt ist.

Beweis. Sei ACB (Fig. 120) eine Zugrolle, um welche das Seil $PABD$ geschlungen ist, welches in D befestiget, und nach der Richtung AP von einer Kraft P gespannt wird: an dem durch den Mittelpunkt C der Scheibe gehenden Bolzen steckt der Kloben CH, sammt der daran hängenden Last Q. Im Zustande des Gleichgewichts müssen die Spannungen des Seiles AP und BD gleich sein, mithin ihre Resultirende den Richtungswinkel AEB halbiren, und zugleich der vertikalen Last Q gleich und entgegengesetzt sein; es liegt sonach der Punkt E der verlängerten Richtungen beider Seile auf der vertikalen Geraden CQ. Wenn aber die Kraft P größer wird als die Last Q, so entsteht eine Bewegung der Rolle um den Punkt B, indem das Seil BD sich verkürzt, und die Zugrolle sammt der Last gehoben wird: es kann also die Rolle AB als ein einarmiger Hebel angesehen werden, dessen Unterstützung im Punkte B sich befindet, und die Hebelsarme die Geraden AG, BG sind; zieht man daher die Gerade BF senkrecht auf die Richtung der Kraft, so hat man im Zustande des Gleichgewichts $P \times BF = Q \times BG$, oder $P : Q = BG : BF$ allein wegen der ähnlichen Dreiecke ABF, BGC ist auch

$$BG : BF = BC : AB, \text{ daher } P : Q = BC : AB.$$

479. Folgesatz. Sei ϱ der Halbmesser des Bolzens, r der Halbmesser der Rolle, und der Winkel AEB, den beide Seile einschließen, gleich 2β; so hat man, da die Winkel ACE, AEC sich zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzen, $AG = r\sin ACE = r\cos\beta$, daher (478) $P = Q : 2\cos\beta$. Heißt nun p die Kraft, welche am Hebelsarm AC der Reibung, deren Größe μQ, und Moment $\varrho\mu Q$ ist, das Gleichgewicht hält, so ist $pr = \varrho\mu Q$, somit

$$P + p = Q\left(\frac{1}{2\cos\beta} + \frac{\mu\varrho}{r}\right)$$

Digitized by Google

480. Folgesatz 2. Ist hier $\beta=0$ oder die Richtungen beider Seile vertikal, und man setzt Kürze halber $\varrho:r=\nu$, so folgt $P+p=Q(\frac{1}{2}+\mu\nu)$, und ohne Reibung $P=\frac{1}{2}Q$.

481. Erklärung. Einen Rollenzug oder den Flaschenzug des Archimedes nennt man eine Verbindung mehrerer beweglichen und einer festen Rolle, wie in Fig. 121 zu sehen. An einem festen Balken AB hängt bei C ein Seil herab, welches um die mit dem Gewichte Q belastete Rolle I. gezogen, mit seinem Ende in den Kloben der Rolle II. eingreift. Vom Punkte D lauft ein zweites Seil herab um die Rolle II. herum, und greift an den Kloben der Rolle III. ein, die ebenfalls an dem Seile EFG sich stützt u. s. f. Die Kraft wirkt nun nach der Richtung des gespannten Seiles PG unmittelbar, oder aber mittelst einer festen Rolle, um welche dieses Seil geführt wird. Indem nun die Kraft P das Seil PG anzieht, steigt zuerst die oberste Rolle, hierauf die folgenden bis zur untersten Rolle sammt der daran hängenden Last aufwärts.

482. Aufgabe. Bei einem Rollenzug die Kraft zu bestimmen, welche der Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Es ist, wenn n die Zahl der Zugrollen, G das Gewicht einer jeden einzelnen sammt Gehäuse, Q die an der untersten Rolle angebrachte Last, und $\nu=\varrho:r$ bedeutet,

$$P=(\tfrac{1}{2}+\mu\nu)[Q(\tfrac{1}{2}+\mu\nu)^{n-1}+G:(\tfrac{1}{2}-\mu\nu)]$$

Beweis. Setzt man Kürze halber $\frac{1}{2}+\mu\nu=A$, und bezeichnet die Spannung des Seiles an der Rolle I. mit p_1, an der Rolle II. mit p_2, an der Rolle III. mit p_3 u. s. w., so ist p_1 die Kraft, welche der Last Q und dem Gewichte der Rolle G das Gleichgewicht hält, mithin erhält man aus (480), wenn die Richtungen der Seile parallel vorausgesetzt werden, $Q+G$ statt Q setzend, sogleich $p_1=(Q+G)A$, und aus gleichem Grunde

$$p_2=(p_1+G)A=p_1A+AG=QA^2+G(A^2+A)$$
$$p_3=(p_2+G)A=QA^3+G(A^3+A^2+A)$$
$$p_4=(p_3+G)A=QA^4+G(A^4+A^3+A^2+A)$$

und allgemein

$$p_n=QA^n+G(A^n+A^{n-1}+\ldots+A^2+A)$$

Digitized by Google

es ist aber die eingeklammerte Größe als Summe einer geometrischen Reihe gleich $\frac{A-A^{n+1}}{1-A}=\frac{A(1-A^n)}{1-A}$, hiedurch wird, wegen

$$p_n=P, \quad P=A^nQ+\frac{AG(1-A^n)}{1-A}=A[A^{n-1}Q+G:(1-A)],$$

indem man A^n im Ausdrucke $1-A^n$ als einen kleinen Bruch wegläßt, woraus nach Substitution des Werthes von A der angegebene Ausdruck folgt.

483. Folgesatz. Ist $\mu=0$, oder wird die Reibung außer Acht gelassen, so erhält man

$$P=(1/2)^nQ+G.$$

484. Erklärung. Ein Flaschenzug besteht aus zwei metallenen Gehäusen oder Flaschen, welche über einander hängen, und in welchen zwei oder mehrere Rollen befestiget sind; die obere Flasche wird in einem Balken befestigt, und der untern wird die zu hebende Last angehängt. Eine solche Flasche stellt (Fig. 127) vor. Die Anzahl der Rollen kann entweder in beiden Flaschen dieselbe sein, oder sie ist in der oberen Flasche um eine größer, als in der unteren. Im ersten Falle wird das eine Ende des Seiles an dem Haken der oberen Flasche befestigt, und hierauf abwechselnd von einer Rolle der untern Flasche zur gleichvielten Rolle der obern Flasche geführt, wie Fig. 129 zeigt. Im andern Falle aber wird das Seil an der untern Flasche festgemacht, und sodann um die unterste Rolle der obern Flasche zur obersten Rolle der untern Flasche u. s. f. abwechselnd herumgeführt, bis es um sämmtliche Rollen beider Flaschen geschlungen ist, wie in der 128. Figur zu ersehen ist. Die Rollen selbst können in einem Gehäuse entweder über einander angebracht werden, oder aber, wie (Fig. 130 und 131) an einer gemeinschaftlichen Achse neben einander stecken. Im ersten Falle läßt man zum Behufe einer nahe parallelen Richtung der gespannten Seile die Halbmesser der Rollen in der Ordnung, wie sie von dem Seile ergriffen werden, um gleich viel abnehmen, im zweiten Falle erhalten aber sämmtliche Rollen denselben Durchmesser.

Digitized by Google

485. Anmerkung. Man kann aber auch am Umfange zweier Walzen mehrere Rinnen ausarbeiten lassen, deren Durchmesser für die eine Walze in dem Verhältnisse der ungeraden Zahlen 1, 3, 5 . . ., für die andere Walze aber in dem Verhältnisse der geraden Zahlen 2, 4, 6 . . . stehen. Das Seil, welches in den Rinnen solcher Walzen lauft, wird genau so abgerollt, als ob jede Rinne an einer besondern Rolle wäre, und jede Rolle sich unabhängig von den übrigen drehte. Ein Flaschenzug dieser Art ist in der Fig. 136 dargestellt. Ist diese Maschine genau gearbeitet, so gewährt sie den Vortheil, daß selbst bei der Hebung großer Lasten die Reibung sehr gering ist. Allein die praktische Anwendung derselben wird dadurch beschränkt, daß es nicht geringe Schwierigkeiten hat, den Durchmessern der Rinnen genau das richtige Verhältniß zu geben, besonders da auch die Dicke des Seiles mit in Betrachtung kommt. Bei einer sehr kleinen Abweichung vom richtigen Verhältnisse dieser Durchmesser von einander, wird aber das Seil ungleichmäßig gespannt, wobei einige Theile einen verhältnißmäßig großen Theil der Last zu tragen haben, während andere Theile sogar, ohne von der Last gespannt zu sein, schlaff werden können. Dieser Ursachen wegen hat die übrigens sinnreiche Erfindung bisher keine allgemeine praktische Anwendung gefunden.

486. Aufgabe. Die Kraft zu finden, welche an einem Flaschenzuge der Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Seien $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots$ die Halbmesser der Bolzen, und $r_1, r_2, r_3 \ldots$ die Halbmesser der Rollen in der Ordnung, wie sie vom Seile umschlungen werden, sei ferner ν' das arithmetische Mittel der Quotienten

$$\frac{\varrho_1}{r_1}, \frac{\varrho_2}{r_2}, \frac{\varrho_3}{r_3} \ldots$$

und Kürze halber $\frac{1}{2}+\mu\nu'=A$, so hat man

$$P=A^{n-1}\frac{(1-A)Q}{1-A^n}$$

Beweis. Es seien $p_1, p_2, p_3 \ldots p_n$ die Spannungen einzelner Seile, welche die Verbindung beider Flaschen herstellen, von Innen nach Außen gezählt, so ist nach (480) $p_2=p_1(\frac{1}{2}+\mu\nu_1)$,

Digitized by Google

wobei ν_1 den Werth $\frac{r_1}{\rho_1}$ besitzt. Bezeichnet man nun die Brüche

$$\frac{\rho_2}{r_2}, \frac{\rho_3}{r_3}, \frac{\rho_4}{r_4} \ldots \text{ mit } \nu_2, \nu_3, \nu_4, \text{ und setzt}$$

$\frac{1}{2}+\mu\nu_1=A_1$, $\frac{1}{2}+\mu\nu_2=A_2$, $\frac{1}{2}+\mu\nu_3=A_3$ u. s. f., so erhält man $p_2=p_1A_1$, $p_3=p_2A_2$, $p_4=p_3A_3$, und allgemein

$p_n=p_{n-1}A_{n-1}$, das Produkt dieser Gleichungen liefert nach Hinwegfassung der gemeinschaftlichen Faktoren $p_1, p_2, p_3 \ldots p_{n-1}$ den Ausdruck $p_n=p_1A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}$, oder weil die Spannung des $n$ten Seiles der wirkenden Kraft P gleichgilt, so ist

I. $P=p_1A_1A_2A_3A_4\ldots A_{n-1}$.

Ist nun ν das arithmetische Mittel der Größen

$$\nu_1, \nu_2, \nu_3 \ldots \nu_{n-1},$$

und $\frac{1}{2}+\mu\nu=A$, so kann man statt der einander nahe gleichen Faktoren $A_1, A_2, A_3 \ldots A_{n-1}$ im Ausdrucke I. sofort die Größe A setzen; dieß gibt

$$\text{II. } P=p_1A^{n-1}$$

Die Last Q hängt aber an sämmtlichen n Seilen, es ist daher

$$Q=p_1+p_2+p_3+\ldots+p_{n-1}+p_n$$

und bei dem angenommenen Mittelwerthe von A wird

$$p_2=p_1A,\ p_3=p_1A^2,\ p_4=p_1A^3\ldots p_n=p_1A^{n-1}$$

hiemit wird $Q=p_1(A+A^2+A^3+\ldots+A^{n-1})$ oder

$$\text{III. } Q=p_1\frac{(1-A^n)}{1-A}$$

Eliminirt man aus den Gleichungen II. und III. die Größe p_1 so ergibt sich für P der obige Werth.

487. *Folgesatz.* Der eben erhaltene Ausdruck der Kraft P wird unbestimmt, wenn $\mu=0$ gesetzt wird; allein man hat dann $p_1=p_2=p_3=p_4\ldots$ mithin $Q=rp_1=nP$, oder $P=\frac{Q}{n}$.

VI. Das Wellrad.

488. *Erklärung.* Wenn man in der verlängerten Richtung der Axe eines Cylinders AB (Fig. 132) zwei Zapfen C, D anbringt, welche in festen Lagern aufliegen, und am Cylinder senk-

Digitized by Google

recht auf seiner Axe eine kreisförmige Scheibe EF befestigt, deren Mittelpunkt in die Axe des Cylinders fällt, so heißt die Vorrichtung ein Wellrad. Den Cylinder nennt man die Welle, die Scheibe das Rad, die festen Lager, in denen bei der Umdrehung des Rades die Zapfen sich drehen, die Pfannen. Das zu hebende Gewicht wird gewöhnlich an einem Seile HI an der Welle befestigt, während am Umfange des Rades eine Kraft wirkt und die Umdrehung des Wellrades veranlaßt.

489. Erklärung. Nach der Anwendungsart und der Lage der Welle zerfallen die Wellräder zunächst in die Haspeln und die Winden. Bei den ersteren liegt die Welle horizontal, bei den letztern steht sie vertikal.

490. Anmerkung. Für die Theorie des Wellrades ist es einerlei, welche Richtung die Welle besitzt, wenn nur die Last oder der zu überwältigende Widerstand senkrecht auf die Axe der Welle wirkt, und die Kraft in einer Ebene angebracht ist, welche die Axe der Welle unter einem rechten Winkel schneidet: nur in Beziehung auf die Reibung an den Zapfen der Welle findet ein Unterschied Statt, indem an einer Winde nebst einer Seitenreibung noch eine andere Reibung an der Grundfläche des untern Zapfens, welche vom Gewichte des Wellrades herrührt, zu berücksichtigen kommt.

491. Erklärung. Die Last ist gewöhnlich mit einem um die Welle gewundenen Seile verbunden, aber die Art und Weise, wie die Kraft angebracht wird, ist sehr mannichfaltig. Zuweilen geschieht es, indem man eine Schnur oder einen Riemen um eine am Umfange des Rades angebrachte Rinne schlingt, da dann die Reibung dieser Schnur in der Rinne hinreicht, die Bewegung des Rades zu erzielen, wo dann die Vorrichtung ein Seilrad genannt wird. Seilräder werden gewöhnlich angewendet, wenn die Bewegung eines Rades einem benachbarten Wellrade mitgetheilt werden soll, indem man eine Schnur ohne Ende über den Umfang des Rades und die Welle des Wellrades spannt, wie Fig. 133 und 135: und zwar werden die Schnüre so fortgeführt, daß sie sich nicht kreuzen (Fig. 133), so drehen sich die Wellen A, B

Digitized by Google

nach derselben Richtung; im Gegenfalle, wenn sich die Schnüre kreuzen (Fig. 135), so bewegen sich beide Wellräder *A*, *B* nach entgegengesetzter Richtung. Eine solche Verbindung zweier Wellräder gewährt noch den Vortheil, daß man dieselben in beliebiger Entfernung anbringen kann, wenn nur die Schnur ohne Ende die dazu erforderliche Länge erhält.

492. Erklärung. Wirkt die Kraft an einer mit der verlängerten Welle verbundenen Kurbel, wobei die Kurbel einen Kreis beschreibt, dessen Halbmesser den Hebelsarm der Kraft vorstellt, so heißt die Vorrichtung ein Hornhaspel. Die Figur 124 weiset einen Hornhaspel mit zwei Kurbeln, deren verlängerte Ebenen einander unter einem rechten Winkel durchschneiden. Ein Kreuzhaspel (Fig. 125) entsteht, wenn durch die Welle zwei Stäbe kreuzweis durchgesteckt werden, so daß sie vier unter rechten Winkeln geneigte Hebelsarme bilden. Ein Radhaspel oder Spillenrad (Fig. 123) entsteht, wenn an dem mittelst Speichen mit der Welle verbundenen Rade kurze Stäbe oder Spillen befestigt sind, die so weit auseinander stehen, daß ein Mensch bei der Umdrehung des Rades bequem von einer Spille zur andern greifen kann.

493. Erklärung. Steht die Welle senkrecht, und wird sie von Menschen mittelst durchgesteckten Stangen oder Armen umgedreht (Fig. 126), so heißt die Vorrichtung eine Winde oder ein Göpel. Sind aber bei einer solchen stehenden Welle die durchgehenden Stangen oder Arme so lang, daß sie als Zugbäume für Pferde dienen können, so nennt man dieß einen Pferdegöpel. Befindet sich der Bretterboden, auf welchem die Arbeiter stehen, über der Stelle, an welcher die Last mittelst einer stehenden Welle aufgewunden wird (Fig. 134), so heißt die Vorrichtung eine Erdwinde oder eine Schiffswinde, je nachdem sie zur Fortschaffung der Lasten auf dem Lande, oder aber zu allen Arbeiten, die auf dem Schiffe vorkommen, z. B. zum Lichten der Anker, Anziehen der Schiffe ans Land, Aussetzen und Aufziehen der Schiffsboote angewendet wird.

494. Erklärung. Wird bloß das Gewicht der Thiere als bewegende Kraft angewendet, welche am Umfange des Rades wirkt,

Digitized by Google

und liegt dabei die Welle horizontal, so heißt die Vorrichtung ein Tret- oder Laufrad; hat aber die Welle eine schiefe Stellung, während sich die Thiere auf der mit der Welle unter einem rechten Winkel verbundenen Scheibe befinden, so heißt diese Einrichtung eine Tretscheibe. Die Figur 142 stellt ein Laufrad, Figur 154 eine Tretscheibe vor.

495. Aufgabe. Die Kraft zu finden, welche an einem Haspel der Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Heißt der Halbmesser des Rades $MO = R$ (Fig. 132), und der Halbmesser der Welle $OH = r$, wirkt ferner die Kraft P nach der Richtung MP, der Tangente des Punktes M, unter einem Winkel $MOX = \alpha$ gegen die horizontale Gerade OX, heißt ferner ϱ der Halbmesser des cylindrischen Zapfens C, so erhält man

$$P = \frac{Q(Rr + \mu^2\varrho^2\cos\alpha) + Q\mu\varrho\sqrt{(R^2 + r^2 + 2Rr\cos\alpha - \mu^2\varrho^2\sin\alpha^2)}}{R^2 - \mu^2\varrho^2}$$

Beweis. Zieht man in der Ebene des Rades durch den Punkt O die Gerade OE senkrecht auf OX, und verlängert sie bis zu ihrem Zusammentreffen mit der Geraden PM im Punkte G, so ist der Winkel MGO, unter welchem sich die Richtungen der Kräfte P, Q schneiden, gleich dem Winkel MOX, mithin ihre Resultirende nach (37) gleich $\sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha)}$: sie erzeugt eine Reibung, deren Moment $\mu\varrho\sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha)}$ ist; man hat also im Zustande des Gleichgewichts die gleichen Momente

$$PR = Qr + \mu\varrho\sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha)}$$

Macht man diese Gleichung rational, und ordnet das Ergebniß nach der Größe P, so findet man die quadratische Gleichung

$$P^2(R^2 - \mu^2\varrho^2) - 2PQ(Rr + \mu^2\varrho^2\cos\alpha) + Q^2(r^2 - \mu^2\varrho^2) = 0$$

woraus sich

$$P = \frac{Q(Rr + \mu^2\varrho^2\cos\alpha)}{R^2 - \mu^2\varrho^2} + Q\sqrt{\left[\left(\frac{Rr + \mu^2\varrho^2\cos\alpha}{R^2 - \mu^2\varrho^2}\right)^2 - \frac{r^2 - \mu^2\varrho^2}{R^2 - \mu^2\varrho^2}\right]}$$

ergibt. Allein die Größe unter dem Wurzelzeichen verwandelt sich sogleich in den Ausdruck

$$\frac{\mu^2\varrho^2(R^2 + r^2 + 2Rr\cos\alpha - \mu^2\varrho^2(1 - \cos^2\alpha)}{(R^2 - \mu^2\varrho^2)^2}$$

Digitized by Google

hiedurch erhält man $\sin^2\alpha$ statt $1-\cos^2\alpha$ setzend, sofort den für P angegebenen Ausdruck.

496. Folgesatz. Ist hier $\alpha=0$, oder wirken Kraft und Last am geradlinigen zweiarmigen Hebel, so wird $\cos\alpha=1$, und hiermit wird

$$P=\frac{Q[Rr\pm\mu\varrho(R+r)+\mu^2\varrho^2]}{R^2-\mu^2\varrho^2}$$

und wenn nebstdem $\mu=0$ ist, erhält man $PR=Qr$.

497. Folgesatz 2. Ist hingegen $\alpha=\pi$, oder wirken Kraft und Last am einarmigen Hebel, so folgt $\cos\alpha=-1$, und

$$P=\frac{Q[Rr-\mu^2\varrho^2+\mu\varrho(R-r)]}{R^2-\mu^2\varrho^2}$$

498. Anmerkung. Das doppelte Vorzeichen der Wurzelgröße bezieht sich auf die Bedingung, ob die Kraft die Last sammt der Reibung aufheben, oder aber bloß die Bewegung des Angriffspunktes der Kraft verhindern soll. Man sieht, daß die Kraft an einem Haspel mit dem Neigungswinkel ihres Hebelarmes veränderlich ist; sie ist am größten, wenn Kraft und Last an einem geradlinigen, doppelarmigen Hebel wirken: hingegen am kleinsten, wenn der Hebel einarmig ist. Das Gewicht des Haspels ist hier als mit der Last vereinigt angenommen worden.

499. Aufgabe. Die Kraft zu finden, welche bei einer Winde der Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Heißt G das Gewicht des Wellrades und R, r, ϱ die Halbmesser des Rades, der Welle und des cylindrischen Zapfens, so hat man

$$P=\frac{Q[Rr+\mu^2\varrho^2\cos\alpha\pm\mu\varrho\sqrt{(R^2+r^2+2Rr\cos\alpha-\mu^2\varrho^2\sin^2\alpha)}]}{R^2-\mu^2\varrho^2}$$
$$+{}^2/_3\mu G\varrho.$$

Beweis. Der eben angegebene Ausdruck besteht aus zwei Theilen, deren eine die Kraft vorstellt, welche der Last sammt der Reibung ohne Rücksicht auf das Gewicht des Wellrades das Gleichgewicht hält, und welcher genau denselben Ausdruck gibt, wie (495);

Digitized by Google

der andere Theil bedeutet aber die Reibung an der Grundfläche des untern cylindrischen Zapfens, welchen man so findet: Sei ein mit dem Halbmesser ϱ beschriebener Kreis die Grundfläche des Zapfens; man beschreibe aus dessen Mittelpunkt mit den Halbmessern $x<\varrho$, und $x+dx$ zwei konzentrische Kreise, welche einen unendlich dünnen Ring, dessen Inhalt $2\pi x dx$ ist, einschließen. Da das Gewicht G des Wellrades auf die Fläche $\pi\varrho^2$ gleichförmig vertheilt ist, so entsteht hieraus auf die Fläche des Kreisringes ein Druck $2Gxdx:\varrho^2$, und somit die Reibung $2G\mu xdx:\varrho^2$, welche mittelst des Hebelarmes x die Umdrehung des Rades verhindert; ihr Moment ist demnach $2G\mu x^2dx:\varrho^2$, woraus durch die Integration von $x=0$, bis $x=\varrho$, der Reibungswiderstand $^2/_3\mu G\varrho$ zum Vorschein kommt.

500. Aufgabe. Bei einer Tretscheibe den Seitendruck zu finden, welchen die beiden Zapfen auf die Pfannen in einer zur Ebene des Rades parallelen Richtung ausüben.

Auflösung. Sei P das Gewicht des Menschen oder Thieres, welches im Angriffspunkte D wirkt, dessen Lage durch den Neigungswinkel $GDH=\gamma$ (Fig. 154), der Ebene des Rades gegen den Horizont, und durch den Winkel $DCA=\alpha$, welchen der Hebelsarm $DC=R$ mit der Geraden AC einschließt, bestimmt ist, sei ferner G das Gewicht des Wellrades, Q die nach der Richtung EF senkrecht auf die Axe am Hebelsarme r wirkende Last, zieht man EK mit AC parallel und verlängert EF bis F', so sei der Winkel $KEF'=\beta$, und man hat den gesuchten Seitendruck N

$$N=\frac{\sqrt{[(P+G)\sin^2\gamma+Q^2+2(P+G)Q\sin\gamma\cos\beta]}}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$$

Beweis. Zieht man durch den Mittelpunkt C des Wellrades drei rechtwinkelige Axen, so daß die Ebene des Rades zur Ebene xy, und in ihr AC als Axe der x, und CI als Axe der y genommen wird, während die Axe der z mit der Umdrehungsaxe CZ übereinfällt; so kann man die in der vertikalen Richtung P, G angebrachten Kräfte, deren Summe $P+G$ ist, in die Seitenkraft $(P+G)\sin\gamma$ senkrecht auf die Axe CZ und in die Seitenkraft $(P+G)\cos\gamma$ parallel derselben zerlegen: eben so zerfällt die

Digitized by Google

parallel zur Ebene xy wirkende Kraft Q, in die Seitenkräfte $Q\cos\beta$ parallel zur Axe der x, und $Q\sin\beta$ parallel zur Axe der y. Denkt man sich den Normaldruck auf die Umdrehungsaxe N unter einem unbekannten Winkel φ thätig, so ist $N\cos\varphi$ die ihm zur Axe der x parallele Seitenkraft, und $N\sin\varphi$ die der Axe der y parallele Seitenkraft. Dieser Normaldruck N erzeugt am Umfange des Zapfens nach der Richtung der Tangente eine Reibung μN, deren Seitenkräfte $-\mu N\sin\varphi$ parallel zur Axe der x, und $\mu N\cos\varphi$ parallel zur Axe der y sind.

Zur Bestimmung des Normaldruckes N hat man daher die der Axe der x parallelen Kräfte

$$(P+G)\sin\gamma - Q\cos\beta = N(\cos\varphi + \mu\sin\varphi)$$

und die der Axe der y parallelen Kräfte sind

$$Q\sin\beta = N(\mu\cos\varphi - \sin\varphi)$$

die Summe der Quadrate dieser zwei Gleichungen liefert, wenn man bedenkt, daß $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$, und

$$(\cos\varphi+\mu\sin\varphi)^2+(\mu\cos\varphi-\sin\varphi)^2=1+\mu^2 \text{ sei}$$

$$(P+G)^2\sin^2\gamma - 2(P+G)\sin\gamma\cos\beta + Q^2 = N^2(1+\mu^2),$$

woraus sich N sofort wie oben ergibt.

501. Aufgabe. Die Kraft zu finden, welche an einem Tretrade mit der Last und der Reibung im Gleichgewicht steht.

Auflösung. Sind die numerischen Werthe der Größen P, Q, G, N, α, β, γ, μ gegeben, und man setzt Kürze halber

$$\frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}} = k,\quad \frac{\varrho}{R} = \nu,\quad \frac{r}{R} = \sigma,$$

so ergibt sich durch Substitution dieser Werthe die Kraft P durch Auflösung der quadratischen Gleichung:

$$\begin{aligned}
&P^2[\sin^2\alpha\sin^2\gamma - {}^2/_3\mu\nu\sin\alpha\sin 2\gamma + {}^4/_9\mu^2\nu^2\cos^2\gamma - k^2\nu^2\sin^2\gamma]\\
&-2P[\sigma Q\sin\alpha\sin\gamma + {}^1/_3\mu\nu G\sin\alpha\sin 2\gamma - {}^2/_3\mu\nu\sigma Q\cos\gamma\\
&\quad - {}^4/_9\mu^2\nu^2 G\cos^2\gamma + k^2\nu^2 G\sin^2\gamma + k^2\nu^2 Q\sin\gamma\cos\beta]\\
&+[\sigma^2Q^2 + {}^1/_3\mu\nu\sigma GQ\cos\gamma + {}^4/_9\mu^2\nu^2 G^2\cos\gamma\\
&\quad - k^2\nu^2(Q^2+G^2\sin^2\gamma + 2GQ\sin\gamma\cos\beta] = 0.
\end{aligned}$$

Beweis. Die Kraft $P\sin\gamma$, welche senkrecht auf die Umdrehungsaxe CZ wirkt, zerfällt in die zwei Seitenkräfte $P\sin\gamma\sin\alpha$, und $P\sin\gamma\cos\alpha$, deren erstere im Punkte D auf dem

Digitized by Google

Hebelsarme CD senkrecht steht, die andere ihm parallel lauft: nur die erstere trägt zur Umdrehung des Wellrades bei; man hat also ihr Moment gleich $PR\sin\alpha\sin\gamma$. Ferner ist Qr das Moment der Last, und $\mu\varrho N$ das Moment der Reibung, welche an den Seitenflächen beider Zapfen Statt hat. Da aber der Druck auf die Grundfläche des untern cylindrischen Zapfens hier $(P+G)\cos\gamma$ ist, so ergibt sich, diesen Werth statt G in (499) gesetzt, der Reibungswiderstand $\frac{2}{3}\mu(P+G)\varrho\cos\gamma$. Es sind daher im Zustande des Gleichgewichts die Momente einander gleich

$$PR\sin\alpha\sin\gamma = Qr + \mu\varrho N + \tfrac{2}{3}\mu\varrho(P+G)\cos\gamma;$$

setzt man hierher den Werth von N aus (500), führt die abgekürzten Werthe von k, ν, σ ein, und macht durch Erhebung zum Quadrate die Gleichung rational, so ergibt sich die oben angesetzte quadratische Gleichung, und der größere der beiden Werthe von P, welche durch Auflösung der quadratischen Gleichung zum Vorschein kommen, ist sofort der gesuchte Werth der Kraft.

502. *Folgesatz.* Wird von der Reibung abgesehen, so ist $\mu=0$, $k=0$, also die verlangte Gleichung

$$P^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma - 2PQ\sigma\sin\alpha\sin\gamma + \sigma^2Q^2 = 0, \text{ welche}$$

$$P = \frac{Q\sigma}{\sin\alpha\sin\gamma} = \frac{Qr}{R\sin\alpha\sin\gamma} \text{ liefert.}$$

Soll also die Kraft gleichmäßig die Umdrehung der Treibscheibe bewirken, so muß dieselbe stets einen Punkt D treffen, dessen Lage im Raume, weil der Radiusvektor R unveränderlich ist, durch dieselben Winkel α, γ bestimmt wird.

503. *Folgesatz* 2. Die vortheilhafteste Wirkung der Kraft wird also erreicht, wenn der Hebelsarm der Last so klein und der Halbmesser der Treibscheibe so groß gewählt wird, als es die erforderliche Festigkeit nur zuläßt, wenn nebstdem $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ ist, weil dann $\sin\alpha$ seinen größten Werth erhält, wenn endlich der Winkel γ so bestimmt wird, daß ein Mensch oder Thier beim Steigen auf der schiefen Ebene nicht zu viel ermüdet, welches geschieht, wenn man bei Menschen $\gamma=11°32'$, bei Pferden aber $\gamma=7°40'$ annimmt.

Digitized by Google

504. Anmerkung. Die Kraft an einem Wellrade wird nur durch zwei Mittel verringert, wenn entweder der Halbmesser der Welle vermindert oder der Halbmesser des Rades vergrößert wird. Beide Mittel haben bei der praktischen Ausübung ihre Grenzen; denn wird der Halbmesser des Rades vergrößert, so wird die Maschine unbequem, die Kraft muß sich durch einen zu großen Raum bewegen, und weil mit dem Halbmesser des Rades, wegen der erforderlichen Festigkeit auch die übrigen Dimensionen desselben steigen, so vergrößert sich auch das Gewicht der Maschine und die Zapfenreibung; wird aber die Dicke der Welle verringert, um auf diese Weise an ausübender Kraft zu gewinnen, so kann die Welle leicht zu schwach werden, um die vorhandene Last zu tragen. Bei der gewöhnlichen Einrichtung des Wellrades ist es also nicht möglich, die erforderliche Stärke mit mäßigen Dimensionen und großer Wirkung der Maschine zu vereinigen. Eine Ausnahme hievon bildet jedoch die Gegenwinde.

505. Erklärung. Die Gegenwinde besteht aus einer Welle, deren Hälften ungleiche Durchmesser besitzen, und welche mit einem Rade oder mit einer Kurbel fest verbunden sind. Um die dünnere Hälfte AB (Fig. 122) ist ein Seil gewunden, dessen Länge der Höhe gleich kommt, bis zu welcher die Last zu heben ist; hierauf wird das Seil abwärts um die Zugrolle F geführt, an welcher die Last Q hängt, und von da aufwärts bis zur dikkeren Hälfte BC der Welle, um welche das Seil in mehreren Windungen in entgegengesetzter Richtung so geschlungen wird, daß bei der Umdrehung der Welle vermittelst des Rades das Seil auf den stärkeren Theil der Welle aufgewunden wird, während es gleichzeitig von dem schwächeren Wellentheile sich abwindet. Da hiebei auf das stärkere Wellenende mehr vom herabhängenden Seile aufgewunden, als gleichzeitig vom schwächeren Wellentheile abgewunden wird, so muß dadurch das herabhängende Seil verkürzt, also die daran hängende Rolle sammt der Last gehoben werden. Die Fig. 140 stellt einen vertikalen Durchschnitt der Gegenwinde dar, wo der Kreis vom Halbmesser CA den Durchschnitt des schwächeren Wellentheiles, der Kreis vom Halbmesser CB den Durchschnitt des stärkeren Wellentheiles, und der Kreis vom Halbmesser CD

Digitized by Google

den Durchschnitt des Rades oder den von der Kurbel während der Drehung beschriebenen Kreis, endlich $BEFA$ das um die Zugrolle G geschlungene Seil andeutet.

506. Lehrsatz. Wenn bei der Gegenwinde von der Reibung abgesehen wird, so verhält sich im Zustande des Gleichgewichtes die Kraft zur Last, wie der halbe Unterschied der Halbmesser beider Wellentheile zum Halbmesser des Rades.

Beweis. Die Spannungen der Seile BE, AF sind einander gleich, indem jedes derselben das Gewicht der Hälfte der Last Q mit Einschluß des Gewichtes der Rolle zu tragen hat. Bezeichnet man nun den Halbmesser des Rades mit R, und setzt $CB=r$, $CA=r$, so sind die Momente der an den Punkten D, B, A wirkenden Kräfte beziehungsweise PR, $\frac{1}{2}Qr$, $\frac{1}{2}Qr$; demnach
$PR+\frac{1}{2}Qr=\frac{1}{2}Qr$, oder $PR=\frac{1}{2}Q(r-r)$, woraus
$P:Q=\frac{1}{2}(r-r):R$ folgt.

507. Anmerkung. Die Reibung an einer Gegenwinde ist gleich der Summe der Reibungen an einem Wellrade und an einer Zugrolle, aber die Steifigkeiten der Seile (181) zu beiden Seiten der Welle heben einander desto genauer auf, je kleiner der Unterschied der Halbmesser beider Wellentheile ist. Die Gegenwinde kann also in jenen Fällen Vortheile gewähren, wenn große Lasten mit geringen Kraftanwendungen auf nicht gar große Höhen zu heben sind, weil man die Differenz der Wellenhalbmesser so wie den Halbmesser des Rades mannichfach abändern kann.

508. Anmerkung 2. Wie die Kraft P zu wirken aufhört, muß die bereits mit der Gegenwinde aufgezogene Last zu sinken anfangen. Dieses Sinken geschieht, indem sich das Seil an dem stärkeren Wellentheile abwindet und an dem schwächeren Wellentheile aufwindet, mit einer Kraft, die so klein gemacht werden kann, als man will, wobei noch die Zapfenreibung der Welle die Last verringert. Der oben (477) angeführte Rettungsapparat bei Feuersgefahren kann daher durch Anwendung einer Gegenwinde, vervollkommnet werden. Um zwei Walzen AB, BC (Fig. 141) von Holz oder starkem Eisenblech, welche sowohl miteinander als

Digitized by Google

auch mit einer festen Axe *DE* fest verbunden sind, ist ein Seil in entgegengesetzten Windungen so geschlungen, daß es sich an der stärkeren Walze abwindet, während es sich an der schwächeren aufwindet, wodurch die auf dem Seile aufgehängte Rolle *D* sammt einem daran befestigten Korbe *E* sinkt. Der Korb dient, um Menschen oder werthvolle Gegenstände zu tragen, und ist an seinem Boden mit elastischen Ballen versehen, um beim Niederfallen die Kraft des Stoßes zu verringern. Daß eine solche Gegenwinde, in dem obersten Stockwerke eines Hauses angebracht, auch zum Aufziehen von Holz, Kohlen, Wasser u. A. verwendet werden kann, braucht nicht erst erinnert zu werden.

509. Erklärung. Die Zapfen, um welche sich ein Wellrad dreht, sind in der Regel von Eisen oder Stahl. Bei einer gußeisernen Welle von größeren Dimensionen werden die Zapfen aus einem Stück mit der Welle gegossen: bei kleineren Wellen unter 3 Zoll im Durchmesser werden die Zapfen geschmiedet und angedreht. Sind aber die Wellen von Holz, und es sollen eiserne Zapfen in dieselben eingesetzt werden, so gibt es verschiedene Methoden, diese mit jenen zu vereinigen. Insbesondere nennt man Spitzzapfen ein Stück aus einem vierkantigen Eisen in der Art angefertigt, daß dieses an dem einen Ende rund abgedreht und an dem anderen zugespitzt wird. Dieser Zapfen wird in die Welle so weit eingetrieben, daß nur der abgedrehte Theil hervorragt, und wird nur bei Wellen verwendet, deren Widerstand unbeträchtlich ist. Der Hakenzapfen besteht aus einem vierkantigen Stück Eisen *AB* (Fig. 143), das an dem einen Ende *A* rund abgedreht und an dem anderen *B* rechtwinklig umgebogen ist. Dasselbe wird in der hölzernen Welle dadurch befestiget, daß man in diese einen Einschnitt *CD* bis unter die Axe und so weit, als der Zapfen dick ist, macht; in den Grund wird ein Loch *E* für die Aufnahme des Hakens ausgemeiselt, jener eingelegt, der leere Raum über dem Zapfen mit hölzernen Keilen ausgefüttert und zuletzt ein paar eiserne Ringe *FG*, *HI* um die Welle getrieben.

510. Erklärung. Der Hakenzapfen ist aber nicht mehr genügend, sobald die Welle einen größeren Widerstand zu leisten hat,

Digitized by Google

wie z. B. bei oberschlächtigen Wasserrädern der Mühlen, und man setzt dafür den Blattzapfen ein. Die Figur 144 stellt sein Quer- und Längenprofil vor. Dieser ist gewöhnlich von Gußeisen aus einem Stück angefertigt, und enthält drei von einander unterscheidbare Theile, den Zapfen A, den Kegel AB, und die Flügel AC, AD. Die Welle wird für die Aufnahme der beiden Flügel und des Kegels ausgeschnitten, der Blattzapfen mit Schlegeln eingetrieben, der zwischen den Flügeln und dem Holze der Welle vorhandene Spielraum mit Keilen ausgefüttert und die schmiedeeisernen Ringe um die Welle gelegt.

511. Erklärung. Hat die Welle ein großes Gewicht, und erleidet sie periodische Erschütterungen, so wird der Blattzapfen mit der Zeit lose. Man wendet daher besser den Flügelzapfen oder den Ringzapfen in solchen Fällen an. Der erstere unterscheidet sich von dem vorhin betrachteten Blattzapfen darin, daß derselbe statt zwei Flügeln deren vier hat, die sich unter rechten Winkeln kreuzen (Fig. 145), der letztere aber enthält nebstdem noch einen dicken Ring, welcher sammt den Flügeln und dem cylindrischen Zapfen in einem Stücke gegossen ist (Fig. 146). Die Welle wird zur Aufnahme der vier Flügel übers Kreuz ausgeschnitten, und der Raum zwischen der Welle und den Flügeln ausgefüttert und fest verkeilt.

512. Anmerkung. Bei der Einsetzung der Zapfen ist vorzüglich darauf zu sehen, daß die Axen der Zapfen mit der Axe der Welle zusammenfallen, daher muß man, wenn es die Umstände gestatten, die Zapfen erst, nachdem dieselben fest mit der Welle vereinigt sind, und diese an ihren Platz gebracht worden, abdrehen.

513. Erklärung. Die Lager, in denen sich die Zapfen drehen, sind entweder offen oder geschlossen. Dieselben werden gewöhnlich aus Bronze oder aus einer Mischung angefertigt, welche aus 84 Theilen Kupfer und 16 Theilen Zinn zusammengesetzt wird, und welche sehr hart und dauerhaft ist. Die offenen Lager besitzen eine cylindrische Vertiefung, deren Querschnitt ein Halbkreis ist, und werden nur dann angewendet, wenn die Welle sowohl durch ihr Gewicht, als auch durch die auf dieselbe einwirkenden Kräfte ein

Digitized by Google

Bestreben äußert, abwärts zu drücken. Im Gegenfalle wendet man geschlossene, aus zwei halbkreisförmigen Theilen zusammengesetzte Lager an.

514. Anmerkung. Die Stärke des Zapfens, wenn das Wellrad eine gegebene Last Q zu heben hat, findet man so: Sei ϱ der Halbmesser des Zapfens, l dessen Länge und N der von den auf die Welle angebrachten Kräften herrührende Normaldruck, so hat man dessen statisches Moment $=Nl$, und die respektive Festigkeit eines Cylinders vom Halbmesser ϱ nach (231) gleich $\frac{5}{8}k\varrho^3\pi$; demnach $Nl=\frac{5}{8}k\varrho^3\pi$, woraus man $\varrho=2\sqrt[3]{\frac{Nl}{5k\pi}}$ findet. Häufig ist $l=3\varrho$, dann hat man $3N\varrho=\frac{5}{8}k\pi\varrho^3$, oder $\varrho=2\sqrt{\frac{6N}{5k\pi}}$, wo N in W. Pfunden, ϱ in W. Zollen und, weil hier keine Biegung zulässig ist, statt k der vierte Theil der Werthe in (262) zu nehmen ist.

Morin setzt in seinem Aide memoire de mecanique für gußeiserne Zapfen der Wasserräder, die einer beträchtlichen Abnützung ausgesetzt sind, $\varrho=\sqrt[3]{(Nl:525388)}$, und für gut in Schmiere erhaltene Zapfen bei

Gußeisen $\varrho=\sqrt[3]{\frac{Nl}{799232}}$, Schmiedeeisen $\varrho=\sqrt[3]{\frac{Nl}{642240}}$, wo ϱ und l in W. Zollen, N in W. Pfunden verstanden wird. Ganz eben so ergibt sich der Halbmesser r der Welle von der Länge L, welche einem bekannten Drucke für die Dauer zu widerstehen im Stande ist $r=2\sqrt{(4NL:5k\pi)}$.

515. Anmerkung 2. Wenn die Theile einer Maschine, welche der Einwirkung einer beträchtlichen Kraft zu widerstehen haben, aus Gußeisen angefertigt werden, so macht man sie, um Material zu sparen und doch ihren Widerstand nicht zu mindern, entweder hohl, oder man versieht sie an angemessenen Stellen mit Rippen. Die gußeisernen Räder werden mit ihren Armen und ihrer Nabe aus einem Stücke gegossen, wenn ihr Durchmesser unter 9 Fuß ist; im Gegenfalle wird der Kranz als auch die Nabe besonders gegossen, und beide mittelst eiserner Arme mit einander durch

Digitized by Google

Schraubenbolzen vereinigt. Um ihre Stärke dem Widerstande proportional zu erhalten, macht man die eisernen Arme an den Stellen, wo sie mit der Nabe vereinigt sind, breiter, als an jenen, wo sie mit dem Radkranz verbunden sind, und zwar in dem Verhältnisse von 2 : 1 oder 3 : 2. Gewöhnlich sind die Arme nicht so dick, als der Radkranz breit ist, deßhalb werden sie an ihrer vordern, zuweilen auch an ihrer hintern Fläche mit einer Rippe versehen, die mit dem Körper des Armes aus einem Stück gegossen ist, um dadurch den Seitenbiegungen einen Widerstand entgegen zu setzen. Für gußeiserne Räder mit 6 Armen hat *Tredgold* eine Tafel gegeben, welche die Dimensionen der Radarme für verschiedene, an der Peripherie des Rades wirkende Kräfte enthält, die man in Kuppler's o. a. Werke S. 290 nachschlagen kann. Eine vortreffliche Beschreibung des Pferdegöpels zur Aufziehung der Erze aus den tiefen Schachten in *Krušna Hora* findet man in Gerstner's Mechanik, Bd. I. S. 218.

VII. Räderwerke.

516. Erklärung. Eine Verbindung mehrerer Wellräder unter einander von der Art, daß bei der Umdrehung des ersten Wellrades sofort auch alle übrigen Wellräder in eine drehende Bewegung kommen, nennt man ein Räderwerk. Zu diesem Ende befinden sich an den Peripherien der Räder in gleicher Entfernung von einander vorstehende Erhabenheiten, welche in die Vertiefungen, die an der Oberfläche der Wellen angebracht sind, eingreifen, wodurch die Bewegung des ersten Rades sofort der Welle des nächstbefindlichen Wellrades und die des zweiten Rades der Welle des dritten Wellrades u. s. f. mitgetheilt wird. Man nennt solche Erhabenheiten des Rades dessen Zähne, welche von gleicher Dicke und in gleichen Abständen am Umfange desselben eingeschnitten werden, und ein so eingerichtetes Rad ein gezähntes Rad, während die mit Vertiefungen versehene Welle ein Getriebe heißt.

517. Erklärung. Sitzen die Zähne an der Peripherie des Rades so, daß ihre Ebene mit der Ebene des Rades zusammenfällt, so heißen sie eigentlich Zähne, und das gezähnte Rad wird

Digitized by Google

ein Stirnrad genannt; stehen diese Erhöhungen hingegen senkrecht auf der Ebene des Rades, also parallel der Radaxe, so heißen sie Kämme, und das Rad ein Kammrad oder Kronrad. Zuweilen wird die Stelle eines Getriebes dadurch vertreten, daß zwischen zwei senkrecht zur Welle unter sich parallelen Scheiben an ihrem Umfange in gleichen Abständen runde Stäbe befestiget sind, welche beim Eingriffe des Rades zwischen dessen Zähne einfallen. Die Anordnung wird ein Trilling genannt, und die cylindrischen Stäbe heißen Triebstöcke. Die Fig. 138 stellt ein Räderwerk vor, welches aus drei Wellrädern besteht; es enthält die Stirnräder A, B, C nebst den Getrieben a, b, und dabei greift das erste Getriebe a in die Zähne des Rades B, das zweite Getriebe b in die Zähne des Rades C, am Umfange des Rades A wirkt nach der Richtung DP die Kraft, und am Umfange der Welle c hängt mittelst des Seiles EQ die Last. In der Fig. 137 ist bei A ein Stirnrad, bei B und D ein Trilling, bei C ein Kronrad. Stehen die Ebenen zweier Räder nicht winkelrecht auf einander, sondern schneiden sich unter einem spitzen oder stumpfen Winkel, und sind die Kämme schief auf der Ebene beider Räder eingeschnitten, so heißen sie konische Räder. Die Figur 139 stellt die Verbindung zweier konischen Räder dar. Beide Verbindungen (Fig. 137 und 139) zeigen, wie die Bewegung aus einer Ebene in die auf einer andern Ebene sich übertragen läßt.

518. Aufgabe. Die Kraft zu finden, welche bei einem Räderwerke der Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Heißen R, R_1, R_2, R_3, ... die Halbmesser der Räder, und r, r_1, r_2, r_3 ... die Halbmesser der Wellen, die am Umfange des ersten Rades wirkende Kraft P, und die an der Welle des letzten ($n$ten) Rades angebrachte Last Q, so hat man

$$P = \frac{r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{n-1}}{R \cdot R_1 \cdot R_2 \ldots R_{n-1}} \cdot Q\sqrt{(1+\mu^2)^n}$$

Beweis. Sei ABC das erste Wellrad (Fig. 164), und D der Mittelpunkt des nächst folgenden Rades, dessen Umdrehung durch das Fortrücken der Zähne am Getriebe vom Halbmesser $AC = r$ gegen die Zähne des Rades vom Halbmesser CD bewirkt wird. Man ziehe an den Berührungspunkt C der Zähne des Getriebes

und Rades die Halbmesser AC, CD, und wenn man CD verlängert, bezeichne man den veränderlichen Winkel ACE, welchen beide Halbmesser mit einander bilden, mit φ, und setze den Widerstand, welchen ein Zahn des Getriebes bei der Umdrehung des folgenden Rades erfährt, gleich einer Kraft X, welche senkrecht auf dem Halbmesser CD thätig ist. Wird diese Kraft durch die Gerade CG vorgestellt, so kann man dieselbe durch Verzeichnung des Rechteckes $CHGF$ in die Seitenkräfte $CH=X\cos\varphi$, und $CF=X\sin\varphi$ zerfallen, deren erstere mittelst des Hebelsarmes AC die Umdrehung der Welle verhindert, die andere aber im Berührungspunkte C des Radzahnes mit dem Zahne des Getriebes eine Reibung erzeugt, deren Werth $\mu X\sin\varphi$ und deren Moment $r\mu X\sin\varphi$ ist. Man hat sonach im Zustande des Gleichgewichtes für $AB=R$

$$\text{I.}\quad PR=rX(\cos\varphi+\mu\sin\varphi).$$

Man sieht, daß die Kraft P, welche im Punkte B wirkend die Umdrehung des Rades erzeugen soll, eine Funktion der veränderlichen Größe φ sei, und daß sie nur dann die Erhebung der am zweiten Wellrade angebrachten Last bewirken kann, wenn ihre Größe dem größten Werthe der Funktion $\cos\varphi+\mu\sin\varphi$ gleich kommt. Dieser größte Werth ergibt sich aber für $\mu=\operatorname{tg}\varphi$, wodurch $\sin\varphi=\dfrac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$, $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$

daher erhält man mit diesen Ausdrücken aus der Gleichung I. die folgende

$$\text{II.}\quad PR=rX\sqrt{(1+\mu^2)}.$$

Nun ist der Widerstand X des ersten Wellrades als eine Kraft anzusehen, welche das zweite Wellrad zu umdrehen vermag: heißt also X_1 der Widerstand, welchen das dritte Wellrad der Umdrehung desselben entgegensetzt, so hat man analog

$$XR_1=r_1X_1\sqrt{(1+\mu^2)}$$

und eben so bei den folgenden Wellrädern wird

$$X_1R_2=r_2X_2\sqrt{(1+\mu^2)}$$

$$X_2R_3=r_3X_3\sqrt{(1+\mu^2)}\quad\text{u. s. f.,}\quad\text{also beim}$$

$n$ten Wellrade $\quad X_{n-2}R_{n-1}=r_{n-1}X_{n-1}\sqrt{(1+\mu^2)}$

und das Produkt dieser Gleichungen liefert, nach Hinweglassung

der beiderseits gemeinschaftlich erscheinenden Faktoren, da der Widerstand am letzten Wellrade der zu hebenden Last Q gleich kommt, sofort $PR \cdot R_1R_2 \ldots R_{n-1} = rr_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \ldots r_{n-1}\sqrt{(1+\mu^2)^n}Q$ woraus sich sogleich der angegebene Ausdruck finden läßt. Hiebei ist die Zapfenreibung einzelner Wellräder unberücksichtigt.

519. Folgesatz. Wird von der Reibung abgesehen, da dann $\mu=0$ ist, so folgt unmittelbar

$$P : Q = r \cdot r_1 \cdot r_2 \ldots r_{n-1} : R \cdot R_1 \cdot R_2 \ldots R_{n-1}$$

oder es verhält sich die Kraft zur Last an einem Räderwerke, wie das Produkt der Halbmesser sämmtlicher Wellen zum Produkte der Halbmesser der ihnen zugehörenden Räder.

520. Erklärung. Die Zähne eines Rades, so wie die Triebstöcke eines Getriebes sind immer durch einen Zwischenraum von einander geschieden, welchen man den Ausschnitt oder die Höhlung nennt. Die Ausschnitte sind bei Rädern so groß, um einen Triebstock des zugehörigen Getriebes mit einem kleinen Spielraum zu fassen. Man unterscheidet an einem Radzahne drei Theile: den Obertheil oder den Kopf, den Körper oder die Brust, und den Untertheil oder den Fuß. Der Kopf wird gewöhnlich von zwei symmetrischen Kurven gebildet, die sich in der Spitze des Obertheils durchschneiden: der Körper aber wird von geraden Linien eingeschlossen, welche im Mittelpunkte des Rades zusammenlaufen. Ist die Spitze des Radzahnes abgestumpft, so fällt der Fuß mit der Stirn des Radkranzes zusammen. Der Halbmesser des Stirnrades wird immer vom Mittelpunkte des Rades bis an die Brust des Zahnes und der Halbmesser eines Trillings von dessen Mittelpunkte an bis an den Mittelpunkt des Triebstockes gezählt, weil nur dieser Halbmesser bei der Anordnung des Räderwerkes und bei der Bestimmung der Kraft in Betrachtung kommt. Beschreibt man mit diesem Halbmesser aus dem Mittelpunkte des Rades einen Kreis, so heißt derselbe der Theilriß, und der Abstand am Theilrisse von der Mitte eines Zahnes bis zur Mitte des nächsten, die Theilung.

521. Folgesatz. Heißen R, r die Halbmesser vom Theilrisse des Rades und Getriebes, t die Länge der Theilung, m, n die An-

zahl der Zähne im Rade und Getriebe, α, β die Mittelpunktswinkel für die Theilung t beim Rade und Getriebe, so hat man offenbar I. $t = R\text{arc}\alpha = r\text{arc}\beta$, II. $\text{arc}\alpha = \frac{\pi\alpha}{180}$, $\text{arc}\beta = \frac{\pi\beta}{180}$

und hieraus III. $R\alpha = r\beta$, ferner IV. $mt = 2\pi R$, $nt = 2\pi r$

sonach V. $nR = mr$, oder $R : r = m : n$

d. i. die Halbmesser des Rades und zugehörigen Getriebes sind der Anzahl der an ihrem Umfange angebrachten Zähne und Triebstöcke proportional.

522. Folgesatz 2. Bezeichnet man also mit m_1, m_2, m_3 ... die den Radhalbmessern R_1, R_2, R_3 entsprechende Anzahl der Zähne, und mit n_1, n_2, n_3 ... die den Halbmessern der zugehörigen Getriebe korrespondirenden Zähnezahlen, so hat man sogleich

$$R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \ldots = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots, \text{ und}$$

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \ldots = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots, \text{ demnach (519)}$$

$$P : Q = r \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \ldots : R \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots$$

oder es verhält sich die Kraft zur Last wie der Halbmesser des letzten Getriebes, multiplizirt in das Produkt der Triebstücke sämmtlicher Getriebe, zum Halbmesser des ersten Rades, multiplizirt in das Produkt der Zähne sämmtlicher Räder.

523. Aufgabe. Die vortheilhafteste Gestalt der Zähne eines Stirnrades anzugeben, wenn das zugehörige Getriebe mit cylindrischen Triebstöcken versehen ist.

Auflösung. Der Obertheil der Zähne wird beiderseits durch Bögen einer krummen Linie begrenzt, welche einer Epicykloide, deren Grundkreis der Theilriß des Rades, und deren Erzeugungskreis der Theilriß des Getriebes ist, in einer Entfernung, welche dem Halbmesser des Triebstockes gleich ist, parallel laufen.

Beweis. Soll die Bewegung des Räderwerkes gleichförmig vor sich gehen, demnach kein Stoß oder kurze Stillstände und darauf folgendes plötzliches Fortrücken des Getriebes Statt haben, so muß die Gestalt der Zähne eines Rades so beschaffen sein, daß ein Triebstock für jede Lage der Zähne denselben Druck auf das Rad ausübt, und daß derselbe einen Radzahn nicht früher

Digitized by Google

ausläßt, bevor nicht der folgende Triebstock in den benachbarten Zahn eingegriffen hat. Sei nun RAS (Fig. 148) der Theilriß des Rades, DAE jener des Getriebes, ihre Mittelpunkte in O und C, sei AZ die zu bestimmende Gestalt des Zahnes, wenn die Bewegung des Rades von R gegen S angenommen wird, und in A sei ein Triebstock ohne Dicke befestigt; dreht sich nun das Rad von A gegen B, und kommt hierbei der Zahn AZ in die Lage BZ', so treibt er den Triebstock von A nach D, und es müssen, bei gleichförmiger Umdrehung des Rades und Getriebes, die Bögen AD, AB einander gleich sein; nun ist es für die Gestalt des Zahnes gleichgeltend, ob Rad und Getriebe jedes um seinen Mittelpunkt sich dreht, oder aber ob bei einem unbeweglichen Rade das Getriebe allein an dessen Umfange herumbewegt wird: im letzteren Falle beschreibt jeder Triebstock eine Epicykloide (A. 1372); demnach ist, weil der Triebstock die Stirnfläche des Zahnes beständig berühren soll, die Krümmung des Radzahnes AZ eine Epicykloide. Ist nun der Bogen AZ eine feste, unbiegsame Linie, welche bei der Umdrehung des Rades mitbewegt wird, so treibt sie, in die Lage BZ' gebracht, den Triebstock von A nach D, ohne ihn in der Zwischenzeit zu verlassen. Um noch die Kraft zu bestimmen, welche der Radzahn in seinen verschiedenen Stellungen auf den Triebstock ausübt, ziehe man die Sehnen AD, DE, so ist nach (A. 1382) jene eine Normale, diese eine Tangente des Punktes D in der Epicykloide, und der Druck, welchen der Zahn BZ' auf den Triebstock D äußert, findet nach der Richtung AD Statt. Sei $Aa = V$ die Kraft, welche den Triebstock in A nach der Richtung der Tangente AT treibt, so zerfällt derselbe durch Konstruktion des Kräfte-Parallelogramms $DabA$ in die Seitenkräfte Ab, DA, deren erstere vom festen Punkte O aufgehoben wird, die andere aber allein zur Bewegung des Triebstockes beiträgt; bezeichnet man sie mit V', so hat man im Dreiecke DaA

$$Aa = AD \sin aDA, \text{ oder } V = V' \sin CAD.$$

Man verlängere AD bis $DF = AD$ wird, und verzeichne das Rechteck $DcFd$, dessen Seite Dc in die Tangente des Kreises ADE fällt, also Dd in der Verlängerung seines Halbmessers CD

Digitized by Google

gelegen ist, so sind Dc und Dd die zwei Seitenkräfte von DF, unter denen Dd durch die Festigkeit des Punktes C aufgehoben wird; sonach erfolgt die Bewegung des Triebstockes D mit einer Kraft $Dc = DF \sin CFD = V' \sin CAD = V$. Der Triebstock D wird daher von dem Radzahne BZ' in jeder Lage eben so fortgeschoben, als wenn die Kraft V, welche am Umfange des Rades wirkt, unmittelbar am Umfange des Getriebes nach der Richtung seiner Tangente angebracht wäre. Ist aber der Triebstock nicht bloß ein fester Punkt, sondern ein Kreiscylinder vom Halbmesser Aa (Fig. 149), so sei AZ der vom Punkte A beschriebene Bogen der Epicykloide, als erforderliche Gestalt des Radzahnes, wenn der Triebstock ein fester Punkt wäre: mit dem Halbmesser Aa zeichne man auf der konkaven Seite des Bogens AZ lauter Halbkreise, und ziehe durch ihre Scheitel die krumme Linie az, so ist diese in allen Punkten von der Epicykloide AZ gleichweit entfernt, und bestimmt die erforderliche Gestalt des Zahnes, damit der Triebstock den Zahn in seinen verschiedenen Stellungen zu berühren vermag. Kommt alsdann der Mittelpunkt A des Stockes nach D, und der Bogen AZ nach BZ' also az nach bz', und man zieht die zum Punkte D der Epicykloide gehörige Normale AD, so ist da, wo solche den Umfang des Stockes und Zahnes in c schneidet, der Berührungspunkt beider Oberflächen, weil $Dc = Aa$ ist; es gelten daher hier vom Punkte c eben die Sätze, welche im vorhergehenden Falle, wo der Triebstock ein bloß fester Punkt war, erwiesen wurden. Soll endlich auch eine Rückwärtsbewegung des Rades von S gegen R Statt haben, so muß der Radzahn symmetrisch geformt, d. h. beiderseits durch die gleichen Bögen az, $a'z$ begrenzt sein.

524. Anmerkung. Weil nur die Bögen az, bz' des Zahnes mit dem Triebstocke in Berührung treten, so ist es einerlei, welche Gestalt der übrige Theil des Zahnes erhält, wenn nur dadurch die Bewegung der Triebstöcke nicht gehindert wird. Um die Zähne ohne Noth nicht zu lang zu machen, ist es zureichend, wenn jedesmal nur ein Zahn mit einem Stocke in Berührung kommt, mithin in dem Augenblicke, wo ein Zahn az (Fig. 149) den Triebstock erfaßt, der nächstfolgende Zahn bz' denselben bei c ver-

Digitized by Google

läßt. Man kann also die zugespitzten Zähne um den Theil $cz'd$ abstumpfen, indem man mit dem Halbmesser Oc aus dem Mittelpunkte O einen Kreisbogen cd verzeichnet; hiedurch werden auch die Triebstöcke A, D näher an einander gerückt, als bei gespitzten Radzähnen, wo der Triebstock I um die Theilung $AI > AD$ abstehen müßte.

525. Aufgabe. Aus den Halbmessern des Stirnrades und des Getriebes, der halben Dicke eines Stockes und dem Winkel am Mittelpunkte des Getriebes, welcher durch die Theilung gegeben ist, die kleinste Länge vom Obertheil des Zahnes zu bestimmen.

Auflösung. Heißt $OA = R$ (Fig. 149) $AC = r$, $Aa = d$, $ACD = \beta$, so ist die Länge $ck = l$ durch die Formel bestimmt

$$l = -R + \sqrt{[R^2 + (2r\sin{}^1/_2\beta - d)^2 + 2R(2r\sin{}^1/_2\beta - d)\sin{}^1/_2\beta]}$$

Beweis. Wegen (A. 1011) hat man $AD = 2r\sin{}^1/_2 ACD = 2r\sin{}^1/_2\beta$, oder wenn man $Dc = d$ wegnimmt, $Ac = 2r\sin{}^1/_2\beta - d$; ferner ist der Winkel

$$cAO = \pi - cAC = {}^1/_2\pi + {}^1/_2\beta, \text{ daher}$$

$$\cos cAO = \cos({}^1/_2\pi + {}^1/_2\beta) = -\sin{}^1/_2\beta,$$

und man erhält im Dreiecke cAO nach (A. 1058)

$$cO_q = AO_q + Ac_q - 2AO \,.\, Ac \,.\, \cos OAc, \text{ oder}$$

$$(R + l)^2 = R^2 + (2r\sin{}^1/_2\beta - d)^2 + 2R(2r\sin{}^1/_2\beta - d)\sin{}^1/_2\beta,$$

woraus der für l angegebene Werth folgt.

526. Aufgabe. Aus der gegebenen Theilung und der Anzahl Zähne und Stöcke beim Rade und Getriebe die Zähne und Stöcke anzuordnen, und eine Lehre für die Zähne zu verzeichnen.

Auflösung. Sei die Theilung t, die Zahl der Zähne m, die Anzahl der Triebstöcke n, und die Halbmesser des Rades und Getriebes beziehungsweise R und r, so hat man

$$R = \frac{mt}{2\pi}, \quad r = \frac{nt}{2\pi}$$

Weil die Stöcke sich mehr abnützen, als die Zähne, und auch länger sind als diese, so macht man sie gewöhnlich dicker als die Zähne. Ein Spielraum zwischen beiden wäre entbehrlich, sobald

Digitized by Google

Alles im hohen Grade vollkommen bearbeitet werden könnte. Gewöhnlich gibt man dem Spielraum ef (Fig. 149) den achtundvierzigsten Theil der Theilung, also $ef = {}^1/_{48}t$. Soll nun die Dicke des Stockes die Hälfte der Theilung betragen, so ist, wenn d den Halbmesser desselben bezeichnet, $2d = {}^1/_2t$. Zieht man nun von der ganzen Theilung t die Summe ${}^1/_2t + {}^1/_{48}t = {}^{25}/_{48}t$ ab, so bleibt ${}^{23}/_{48}t$ für die Breite des Zahnes auf dem Theilrisse übrig. Um nun die Lehre anzufertigen, wornach sämmtliche Zähne bearbeitet werden können, ziehe man auf einem ebenen Brete eine Linie OC, trage von O bis A den Halbmesser des Rades, und von A bis C den Halbmesser des Getriebes. Aus O und C schlage man die Kreisbögen AS, AD nehme den Bogen $AD = AB = t$, ziehe die Sehne AD, und nehme $Dc = d$ der halben Dicke des Stockes gleich, so wird ein Bogen cd aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser Oc geschlagen, die Länge des Radzahnes begrenzen (524). Nun theile man die Kreisbögen AD, AB in dieselbe Anzahl gleicher Theile, und beschreibe nach (A. 1377) den Epicykloidalbogen BZ' oder den ihm gleichen Bogen AZ. Hierauf nehme man die halbe Dicke des Stockes in den Zirkel, und schlage aus A und aus mehrern Punkten der Linie AZ Kreisbögen, und zeichne durch die äußersten Enden derselben die krumme Linie $ag = bc$ bis an den Bogen cd, so ist ag die Krümmung des Zahnes über dem Theilrisse AR. Von A nach E und von E nach a' setze man die halbe Dicke des Zahnes, ziehe durch E und O die Gerade Fi, so ist Ei die Axe vom Obertheil des Zahnes, welche denselben in zwei gleiche und ähnliche Hälften theilet. Macht man nun den Theil $Ea'h$ der andern Hälfte Eag gleich, und gibt demselben bei i eine geringe willkührliche Wölbung, so ist der Obertheil $agha'$ fertig. Um den Körper des Zahnes zu bilden, nehme man EF etwas größer, als die halbe Dicke des Stockes, ziehe aus O durch F den Bogen GH und aus a und a' die Geraden aG, $a'H$, die im Mittelpunkte O zusammenlaufen, so bildet die Figur $Gagha'H$ die erforderliche Gestalt des Radzahnes.

527. Erklärung. Wenn am Umfange der Welle ein konzentrischer Ring ausgearbeitet ist, worin die Triebstöcke mit ihren

Digitized by Google

Enden an der Welle so befestigt werden, daß sie in gleichen Abständen unter sich in der Richtung der verlängerten Radien um die Welle gelagert erscheinen, so nennt man ein derlei Getriebe einen Kumpf. Wenn aber eine gerade Stange an der einen Seite mit Zähnen versehen ist, welche in ein gezähntes Rad oder in die Triebstöcke eines Kumpfes eingreifen, so heißt diese ein Zahnstock oder ein Kammbaum.

528. Aufgabe. Ein Kumpf wird von einem Stirnrade umgetrieben; man soll die vortheilhafteste Gestalt der Stäbe und Zähne für beide Räder angeben.

Auflösung. Die Zähne des Rades müssen nach einer Epicykloide gebildet werden, deren Grundkreis der Umfang des Rades ist, und deren Erzeugungskreis den Halbmesser des Getriebes zum Durchmesser hat; die Stäbe des Getriebes werden, so weit sie in Berührung mit den Zähnen kommen, geradlinig, so daß diese Berührungslinie verlängert durch den Mittelpunkt des Getriebes geht.

Beweis. Sei AO (Fig. 150) der Halbmesser des Rades, AC der Halbmesser des Getriebes, beide werden gezogen durch den Berührungspunkt A der Theilrisse RS, UV. Auf dem Umfange RS, als Grundkreis, beschreibe der Kreis $ADCQ$, dessen Durchmesser AC dem Halbmesser des Getriebes gleich ist, eine Epicykloide AM, und AE sei ein fester, unbiegsamer Triebstock, dessen Verlängerung das Getriebe im Mittelpunkte C schneidet. Wird nun der Bogen AM als Zahn des Rades mit dem Umfange RS desselben genau verbunden, und man bewegt das Rad von A nach B, so kommt der Zahn AM in die Lage BM', und der Stab AE in die Lage FG. Durch den Punkt D, wo die Epicykloide BM' den erzeugenden Kreis $ADCQ$ schneidet, ziehe man die Sehne AD, so ist solche eine Normale der Epicykloide im Punkte D. Es ist aber der Winkel ADC im Halbkreise ein rechter, daher CD auf AD senkrecht, folglich CD eine Tangente des Bogens BM' im Punkte D, daher muß auch der Stab FG, welcher mit dieser Tangente zusammenfällt, den Zahn BM' in D berühren. Nach (X. 1373) ist nun der Bogen $AD=AB$, und

nach (A. 1399) kann man die Gerade AC als eine Hypocykloide ansehen, deren Grundkreis der Theilriß UV und deren Erzeugungskreis der Kreis $ADCQ$ ist, folglich muß der Bogen AD dem Bogen AF gleich sein; es sind sonach die Kreisbögen AF, AB einander gleich, d. i. wenn der Radzahn den Weg AB zurücklegt, durchlauft der Triebstock AE den gleichen Weg AF, und beide bleiben in der Zwischenzeit stets mit einander in Berührung.

529. Anmerkung. Soll nun, um die Länge der Zähne nicht ohne Noth größer zu machen, jedesmal nur ein Zahn einen Stab fortschieben, so kann die Länge des Zahnes BM' um den Theil DM' verkürzt werden, weil in dem Augenblicke, wo der Punkt D des Zahnes BM' mit FG zusammenfällt, ein nachfolgender Zahn AM den Stab AE im Punkte A ergreift. Man kann also sämmtliche Zähne aus dem Mittelpunkte O mit der Weite OD wie bei Dd abschneiden, und wenn die Breite BH der Zähne gegeben ist, dieselben auch rückwärts durch den Bogen Hd, welcher dem Bogen BD gleich und ähnlich ist, begrenzen, wodurch die Gestalt $BDdH$ für den Obertheil eines Radzahns sich ergibt. Nach Abzug des Spielraums HI bleibt für die Breite der Stäbe die Weite AI übrig, deren Kopf man, damit die Stäbe nicht in die Oberfläche der Zähne einschneiden, nach einem Halbkreise wie bei K abrundet; nur muß alsdann auch der Raum LNN' zwischen zwei Zähnen so weit ausgeschnitten werden, daß die Stäbe freies Spiel behalten.

530. Aufgabe. Die kleinste Länge von dem Obertheil des Zahnes eines Stirnrades zu finden, welches die Stäbe eines Kumpfes bewegen soll, wenn die Halbmesser beider Räder und der zur Theilung gehörende Winkel am Mittelpunkte des Getriebes gegeben sind.

Auflösung. Sind R, r die Halbmesser der Räder und der Winkel $FCA = \beta$, so hat man für $Dk = l$

$$l = -R + \sqrt{[R^2 + r(2R + r)\sin^2\beta]}.$$

Beweis. Es ist $AD = r\sin\beta$, $OAD = ADC + DCA = \frac{1}{2}\pi + \beta$, also $\cos DAO = -\sin\beta$, und das Dreieck ODA gibt

$$(R+l)^2 = R^2 + r^2\sin^2\beta + 2Rr\sin^2\beta,$$

woraus l wie oben folgt.

531. Aufgabe. Die vortheilhafteste Gestalt der Zähne und Stäbe anzugeben, wenn ein Stirnrad von einem Kumpfe in Bewegung gesetzt wird.

Auflösung. Die Zähne des Kumpfes müssen nach einer Epicykloide gebildet werden, deren Grundkreis der Theilriß des Getriebes ist, und deren Erzeugungskreis den Halbmesser des Rades zum Durchmesser hat; dagegen sind die Radzähne nach geraden Linien auszuarbeiten, die im Mittelpunkte des Rades zusammenlaufen.

Beweis. Soll der Stab FG (Fig. 150), welcher den Radzahn im Punkte D berührt, denselben in Bewegung setzen, so müßte der Berührungspunkt allmählig von D nach F kommen, weil, wenn der Stab FG in die Lage AE versetzt ist, dann Stab und Radzahn sich im Punkte A berühren. Diese Bewegung ist aber keine wälzende, wie im Falle (528), sondern eine schleifende, wodurch die Reibung ansehnlich vermehrt, und Zahn und Stab sehr abgenützt werden. Um dieß zu vermeiden, muß man die Anordnung (528) umkehren, und nunmehr die Stäbe nach einer Epicykloide, die Zähne aber nach geraden Linien bilden. Es sei also AO (Fig. 152) der Halbmesser des Rades, AC der Halbmesser des Getriebes, CO die Mittelpunktslinie, und das Getriebe bewege das Rad von A nach R. Auf beiden Theilrissen werde von A nach B und von A nach F die Theilung der Zähne $AB = AF$ übertragen, und auf AS als Grundkreis mit dem Erzeugungskreise UAV, dessen Durchmesser AO dem Halbmesser des Rades gleich kommt, die Epicykloide BM beschrieben, so muß der Halbmesser OD die Kurve in D, wo sie den Erzeugungskreis schneidet, berühren. Die halbe Breite des Zahnes werde von B nach H und von H nach E gesetzt, durch H der Halbmesser CM gezogen, und der Bogen Ed dem Bogen BD gleich und ähnlich gemacht, so entsteht der Obertheil des Getriebzahnes. Die Zähne des Rades werden auf beiden Seiten nach geraden Linien gebildet, welche, wie OD, verlängert im Mittelpunkte O des Rades

Digitized by Google

treffen. Den Obertheil der Radzähne, so weit er über den Theilriß RR' fällt, kann man flach abrunden.

532. Aufgabe. Aus den Halbmessern des Rades und des Kumpfes und dem am Mittelpunkte des Rades zur Theilung gehörenden Winkel, die kleinste Länge des Getriebszahnes zu finden, wenn das Rad vom Kumpfe umgetrieben wird.

Auflösung. Sei $AO = R$, $CA = r$, $AOF = \alpha$, $Dk = l$, so hat man $l = -r + \sqrt{[r^2 + R(R + 2r)\sin^2\alpha]}$

Beweis. Es ist $AD = R\sin\alpha$, $CAD = {}^1/_2\pi + \alpha$, also $\cos CAD = -\sin\alpha$, daher folgt aus dem Dreiecke CAD

$$(r + l)^2 = r^2 + R^2\sin^2\alpha + 2Rr\sin^2\alpha,$$

und hieraus l wie oben.

533. Anmerkung. Da ein Zahnstock als der Bogen eines gezähnten Rades angesehen werden kann, dessen Halbmesser unendlich groß ist, und in diesem Falle die Epicykloide in eine gemeine Cykloide übergeht, so folgt aus (528, 531), daß wenn eine gezähnte Stange einen Kumpf bewegt, so erhält der Zahnstock Zähne, welche nach der gemeinen Cykloide begrenzt sind, der Kumpf hingegen Stäbe, die geradlinig zum Mittelpunkte des Getriebes laufen. Wird aber der Kammbaum durch einen Kumpf getrieben, so sind die Zähne des Getriebes cykloidalisch, und die Zähne der gezähnten Stange durch parallele gerade Linien begrenzt. Eytelwein setzt im zweiten Falle aus Gründen, die mir nicht einleuchten wollen, die Gestalt der Zähne nach einer Kreisevolvente (A. 1390) gebildet.

534. Anmerkung 2. Soll ein Stirnrad einen innerhalb des Rades befindlichen, mit cylindrischen Triebstöcken versehenen Trilling umtreiben, so kann die Anordnung auf folgende Weise getroffen werden. Seien die den verlangten Zähnezahlen entsprechenden Theilrisse RS (Fig. 153) für das Rad, und UV für den Trilling, O und C seien ihre Mittelpunkte und A ein Punkt des Theilrisses RS auf der Verlängerung der Geraden OC. Man nehme A als Mittelpunkt eines Triebstockes, und trage von A aus auf dem Theilrisse UV die Theilung ab, um dadurch

Digitized by Google

b, *d* als die Mittelpunkte der andern Triebstöcke zu bestimmen. Um jeden dieser Mittelpunkte beschreibe man mit dem vierten Theile einer Theilung, also mit dem Halbmesser eines Triebstockes, einen Kreis, deren jeder die Lage und Dicke eines Triebstockes bestimmt. Sodann trage man von *A* aus auf dem Theilrisse *RS* die ganze Theilung ab, wodurch sich die Punkte *B*, *D* als Mittelpunkte der Höhlungen der Zähne ergeben, so daß die um *A*, *B*, *D* mit dem Halbmesser des Triebstockes beschriebenen Kreise die Höhlungen des Rades bis an den Theilriß bestimmen. Zur Verzeichnung des Obertheiles der Radzähne halbire man die Bögen *AB*, *BD* in den Punkten *E*, *F*, die man mit dem Mittelpunkte *O* verbindet. Man denke sich nun den Theilriß *UV* innerhalb des Theilrisses *RS* gewälzt, so beschreibt der anfängliche Berührungspunkt *A* beider Kreise eine Hypocykloide *AM*, deren Verzeichnung nach (A. 1397) sich richten läßt. Diese Hypocykloide bestimmt nun die Abrundung der Zähne; da sie aber von *A* auslauft, so muß parallel zu ihr in der Entfernung *Aa* eine Kurve *am* konstruirt werden, bis sie den Radhalbmesser *EO* in *m* schneidet, und nach dieser Abrundung der einen Hälfte des Zahnes wird sodann die Abrundung der andern Hälfte desselben, so wie die Form eines jeden andern Zahnes am Rade gebildet. Für die praktische Anwendung fallen jedoch die Zähne zu spitzig aus, wodurch sie nicht nur an Haltbarkeit verlieren, sondern auch übermäßig tief in den Trilling eingreifen, weßhalb sie gewöhnlich nach dem Bogen *Gg* abgestumpft werden.

535. Anmerkung 3. Zwei Stirnräder können auch so zu einander angeordnet werden, daß das kleinere Rad innerhalb des größern liegt, wobei dann jenes seine Zähne an der gewölbten Oberfläche, dieses aber an der innern hohlen Seite des Radkranzes erhält: zugleich greifen beide Zähne so in einander, daß durch die Umdrehung des größeren Rades auch das kleinere mit bewegt wird. Sei *O* (Fig. 155) der Mittelpunkt des größeren, *C* der des kleineren Rades, die Theilrisse *RS*, *UV* beider Räder berühren sich im Punkte *A*. Von diesem Punkte aus trage man den vierten Theil einer Theilung auf den Theilriß *RS* nach *a* auf, so gibt *Aa* die halbe Zahnbreite, und der Punkt *a* ist die Mitte des

Zahnes auf dem Theilrisse: ferner übertrage man von a aus die halbe Theilung nach den Punkten b, c, d; so sind die Punkte a, c die Mitten der Zähne, und die Punkte b, d die Mitten der Höhlungen, und die gezogenen Halbmesser Oa, Oc bestimmen die Axen der Radzähne, in Beziehung auf welche ihre Obertheile symmetrisch gebildet sind. Indem nun vom Punkte A aus eben so auf dem Theilrisse UV die Punkte e, g als die Mitten der Zähne, und die Punkte f, h als die Mitten der Höhlungen für das kleinere Rad bestimmt werden, verbinde man diese auf dem Theilrisse UV erhaltenen Punkte mit dem Mittelpunkte C. Um die Abrundung der Zähne des größeren Rades zu bestimmen, denke man sich einen Kreis, dessen Durchmesser AC dem Halbmesser des Theilrisses UV gleich wäre, mit dem Theilrisse RS im Punkte A in Berührung, und wälze diesen Kreis an der innern hohlen Seite des Theilrisses RS, so beschreibt der Berührungspunkt A eine Hypocykloide AM, die von A bis zum Punkte M, wo sie den Radius Ca schneidet, die Abrundung der einen Hälfte des Zahnes bestimmt, welche Abrundung auch der anderen Hälfte zukommt; hiedurch ergibt sich die Gestalt des über dem Theilrisse RS gelegenen Obertheils vom Zahne, dessen Körper mit der Stirnfläche des Rades zusammenfällt. Um nun auch die Gestalt der Zähne am kleineren Rade zu bestimmen, beschreibe man aus O durch M einen Kreis, welcher die Gerade OA im Punkte o, und den Kreis, mit welchem die Hypocykloide durch Wälzung beschrieben wurde, in m und n schneidet; ferner beschreibe um C mit dem Halbmesser Co einen Kreis, so berührt dieser Kreis sämmtliche Höhlungen in ihren Scheiteln; die Abrundungen dieser Höhlungen sind aber Bögen einer verlängerten Hypocykloide, welche zum Vorschein kommt, wenn der Theilriß UV sich auf dem Theilrisse RS als Grundkreise wälzt, und dabei der Punkt o der beschreibende Punkt ist. Hiedurch wird aber nur die bogenförmige Krümmung der Höhlungen erhalten, welche durch gerade Linien, wie mp, nq eingefaßt sind. Bei diesen Rädern haben also die Zähne des kleinern Rades keine Abrundungen, sondern sie sind durch Höhlungen, Kreisbögen und gerade Linien begrenzt, während die Zähne des größeren Rades keine Höhlun-

Digitized by Google

gen besitzen, sondern durch Abrundungen begrenzt, und am Grunde der Zwischenräume bogenförmig ausgearbeitet sind.

536. Erklärung. Eine einfache Anwendung des Räderwerkes findet bei der Wagenwinde Statt. Hierunter versteht man eine Vorrichtung, welche dazu dient, bedeutende Lasten, z. B. einen beladenen Güterwagen, auf eine kleine Höhe zu erheben. Die Figur 142 stellt einen Längendurchschnitt derselben vor. *a* ist ein gezähntes Rad, welches mit der Kurbel *P* in Verbindung steht; es greift in ein Stirnrad *b* ein, an dessen Axe ein Kumpf *c* festsitzt, welcher wieder mit dem Zahnstocke *d* in Verbindung steht. Bei der Umdrehung des Rades vermittelst der Kurbel, wird das Rad *b* sammt dem Kumpfe *c* in Bewegung gesetzt, wodurch der Zahnstock *d* sammt der von der Gabel *e* angegriffenen Last gehoben wird.

537. Erklärung. Daumen sind in einigen Arten von Maschinen, z. B. in Oelmühlen, Pulvermühlen, Walkmühlen, Hammer- und Stampfwerken diejenigen abgerundeten Stücke, welche im Allgemeinen, aus wagerechten Wellen hervorragen und gebraucht werden, wenn Stämpfer oder ähnliche schwere Körper lothrecht in die Höhe gehoben werden, und hernach durch ihr eigenes Gewicht niederfallen sollen, sobald sie den Daumen verlassen. In der Figur 151 stellt der Kreis *ADGI* den Durchschnitt der horizontalen Welle, die um ihre Achse in *O* gedreht werden kann; *ABC*, *DEF*, *GH*, *IK* sind die Durchschnitte der mit der Welle fest verbundenen Hebedaumen; *LM* ist ein zwischen Scheidelatten vertikal beweglicher Balken, der Stämpfer, zu dessen Erhebung der Hebezapfen *NB* dient. Befindet sich der Stämpfer in seinem niedrigsten Stande, und man beschreibt mit dem Halbmesser *OB* einen Kreis, welcher den Hebezapfen in *B* berührt, so heißt derselbe der Theilriß. Wird nun die Welle so gedreht, daß der Berührungspunkt *B* des Daumens *ABC* den Hebezapfen *NB* aufwärts drückt, so steigt bei der Bewegung des Daumens der Stämpfer, bis er in die Lage *RF* kommt, wo ihn der Hebezapfen, der nun in die Lage *DEF* gebracht ist, verläßt, und der Stämpfer fällt zwischen den Scheidelatten frei herunter. Die

Digitized by Google

Höhe NA, bis zu welcher der Stämpfer gehoben wird, heißt der Hub. Während der Zeit, in welcher der Stämpfer fällt, und weil man denselben, wenn er seinen niedrigsten Stand erreicht, nicht augenblicklich wieder aufhebt, müßte die Kraft am Umfange der Welle ohne Wirkung bleiben, wenn nicht mit der Welle noch ein zweiter oder mehrere Stämpfer verbunden wären, damit im Augenblicke, wenn ein Daumen den Zapfen verläßt, ein anderer Daumen den Zapfen eines andern Stämpfers ergreift und so aufhebt, daß unter allen Umständen die erforderliche Kraft gleich groß bleibt.

538. Lehrsatz. Wenn die Abrundung der Hebedaumen eine Kreisevolvente ist, deren Grundkreis den Theilriß vorstellt, so ist die Kraft zur Erhebung der Daumen in allen ihren Lagen gleich groß.

Beweis. Seien die Abrundungen der Hebedaumen BC, EF ... Kreisevolventen, deren Grundkreis der Theilriß BB' wäre, so ist die Bogenlänge BE dem Hube BF gleich, weil, wenn der Daumen ABC in die Lage DEF kommt, alsdann die Kurve im Endpunkte F durch die Gerade RF noch berührt wird, und daher BF auf OB senkrecht steht; im Punkte S des Theilrisses wirke nach der Richtung der Tangente die Kraft P, welche zur Umdrehung der Welle erforderlich ist, und P' sei eine am Hebelsarme OF nach einer zu SP parallelen Richtung angebrachte Kraft, welche dieselbe Wirkung leistet, so hat man

$$\text{I. } P : P' = OF : OS$$

stellt man die Kraft P' durch die Gerade FU vor, und zerlegt sie durch Konstruktion des Kräfte-Parallelogrammes in die Seitenkräfte FV und FW, so wird die letztere durch die Festigkeit der Axe O aufgehoben, und die Wirkung der Kraft P' ist der durch die Gerade $FV = Q$ vorgestellten Kraft gleichgeltend; somit ist

$$\text{II. } P' : Q = FU : FV.$$

Wegen der ähnlichen Dreiecke FUV, FOB ist aber

$$FU : FV = BO : OF, \text{ daher } P' : Q = BO : OF$$

hält man diese Proportion gegen I., so folgt sogleich $P = Q$, d. i. die Kräfte P, Q, welche an dem Umfange des Theilrisses

Digitized by Google

in den Punkten S, B beziehungsweise wirken, um die Welle zu drehen, sind einander gleich.

539. Aufgabe. Wenn der Hub gegeben ist, auf welchen zwei Stämpfer mittelst der Daumenwelle gehoben werden, die Anordnung der Daumen anzugeben.

Auflösung. Sei der Hub $BF = h$, der Halbmesser des Theilrisses $OB = a$, und die Anzahl der Daumen für zwei Stämpfer $= n$, so ist der abgewickelte Bogen $Bm = h$, also der Umfang des Theilrisses $2a\pi = n \times Bm = nh$, und hieraus

$$a = \frac{nh}{2\pi} = 0.15915nh$$

wo n eine gerade Zahl bedeutet. Man ziehe eine horizontale Gerade ON, beschreibe aus O mit dem Halbmesser a den Kreis BB', errichte in B die Gerade $BF = h$ senkrecht zu OB, befestige am Umfange einer kreisförmigen Scheibe vom Halbmesser a einen Faden von der Länge a, und beschreibe durch Abwicklung des Fadens nach (A. 1392) die Kreisevolvente mF, so ist diese die Abrundung der Daumen. Der Halbmesser OA der Welle ist willkührlich, allein jedesmal kleiner als a. Auf BF nehme man FF' willkührlich, etwa $\frac{1}{4}h$, ziehe $D'F'$ zum Mittelpunkte O hin, trage von D' nach D die Breite der Daumen FF', und verbinde die Punkte D, m durch einen willkührlichen Bogen, welcher im Punkte m mit der Kurve mF eine gemeinschaftliche Tangente hätte, so ist $D'DmEF$ die Lehre für die Daumen, und wenn man die Weite OF von O nach X trägt, so ist BX die kleinste Länge des Hebezapfens, welcher noch um den Spielraum NX vergrößert wird. Heißt noch die Länge der Daumen $OF = l$, so hat man sofort $l = \sqrt{(a^2 + h^2)} = h\sqrt{(1 + 0.025329n^2)}$.

540. Anmerkung. Um die Abnützung des Endes B am Hebezapfen zu vermeiden, pflegt man in B eine metallene Rolle anzubringen, welche sich um einen eisernen Bolzen dreht; in diesem Falle bleibt die Anordnung dieselbe, nur daß dann die Abrundung der Daumen durch eine Kurve bc begrenzt ist, welche man erhält, wenn man mit dem Halbmesser der Rolle aus verschiedenen

Digitized by Google

Punkten gegen die hohle Seite der Kurve *BC* Kreisbögen beschreibt, und durch die äußersten Enden derselben eine Parallele *bc* zieht.

541. Anmerkung 2. Die schicklichste Gestalt der Zähne eines Rades hat zuerst Römer, ein dänischer Astronom, angegeben. Nach ihm haben sich *de la Hire*, *Camus*, Euler und Kästner mit diesem Gegenstande beschäftigt. Die gründlichste Darstellung über gezähnte Räder, Gestalt der Daumen, die Kraft zur Erhebung des Stämpfers mit Rücksicht auf die Reibung u. a. M. findet man in Eytelweins e. a. Statik, Band I. Kap. 10.

VIII. Schiefe Ebene, Keil, Schraube.

542. Erklärung. Jede feste und unbiegsame Ebene, welche gegen eine horizontale Ebene unter irgend einem spitzigen Winkel geneigt ist, nennt man eine schiefe Ebene. Schneidet man beide Ebenen mit einer vertikalen Ebene, welche mit der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie derselben parallel lauft, und nebstbei durch eine andere vertikale Ebene, welche auf der Durchschnittslinie der beiden erstern senkrecht steht, so ergibt sich als Durchschnitt der ersteren drei Ebenen mit dieser ein rechtwinkliges Dreieck *ACB* (Fig. 156), dessen Hypothenuse die Länge, die Kathete *BC* die Grundlinie, und die andere Kathete *AB* die Höhe der schiefen Ebene heißt. Der spitzige Winkel bei *C* ist nach (A. 1411) der Neigungswinkel der schiefen Ebene.

543. Aufgabe. Die Kraft zu finden, welche nach einer gegebenen Richtung wirkend der auf der schiefen Ebene aufgestellten Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Sind α, β die Winkel, welche die Richtung der Schwere und die Richtung der Kraft P mit der Länge der schiefen Ebene einschließen, so hat man

$$P = \frac{Q(\cos\alpha \pm \mu\sin\alpha)}{\cos\beta \mp \mu\sin\beta}$$

wo die obern Zeichen zu nehmen sind, wenn die Kraft die Last

erheben soll; die untern Zeichen hingegen, wenn sie ein Herabgleiten der Last auf der schiefen Ebene zu verhindern hat.

Beweis. Sei der Richtungswinkel der im Schwerpunkte G gedachten Last $GDF = \alpha$, jener der Kraft $GFD = \beta$: man zerlege die Kräfte P, Q jede in zwei Seitenkräfte, deren eine zur Länge der schiefen Ebene parallel, die andere darauf senkrecht ist; so sind die erstern Kräfte $P\cos\beta$ und $Q\cos\alpha$, die letztern Kräfte $P\sin\beta$ und $Q\sin\alpha$. Im Zustande des Gleichgewichts ist nun $P\cos\beta = Q\cos\alpha$, und der auf die schiefe Ebene senkrechte Druck $GE = P\sin\beta + Q\sin\alpha$, somit die Reibung $\mu(P\sin\beta + Q\sin\alpha)$. Soll also die Kraft die Last sammt der Reibung überwältigen, so ist $P\cos\beta = Q\cos\alpha \pm \mu(P\sin\beta + Q\sin\alpha)$, woraus sich durch Zusammenstellung der beiden Glieder, in welchen P vorkommt, $P(\cos\beta \mp \mu\sin\beta) = Q(\cos\alpha \pm \mu\sin\alpha)$, und hiemit der obige Werth von P ergibt.

544. Folgesatz. Wirkt die Kraft P horizontal, dann ist $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, also $\cos\beta = \sin\alpha$; dieß gibt, wenn man Zähler und Nenner mit $\cos\alpha$ dividirt,

$$\text{I.} \quad P = \frac{Q(1 \pm \mu\,\mathrm{tg}\alpha)}{\mathrm{tg}\alpha \mp \mu}$$

Ist hingegen die Kraft zur Länge der schiefen Ebene parallel, so wird $\beta = 0$, und

$$\text{II.} \quad P = Q(\cos\alpha \pm \mu\sin\alpha).$$

545. Folgesatz 2. Differentiirt man aber den Ausdruck für die Kraft P in (543) hinsichtlich der veränderlichen Größe β, so läßt sich derjenige Werth von β finden, für welchen die Kraft P ein Kleinstes wird. Man findet so

$$\mathrm{tg}\beta = \pm\mu, \text{ und } P = \frac{Q(\cos\alpha \pm \mu\sin\alpha)}{\sqrt{(1+\mu^2)}}$$

es wirkt also die Kraft an einer schiefen Ebene am vortheilhaftesten, wenn die Tangente ihres Richtungswinkels dem Reibungskoeffizienten gleich kommt.

546. Folgesatz 3. Abgesehen von der Reibung, oder wenn

$\mu = 0$ gesetzt wird, folgt aus (544 I.) $P \operatorname{tg}\alpha = Q$, oder $P : Q = 1 : \operatorname{tg}\alpha$, und wenn $\beta = 0$ ist, aus (544 II.) $P = Q\cos\alpha$ oder $P : Q = \cos\alpha : 1$. Es ist aber $CDF = \alpha = CAB$, und $1 : \operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha : \sin\alpha$; setzt man also die Länge der schiefen Ebene $AC = l$, die Grundlinie $BC = b$, die Höhe $AB = h$, so ist im Dreiecke ACB, $\cos\alpha : \sin\alpha = h : b$, und $\cos\alpha : 1 = h : l$; demnach ist im ersten Falle, wo $\beta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ war, $P : Q = h : b$, und im andern Falle, wo $\beta = 0$, $P : Q = h : l$, d. i. wirkt die Kraft horizontal, so verhält sich die Kraft zur Last, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Grundlinie; wirkt sie hingegen mit der Länge der schiefen Ebene parallel, so verhält sich die Kraft zur Last, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

547. Erklärung. Ein prismatischer Körper $ABCabc$ (Fig. 157), dessen Querschnitt ein Dreieck ist, und welcher mit seiner Kante Cc zwischen zwei Widerstand leistende Körper geschoben und gedrängt wird, damit er sie auseinander treibe oder spalte, wird Keil genannt. Jenachdem der Querschnitt ein gleichschenkliges oder ungleichseitiges Dreieck ist, heißt der Keil gleichschenkelig oder ungleichseitig. Die Kante Cc, mit welcher der Keil eindringt, heißt die Schneide, die beiden in der Schneide zusammenstoßenden Flächen heißen die Seiten, die der Schneide gegenüberliegende Fläche der Rücken, und der Abstand der Schneide vom Rücken des Keiles wird die Länge desselben genannt.

548. Aufgabe. Ein gleichschenkliger Keil ABC wird in die Spalte eines festen Körpers $EHGF$ mit irgend einer Kraft getrieben; man fragt nach der Größe derselben, wenn der Widerstand des Körpers gegeben ist.

Auflösung. Sei N der gegebene Widerstand, welcher zu beiden Seiten des Keils senkrecht auf dieselben nach den Richtungen OI, OK sich äußert, und der Winkel $ACB = 2\alpha$, so hat man

$$P = 2N(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Beweis. Wird der Widerstand N beiderseits des Keils durch die einander gleichen Geraden OI, OK vorgestellt, und man ver-

Digitized by Google

zeichnet das Kräfte-Parallelogramm $OILK$, so bezeichnet die Diagonale OL die Größe und Richtung der Resultirenden; nun ist $OILK$ ein Rhombus, in welchem die sich im Punkte M halbirenden Diagonalen IK, OL unter einem rechten Winkel schneiden; man hat also $OM = OK\cos KOM = N\sin\alpha$, also $OL = 2N\sin\alpha$. Ferner ist die von der Pressung N hervorgebrachte Reibung μN nach den Richtungen kA, iB thätig, und erzeugt, auf den Punkt C versetzt, nach der Richtung CO einen Widerstand, dessen Größe $2\mu N\cos\alpha$ ist; man hat daher

$$P = 2N(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

549. Folgesatz. Ohne Rücksicht auf Reibung hat man, $\mu=0$ setzend, $P = 2N\sin\alpha$, oder $P : 2N = \sin\alpha : 1 = AD : AC$, d. i. die Kraft verhält sich zum Widerstande, wie der Rücken des Keils zur doppelten Seite desselben.

550. Anmerkung. Die theoretische Bestimmung der Kraft am Keile läßt sich auf die praktische Anwendung mit sehr wenig Genauigkeit übertragen, weil die zum Eintreiben des Keils angewandte Kraft gewöhnlich stoßweise wirkt, und auch die Widerstände beiderseits des Keils, je nach Beschaffenheit des zu spaltenden Körpers gar verschieden sein können, und keiner genauern Bestimmung fähig sind. Man benützt den Keil zum Spalten des Holzes, der Steine und anderer Massen. Alle Arten Messer und Stichwerkzeuge, als: Schneidemesser, Scheren, Meißel, eben so die Nägel, Pflöcke und Pfriemen sind Keile, bei denen das Verhältniß des Rückens zur Länge des Keiles, je nach Verschiedenheit der Zwecke des Gebrauches, mannichfaltig ist. In manchen Fällen hängt die praktische Brauchbarkeit des Keils von der Reibung ab, die zwischen den Seitenflächen und der aus einander getriebenen Masse Statt hat, wie dieses z. B. der Fall ist, wenn Nägel oder Pflöcke zur Verbindung einzelner Theile gebraucht werden, oder wenn durch einen Keil die Spaltung eines Körpers beabsichtigt wird; denn da die Kraft gewöhnlich in auf einander folgenden Schlägen wirkt, und also fortwährend gewissen Unterbrechungen ausgesetzt ist, so würde ohne vorhandener Reibung in der Zwischenzeit, worin die Schläge erfolgen, der Keil aus dem Körper herausgedrückt.

Digitized by Google

551. Erklärung. Wird ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. 158), welches den Winkel $CAB = \alpha$ hat, um einen senkrechten Cylinder $abcd$ dergestalt gewickelt, daß der Punkt A über a, der Punkt B der Hypothenuse über r, und eben so die Punkte QPC über q, p, c beziehungsweise fallen, hiebei aber die Kathete BC der Axe ef des Cylinders stets parallel bleibt, so bildet die Hypothenuse AC auf dem Cylindermantel eine Kurve $arqpc$ mit doppelter Krümmung, welche man die Schraubenlinie nennt. Diese wird von einer bestimmten Seite bd des Cylinders in mehreren Punkten r, q, p geschnitten, jeder Theil der Schraubenlinie wie $rmnq$, dessen beide Enden zwischen zwei dieser unmittelbar auf einander folgenden Punkte fallen, heißt ein Schraubengang, und der Abstand rq seiner Endpunkte die Höhe eines Schraubenganges. Wird auf dem Cylinder in der Richtung der Schraubenlinie eine rippenartige Erhöhung angebracht, so heißt der Cylinder eine Schraubenspindel, und seine Hervorragungen das Schraubengewinde. Der Querschnitt dieser Schraubengewinde durch Ebenen, welche durch die Axe der Spindel gehen, sind manchmal Dreiecke, scharfe Schrauben, manchmal Vierecke, stumpfe Schrauben. Die Schraubenspindel hat einen äußeren und einen inneren Halbmesser, welche beide um die Dicke (in der Richtung der Axe) des Schraubengewindes verschieden sind. Wenn schlechtweg vom Halbmesser der Spindel gesprochen wird, so wird immer das arithmetische Mittel zwischen diesen beiden, welches man den mittlern Halbmesser nennt, verstanden. Eine Schraubenmutter ist ein ausgehöhlter Cylinder mit Schraubengängen, in welche die Schraubengänge der Spindel genau passen. Spindel und Mutter bilden zusammen eine Vorrichtung, welche man die Schraube nennt.

552. Anmerkung. In der praktischen Ausführung wird jedoch nicht immer an der Schraubenspindel das Gewinde aufgesetzt, sondern es wird vielmehr öfters von der äußeren cylindrischen Fläche so viel Material ausgearbeitet, als erforderlich ist, damit das Schraubengewinde entsteht. Zu bestimmten Zwecken gibt es rechte und linke Schrauben, je nachdem die Schraubengänge rechts oder links um den Cylinder gewunden sind, ferner

Digitized by Google

einfache, doppelte, dreifache Schrauben, wenn um die Schraubenlinie entweder bloß eine einfache Rippe, oder aber zwei, drei Rippen, die parallel mit einander fortlaufen, gewunden werden. Einige Schraubenspindeln mit den dazu gehörigen Schraubenmuttern sind in der Figur 159 dargestellt.

553. Aufgabe. Aus dem Hebelsarme der Kraft, dem Halbmesser der Spindel und der Höhe der Schraubengänge die Kraft zu bestimmen, welche der Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Heißt R der Hebelsarm der Kraft, r der Halbmesser der Spindel, h die Höhe eines Schraubenganges, so hat man die Kraft P, welche mit der Last Q sammt der Reibung im Gleichgewichte sich befindet, nach der Formel

$$P = \frac{Qr(h \pm 2\mu r\pi)}{R(2r\pi \mp h\mu)}$$

Beweis. Bei der Anwendung der Schraube zum Heben einer Last oder zur Ausübung eines Druckes ist gewöhnlich die Schraubenmutter befestigt, während die Schraubenspindel mittelst eines durch ihren Kopf gesteckten Hebels um ihre Axe gedreht wird, und dabei sammt der an ihrer untern Fläche befestigten Last bei jeder vollen Drehung um die Höhe eines Schraubenganges steigt oder sinkt. Nehmen wir vorerst an, die Kraft wirke an der Peripherie der Spindel, und es werde die Spindel um ihre Axe gedreht; so hat die Kraft einen Widerstand zu überwinden, welcher als eine Last zu betrachten ist, die auf der schiefen Ebene nach einer zur Grundlinie AB parallelen Richtung gehoben werden soll: denn offenbar ist es für die Kraft gleichgeltend, ob sie die Last Q auf der schiefen Ebene ABC (Fig. 158) erhalten soll, oder aber, damit die Last Q nicht sinkt, dieselbe Ebene in der angegebenen Richtung unter die Last zu schieben hätte. Nun ist in diesem Falle nach (544 II.)

$$P = \frac{Q(1 \pm \mu \operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha \mp \mu}$$

Digitized by Google

und weil die Kraft am Hebelsarme R wirken soll, so ist dieser Ausdruck in dem Verhältnisse der Hebelsarme R, r zu theilen; es wird also

$$P = \frac{rQ}{R} \cdot \frac{(1 \pm \mu \operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha \mp \mu}$$

substituirt man hierin statt $\operatorname{tg}\alpha$ dessen Werth, d. i. den Quotienten aus der Grundlinie der schiefen Ebene, getheilt durch ihre Höhe, da die Grundlinie nach (551) die Peripherie der Spindel $2r\pi$, und die Höhe der schiefen Ebene die Höhe h eines Schraubenganges ist, so erhält man sofort für P den obigen Ausdruck.

554. Folgesatz. Wird von der Reibung abgesehen, also $\mu = 0$ gesetzt, so ergibt sich

$$2PR\pi = Qh, \text{ oder } P : Q = h : 2R\pi$$

d. i. Kraft und Last verhalten sich wie die Höhe eines Schraubenganges zur Peripherie des von dem Angriffspunkte der Kraft beschriebenen Kreises.

555. Erklärung. Eine einfache Presse besteht aus dem Gestelle *abcd* (Fig. 160) von Eisen oder, bei größern Abmessungen, von Holz, welches einen festen Rahmen bildet, der im obern Querstücke *ad* bei *h* mit einer Schraubenmutter versehen ist, um die Spindel *ig* aufzunehmen. Diese Spindel ist am untern Theile *g* mit einem im Rahmen auf und ab beweglichen Preßbrete *ef* verbunden, und kann durch den am obern Ende in *i* befestigten Hebel *mn* gedreht werden, wobei sie im Querstücke *ad* abwärts bewegt wird, und hiemit das Preßbret gegen den im Raume *bcfe* untergebrachten zu pressenden Gegenstand einen Druck ausübt, dessen Werth aus (553) bekannt ist. Ist z. B. $R = 24''$, $h = 1''$, $P = 50$ Pfd., so findet man, ohne Rücksicht auf Reibung, $Q = 7536$ Pfd.: setzt man aber überdieß $r = 3''$, $\mu = 1/10$, so ergibt sich $Q = 2599$ Pfd. Man ersieht aus diesem Beispiele, welch einen großen Einfluß die Reibung bei einer Presse ausübt.

556. Erklärung. Eine Gegenpresse, nach ihrer Analogie mit der Gegenwinde benannt, besteht aus einer Spindel *ab* (Fig. 161), welche mit zwei verschiedenen und entgegengesetzten Gewinden bei *c* und *d* versehen ist, die zwar eine beliebige Dicke und

Digitized by Google

Größe erhalten können, aber die Höhen beider Schraubengänge sind nur wenig von einander verschieden, wodurch erzielt wird, daß dieselbe Drehung der Spindel, welche den Theil c in der im Querstücke ef befindlichen Mutter hinabsenkt, auch zugleich die im Querstücke kk vorhandene Mutter sammt der an dasselbe angehängten Preßplatte b erhebt. Da nun die Gewinde bei c eine größere Höhe als bei d besitzen, so erfolgt bei jeder vollen Umdrehung der Spindel eine Senkung der Preßplatte b, welche dem Unterschiede der Höhen beider Schraubengänge gleich kommt. Wird also im untersten Raume ll des Rahmens $fegh$ der zu pressende Gegenstand eingelegt, so wird er einem Drucke ausgesetzt, wie bei einer einfachen Presse, deren Gewinde den Unterschied der Höhen beider Schraubengänge zur Höhe hätte.

557. Erklärung. Eine Schraube ohne Ende heißt die Verbindung eines Wellrades mit einer Schraubenspindel. Sei AB (Fig. 162) eine in festen Lagern aufliegende Welle, welche mittelst der Kurbel C um ihre Axe gedreht werden kann; bei D befinden sich drei Schraubengänge, die in das gezähnte Rad R eingreifen, an dessen Welle eine Last Q aufgehängt ist. Beim Eingriffe in die Gewinde wird das gezähnte Rad, dessen Zähne auf der Radfläche schräg gestellt sind, von Zahn zu Zahn weiter bewegt, wobei die Zähne des Rades die Stelle der Schraubengewinde einer Schraubenmutter vertreten.

558. Lehrsatz. Es verhält sich bei der Schraube ohne Ende für den Zustand des Gleichgewichts die Kraft zur Last, wie das Produkt aus dem Halbmesser der Welle und der Höhe des Schraubenganges zum Produkte aus dem Halbmesser des Rades und der Peripherie des Kreises, den die Kraft am Angriffspunkte der Kurbel bei der Drehung zu beschreiben hat.

Beweis. Ohne Rücksicht auf die Reibung ist, wenn man den Widerstand, welchen die Zähne des Rades bei der Umdrehung der Spindel erleiden, mit x bezeichnet, nach (496) I. $Rx = Qr$. Wirkt aber die Kraft P an der Kurbel, deren Länge $BC = a$, deren Schraubengänge aber die Höhe h besitzen, um die Spindel D zu drehen, so ist nach (554) II. $2Pan = hx$, und das Produkt

Digitized by Google

dieſer zwei Gleichungen gibt nach Hinweglaſſung des Faktors x

III. $2PRa\pi = hQr$, oder $P : Q = hr : R \times 2a\pi$.

559. Erklärung. Eine Anwendung der Schraube findet bei der franzöſiſchen Wagenwinde Statt. Die Spindel ab (Figur 163 a) greift in das Rad cd, deſſen Ebene horizontal gedacht werden muß, wie in (Fig. 163 b), und welches mit ſeiner Unterlage ef, worin die Schraubenmutter für die vertikale Schraube gh eingeſchnitten, feſt verbunden iſt. Durch die Bewegung der Schraube ohne Ende wird das Stirnrad cd und die Schraubenmutter ef herumgeführt, und dadurch zugleich die Spindel gh ſammt den Anſätzen h und ik gehoben. Die Laſt wird entweder oben bei h oder unten bei ik aufgelegt.

IX. Prinzip der virtuellen Geſchwindigkeiten.

560. Erklärung. Wird ein von mehreren Kräften angegriffener materieller Punkt in Folge der Wirkung dieſer Kräfte nach Verfluß einer zur Einheit genommenen Zeit in einen andern Punkt verſetzt, ſo heißt der zurückgelegte Weg s die Geſchwindigkeit dieſes Punktes; projizirt man dieſen Weg s auf die Richtungen einzelner Kräfte, indem man aus dem Endpunkte der Geraden s Perpendikel auf dieſe Richtungen fällt, ſo ſchneiden dieſelben auf den Richtungen der Kräfte, oder aber auf ihren Verlängerungen Linien ab, welche die virtuellen Geſchwindigkeiten der angebrachten Kräfte genannt werden.

Wenn alſo die auf den materiellen Punkt A (Fig. 165) nach den Richtungen AB, AC, AD, AE wirkenden Kräfte P, Q, R, S gegeben ſind, und es wird der Angriffspunkt A nach a verſetzt, ſo ſind die Projektionen der Geſchwindigkeit $Aa = s$, auf die Richtungen der Kräfte, nämlich Ab, Ac, Ad, Ae, die man erhält, indem aus dem Punkte a die Perpendikel ab, ac, ad, ae gefällt werden, die virtuellen Geſchwindigkeiten der Kräfte P, Q, R, S; ihre Vorzeichen ſind poſitiv oder negativ, je nachdem ſie auf die Richtungen der Kräfte, oder aber auf ihre Verlängerungen fallen.

Digitized by Google

561. Erklärung. Das Produkt einer Kraft in ihre virtuelle Geschwindigkeit, nennt man ihr dynamisches Moment, und der Satz: „daß die algebraische Summe der dynamischen Momente sämmtlicher Kräfte im Zustande des Gleichgewichtes null sei", heißt das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

562. Aufgabe. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten für drei Kräfte an einem Angriffspunkte zu erweisen.

Auflösung. Es wirke die Kraft P nach AB (Fig. 166), die Kraft Q nach AC, die Kraft R nach AE, und die genannten Kräfte mögen durch diese Geraden vorgestellt werden. Verzeichnet man aus den zwei erstern Kräften das Parallelogramm $ABCD$, zieht die Diagonale AD, so muß im Zustande des Gleichgewichts der Kräfte P, Q, R, die Kraft AE der Kraft AD gleich und entgegengesetzt sein. Wird nun der Punkt A nach a versetzt, und die Perpendikel ab, ac, ad gezogen, so sind Ab, Ac, Ad die virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte P, Q, R, und man hat zu erweisen, daß $P \cdot Ab + Q \cdot Ac - R \cdot Ad = 0$ sei. Man setze die Winkel $BAD = \alpha$, $CAD = \beta$, $DAa = \theta$, und ziehe die Perpendikel BF, CG, so ist bekanntlich $BF = CG$ und $AD = AF + AG$; allein $BF = P\sin\alpha$, $CG = Q\sin\beta$, $AF = P\cos\alpha$, $AG = Q\cos\beta$; daher hat man

I. $R = P\cos\alpha + Q\cos\beta$, und II. $Q\sin\beta - P\sin\alpha = 0$.

Multiplizirt man die erste Gleichung mit $\cos\theta$, die zweite mit $\sin\theta$, so gibt die Summe der Produkte

$$R\cos\theta = P(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta) + Q(\cos\beta\cos\theta + \sin\beta\sin\theta), \text{ d. i.}$$

$$\text{III. } R\cos\theta = P\cos(\alpha + \theta) + Q\cos(\beta - \theta)$$

multiplizirt man nun diese Gleichung mit $Aa = s$, und bemerkt daß $s \cdot \cos\theta = Ad$, $s \cdot \cos(\alpha + \theta) = Ab$, $s \cdot \cos(\beta - \theta) = Ac$ sei, so folgt aus III. sogleich die Richtigkeit des Satzes.

563. Aufgabe. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten für eine beliebige Anzahl gegebener Kräfte, die nach gleichfalls gegebenen Richtungen an einem Angriffspunkte im Raume wirken, zu erweisen.

Digitized by Google

Auflösung. Betrachten wir vorerst eine der Kräfte P, P_1, $P_2 \ldots$, welche auf einen Punkt A im Raume wirken, dessen rechtwinklige Koordinaten in Bezug auf einen im Raume gewählten Anfangspunkt x, y, z sind, und zwar es wirke die Kraft P nach einer Richtung, welche durch die Winkel α, β, γ angedeutet wird, die sie mit den Koordinatenaxen einschließt; sei s ihre virtuelle Geschwindigkeit, und a, b, c die Koordinaten ihres Endpunktes, so hat man (A. 1548)

$$s = \sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}, \text{ und}$$

$$\text{I.} \quad \left(\frac{ds}{dx}\right) = \frac{x-a}{s}, \quad \left(\frac{ds}{dy}\right) = \frac{y-b}{s}, \quad \left(\frac{ds}{dz}\right) = \frac{z-c}{s}$$

Zerlegt man die Kraft P in die den Axen parallelen Seitenkräfte $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$, so sind, weil nach (A. 1548)

$$\cos\alpha = \frac{x-a}{s}, \; \cos\beta = \frac{y-b}{s}, \; \cos\gamma = \frac{z-c}{s}$$

ist, vermöge der Ausdrücke I. jene Seitenkräfte

$$\text{II.} \quad P\left(\frac{ds}{dx}\right), \; P\left(\frac{ds}{dy}\right), \; P\left(\frac{ds}{dz}\right)$$

Auf gleiche Weise zerfällt die Kraft P_1, deren virtuelle Geschwindigkeit s_1 heißen mag, in die Seitenkräfte

$$P_1\left(\frac{ds_1}{dx}\right), \; P_1\left(\frac{ds_1}{dy}\right), \; P_1\left(\frac{ds_1}{dz}\right)$$

welche den drei Axen parallel laufen, und eben so die Kraft P_2 in die Seitenkräfte

$$P_2\left(\frac{ds_2}{dx}\right), \; P_2\left(\frac{ds_2}{dy}\right), \; P_2\left(\frac{ds_2}{dz}\right)$$

u. s. w. von den übrigen Kräften, welche am Angriffspunkte A wirken.

Bezeichnet man nun mit X, Y, Z die Resultirenden sämmtlicher den einzelnen Axen parallelen Kräfte, so hat man

Digitized by Google

$$\text{III.}\quad \begin{cases} X = P\left(\frac{ds}{dx}\right) + P_1\left(\frac{ds_1}{dx}\right) + P_2\left(\frac{ds_2}{dx}\right) + \ldots \\ Y = P\left(\frac{ds}{dy}\right) + P_1\left(\frac{ds_1}{dy}\right) + P_2\left(\frac{ds_2}{dy}\right) + \ldots \\ Z = P\left(\frac{ds}{dz}\right) + P_1\left(\frac{ds_1}{dz}\right) + P_2\left(\frac{ds_2}{dz}\right) + \ldots \end{cases}$$

Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit dx, die zweite mit dy, die letzte mit dz, und nimmt die Summe dieser Produkte, so erhält man, weil nach (A. 999)

$$ds = \left(\frac{ds}{dx}\right)dx + \left(\frac{ds}{dy}\right)dy + \left(\frac{ds}{dz}\right)dz \text{ ist}$$

$$\text{IV.}\quad Xdx + Ydy + Zdz = Pds + P_1ds_1 + P_2ds_2 + \ldots$$

Es ist aber die Resultirende R der drei unter rechten Winkeln thätigen Kräfte X, Y, Z

$$R = \sqrt{(X^2 + Y^2 + Z^2)}$$

und wenn die Kräfte P, P_1, P_2, P_3 ... am Angriffspunkte A im Gleichgewichte stehen, so ist $R = 0$, also $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, d. i. man hat aus IV.

$$Pds + P_1ds_1 + P_2ds_2 + P_3ds_3 + \ldots = 0$$

564. Anmerkung. Die virtuelle Geschwindigkeit einer Kraft bei einem von mehreren Kräften angegriffenen Punkte hat keinen absoluten Werth, sondern hängt von der Größe des Raumes Aa (Fig. 165) ab, um welchen der Angriffspunkt A versetzt wird. Ist Aa eine endliche Größe, so sind es auch die virtuellen Geschwindigkeiten s, s_1, s_2 ..., ist aber Aa unendlich klein, so sind es auch diese. Der vorstehende Beweis beschränkt sich aber keineswegs auf den Fall, wenn Aa unendlich klein ist; denn werden die endlichen Aenderungen der Größen s, x, y, z mit Δs, Δx, Δy, Δz bezeichnet, so hat man auch für die partiellen Differenzen der Größe s die Ausdrücke:

$$\frac{x-a}{s}\cdot\Delta x,\ \frac{y-b}{s}\cdot\Delta y,\ \frac{z-c}{s}\cdot\Delta z, \text{ daher}$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right) = \frac{x-a}{s}, \quad \left(\frac{\Delta s}{\Delta y}\right) = \frac{y-b}{s}, \quad \frac{\Delta s}{\Delta z} = \frac{z-c}{s}$$

woraus sofort wie vorhin die Gleichung

$$P\Delta s + P_1\Delta s_1 + P_2\Delta s_2 + P_3\Delta s_3 + \ldots = 0$$

leicht gefolgert werden kann.

565. Aufgabe. Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten für den Fall mehrerer Angriffspunkte zu erweisen.

Auflösung. Seien drei Punkte A, B, C . . . (Figur 167), welche so mit einander verbunden sind, daß die Einwirkung einer Kraft P auf den Punkt A ganz oder theilweise auf die andern Punkte B, C übertragen wird; man vereinige diese Punkte durch die Geraden AB, AC, BC, welche bei einem starren Körper als feste, bei jedem andern Körper aber als Linien gedacht werden, deren Längen sich ändern können; es wirke die Kraft P auf den Punkt A nach der Richtung AP, die Kraft Q auf B nach BQ, die Kraft R auf C nach CR; seien $AB=a$, $AC=b$, $BC=c$ die Längen, und s, t, u die Spannungen dieser Linien, welche in Folge der Einwirkung der Kräfte P, Q, R bei diesen Geraden zum Vorschein kommen, so sind auf jeden dieser Punkte A, B, C drei Kräfte thätig, und zwar

$$\text{auf dem Punkte } \left\{\begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix}\right\} \text{ die Kräfte } \left\{\begin{matrix} P,\ s,\ t \\ Q,\ s,\ u \\ R,\ t,\ u \end{matrix}\right.$$

Erleidet das System eine unendlich kleine Bewegung, so seien die virtuellen Geschwindigkeiten

$$\text{der Kraft } P \text{ nach den Richtungen } \left\{\begin{matrix} AP \\ AB \\ AC \end{matrix}\right\} \text{ gleich } \left\{\begin{matrix} dp \\ da \\ db \end{matrix}\right.$$

$$\text{der Kraft } Q \text{ nach den Richtungen } \left\{\begin{matrix} BQ \\ BA \\ BC \end{matrix}\right\} \text{ gleich } \left\{\begin{matrix} dq \\ da' \\ dc \end{matrix}\right.$$

$$\text{der Kraft } R \text{ nach den Richtungen } \left\{\begin{matrix} CR \\ CA \\ CB \end{matrix}\right\} \text{ gleich } \left\{\begin{matrix} dr \\ db' \\ dc' \end{matrix}\right.$$

Digitized by Google

es ist aber einleuchtend, daß die Kräfte an jedem der drei Punkte A, B, C für sich im Gleichgewichte stehen, weil die Einwirkung der übrigen Kräfte auf denselben durch die Spannungen s, t, u bereits vorgestellt ist; man hat also nach (562)

$$Pdp + sda + tdb = 0$$
$$Qdq + sda' + udc = 0$$
$$Rdr + tdb' + udc' = 0$$

die Summe dieser Gleichungen liefert nun

I. $Pdp + Qdq + Rdr + s(da + da') + t(db + db') + u(dc + dc') = 0$.

Das Gleichgewicht der Kräfte an diesen drei Punkten wird aber nicht gestört, wenn man die Kräfte P, Q, R entfernt, und statt derselben die Spannungen s, t, u in entgegengesetzter Richtung an ihnen anbringt, welches darauf hinauslauft, daß man in der Gleichung I. $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ und s, t, u sämmtlich negativ setzt; dieß gibt

II. $-s(da + da') - t(db + db') - u(dc + dc') = 0$

und durch die Addition der Gleichungen I. und II. erhält man

III. $Pdp + Qdq + Rdr = 0$.

Begreiflich kann derselbe Beweis auf eine beliebige Anzahl von Angriffspunkten ausgedehnt werden, wie es z. B. Grunert in dem oben (375) citirten Werke, und A. von Ettingshausen im zweiten Bande der Vorlesungen über die höhere Mathematik gethan haben.

566. Folgesatz. Befindet sich in dem System von Angriffspunkten ein fixer Punkt, so erleidet derselbe nach der Richtung der Resultirenden aller Kräfte einen derselben gleichen Druck. Sei H die Größe dieses Druckes, und h der Weg, den der fixe Punkt nach der Richtung der Resultirenden zurücklegen würde, wenn der Punkt beweglich wäre, so ist Hdh das dynamische Moment des fixen Punktes, und man hätte noch immer

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots - Hdh = 0.$$

567. Folgesatz 2. Wäre aber das System von Angriffspunkten genöthiget, auf der Oberfläche einer krummen Linie zu verbleiben, so würde es nach der Richtung der Normale k dieser Fläche einen Druck K ausüben, und man kann die krumme Flä-

Digitized by Google

che entfernen, und an ihrer Statt eine Kraft $-K$ in der Richtung der Normale wirken lassen. Das Gleichgewicht des Systems von Kräften wird also bestehen, wenn

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots - Kdk = 0 \text{ ist.}$$

568. Lehrsatz. Wenn einem System schwerer, materieller Punkte, welche unter einander im Gleichgewichte sich befinden, eine sehr geringe Bewegung ertheilt wird, so kann dessen Schwerpunkt weder steigen noch sinken.

Beweis. Seien P, P_1, P_2, P_3 ... die Gewichte einzelner materiellen Punkte, und p, p_1, p_2, p_3 ... ihre Abstände von einer horizontalen Ebene. Sei z der Abstand ihres Schwerpunktes von derselben Ebene, so hat man nach (71)

$$z = \frac{Pp + P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 + \ldots}{P + P_1 + P_2 + P_3 + \ldots}$$

Erhält nun das System von Punkten eine sehr kleine Bewegung, so daß die Entfernungen p, p_1, p_2 ... beziehungsweise in $p + dp$, $p_1 + dp_1$, $p_2 + dp_2$ ... übergehen; sei $z + dz$ die zugehörige Entfernung ihres Schwerpunktes, so erhält man ebenfalls

$$z + dz = \frac{P(p + dp) + P_1(p_1 + dp_1) + P_2(p_2 + dp_2) + \ldots}{P + P_1 + P_2 + \ldots}$$

und der Unterschied dieser zwei Ausdrücke liefert

$$dz = \frac{Pdp + P_1dp_1 + P_2dp_2 + \ldots}{P + P_1 + P_2 + \ldots}$$

da aber das System von Punkten in Ruhe war, so ist der Zähler im Werthe von dz null, sonach ist auch $dz=0$, oder z konstant, d. i. die Entfernung des Schwerpunktes von jener horizontalen Ebene bleibt unveränderlich.

569. Folgesatz. Da z eine Funktion der Größen p, p_1, p_2 ... ist, und $dz=0$ die Bedingungsgleichung ist, welche z zu einem Maximum oder Minimum macht, so folgt, daß so oft ein System schwerer, materieller Punkte im Gleichgewichte sich befindet, dessen Schwerpunkt entweder die höchste oder die tiefste Stelle einnimmt. Befindet sich der Schwerpunkt am tiefsten, wie z. B. bei einem Wagebalken, und wird derselbe um den Drehpunkt bewegt, so

Digitized by Google

steigt zwar der Schwerpunkt während der Bewegung des Wagebalkens, sinkt aber gleich wieder und gelangt zur vorigen Stelle, sobald der Wagebalken in Ruhe gekommen ist. Liegt dagegen der Schwerpunkt am höchsten, z. B. an einem Wagebalken, wo durch aufgeschraubte Gewichte nach (456) der Schwerpunkt über dem Drehpunkt zu liegen kommt, so wird die kleinste Kraft zureichen, um ihn aus dieser Lage zu bringen: er entfernt sich dann immer mehr von der ursprünglichen Lage des Gleichgewichts, und gelangt erst in Ruhe, bis er die tiefste Stelle unter dem Drehpunkte eingenommen hat, mit andern Worten: Ein Wagebalken, dessen Schwerpunkt über dem Drehpunkt sich befindet, kommt nicht in Ruhe, bis er nicht umschlägt.

570. Lehrsatz. Wenn Kräfte an Maschinen im Gleichgewichte stehen, und denselben eine sehr kleine Bewegung ertheilt wird, so verhalten sich die Räume, welche hierbei in entgegengesetzten Richtungen Kraft und Last beschreiben, verkehrt, wie diese Kräfte.

Beweis. Sind P, Q die an einer Maschine wirkenden Kräfte und p, q die Bewegungen, welche ihre Angriffspunkte gleichzeitig annehmen, wie immer das Gleichgewicht der Maschine gestört wird, so muß nach (562)

$$Pp + Qq = 0$$

werden, mithin $-q : p = P : Q$ sich verhalten.

Beispiele I. Soll im Flaschenzuge (Fig. 129) die Last Q um die Größe k steigen, so muß jedes der n Seile sich um diese Größe verkürzen, mithin beschreibt die Kraft P einen Raum nk, daher $P : Q = 1 : n$ wie (487).

II. Wenn am Räderwerke (Fig. 138), wo die Halbmesser der Räder mit A, B, C, die Halbmesser der Wellen mit a, b, c bezeichnet werden, die Last Q um die Größe k erhoben wird, so muß die Kraft P, weil (518) $P : Q = abc : ABC$ ist, einen Raum $k \cdot ABC : abc$ zurücklegen.

571. Lehrsatz. Wenn ein Räderwerk durch die Umdrehung eines Getriebes in Umlauf gebracht wird, so verhalten sich die gleichzeitigen Umlaufszahlen des ersten eingreifenden Getriebes

und des letzten ergriffenen Rades, wie das Produkt aus der Anzahl der Zähne der ergriffenen Räder zum Produkt aus den Zahlen der Triebstöcke der eingreifenden Getriebe.

Beweis. Da jeder Triebstock einen Zahn fortschiebt, so werden bei einem Umlaufe des Getriebes nur so viel Zähne des Rades fortgeschoben, als das Getriebe Triebstöcke enthält; hat also das Getriebe n Triebstöcke, und das Rad m Zähne, so erfolgt eine Umdrehung des Rades bei $\frac{m}{n}$ Umläufen des Getriebes, und bei m Umläufen des Getriebes finden n Umläufe des Rades Statt. Aus gleichem Grunde, wenn das zweite Getriebe, welches am Rade festsitzt, n_1 Triebstöcke, und das zweite Rad m_1 Zähne enthält, ergeben sich n_1 Umläufe des zweiten Rades bei m, Umläufen des zweiten Getriebes, und bei nn_1 Umläufen des zweiten Rades mm_1 Umläufe des ersten Getriebes. Sind also $m, m_1, m_2 \ldots$ die Zähnezahlen der auf einander folgenden Räder, und $n, n_1, n_2 \ldots$ die Anzahl der Triebstöcke in den auf einander folgenden Getrieben, so verhalten sich die gleichzeitigen Umlaufszahlen des ersten Getriebes und des letzten Rades wie die Zahlen $m \cdot m_1 \cdot m_2 \ldots$ und $n \cdot n_1 \cdot n_2 \ldots$

572. Erklärung. Eine Pendeluhr hat folgende Einrichtung: Das Rad A (Fig. 168), welches jede Minute einmal herumkommt, enthält 30 keilförmige Zähne, und heißt das Steigrad, seine Axe geht durch das Zifferblatt, an ihr steckt ein Zeiger f, der Sekundenzeiger, welcher auf dem in 60 gleiche Theile getheilten Sekundenringe die einzelnen Sekunden weiset. Das zweite Rad B von 80 Zähnen, welches mit dem an der Axe des Steigrades befestigten Getriebe a von 10 Triebstöcken zusammengreift, heißt das Mittelrad: an seiner Axe steckt das Getriebe b von 12 Triebstöcken. Das dritte Rad C von 90 Zähnen, welches mit dem Getriebe b zusammengreift, heißt das Minutenrad: seine Axe geht durch das Zifferblatt, und trägt vermittelst einer Hülse einen Zeiger g, den Minutenzeiger, welcher in jeder Stunde einmal herumkommt und so auf dem in 60 gleiche Theile getheilten Minutenringe die einzelnen Minuten am Zifferblatte weiset; auf dem nämlichen

Digitized by Google

Minutenringe werden auch noch zwölf gleiche Theile des Kreisumfanges als die zwölf gewöhnlichen Stunden mit größern Ziffern bezeichnet. Ein zweiter Zeiger h, welcher in zwölf Stunden einmal herumkommt, wird auf folgende Weise mit dem Minutenrade verbunden: Zwischen dem Zifferblatte und dem vordern Uhrboden ist an der Hülse des Minutenzeigers ein Getriebe i von zehn Triebstöcken befestigt, dieses greift in ein Rad I von vierzig Zähnen, das sogenannte Wechselrad, an dessen Axe ein Getriebe von zwölf Triebstöcken festsitzt, welches das Stundenrad von 36 Zähnen bewegt; dieses Stundenrad wird über der Hülse des Minutenzeigers auf einer zweiten Hülse aufgesetzt, so daß jene innerhalb dieser sich leicht drehen kann. Die Hülse des Stundenrades ragt auf dem Zifferblatte etwas weniger hervor, als jene des Minutenrades, und auf ihr wird der Stundenzeiger h befestigt. An der Axe des Minutenrades zwischen den zwei Uhrböden steckt noch ein Getriebe c von 12 Triebstöcken, welches in ein Rad D von 96 Zähnen, das Zusatzrad, eingreift; an der Axe des Zusatzrades ist ein Getriebe d von 16 Triebstöcken befestigt, und greift in ein Rad E von 96 Zähnen, das Walzenrad genannt, weil mit dessen Axe eine Walze von $1^1/_4$ Zoll im Durchmesser verbunden ist, worauf sich eine Schnur oder Darmsaite 16mal nebeneinander in die schraubenförmigen Vertiefungen aufwinden läßt; die Darmsaite wird um eine Zugrolle geführt, welche ein Gewicht von mehrern Pfunden trägt, und mit ihrem Ende unten am Uhrboden befestigt ist. Das Walzenrad ist mit der Walze durch Beihilfe eines Sperrades und Sperrkegels so verbunden, daß das mittelst der Darmsaite aufgewundene Aufziehgewicht die Walze sammt dem Rade umdrehen könne, wenn aber das Gewicht abgelaufen und die Uhr wieder aufzuziehen ist, muß bei dieser Umdrehung der Walze das Walzenrad in Ruhe verbleiben.

Die Zähne des Steigrades (Fig. 169) werden durch den sogenannten Anker, die Hemmung, wechselweise aufgehalten und wieder losgelassen. Der Anker ist an der Axe FG (Fig. 168) befestigt, an welcher eine Gabel GHI fest sitzt; diese greift in die Pendelstange, welche mit einem Ende bei K mittelst einer biegsamen Feder LM herabhängt, und am andern Ende eine schwere

mit Blei ausgefütterte messingene Linse trägt. Fängt nun das Pendel an zu schwingen, so theilt sich diese Bewegung mittelst der Gabel dem Anker mit, und das Steigrad, welches ohnehin durch das Aufziehgewicht getrieben wird, liefert dem Pendel den nöthigen Ersatz an Kraft, damit die Schwingungen ununterbrochen fortdauern, so lange das Aufziehgewicht nicht abgelaufen ist.

573. *Folgesatz.* Da jeder Zahn des Steigrades durch den Anker zweimal ausgelöset wird, so entsprechen einem Umlaufe des Steigrades 60 Schwingungen des Pendels; dauert nun jede Schwingung 1 Sekunde, so geschieht jeder Umlauf des Steigrades in einer Minute. Da nun das Mittelrad 80, das Minutenrad 90 Zähne besitzt, und die zugehörigen Getriebe 10 und 12 Triebstöcke haben, so entsprechen jedem Umlaufe des Minutenrades $\frac{80.90}{10.12}=60$ Umläufe des Steigrades, d. i. ein Umlauf des Minutenrades dauert eine Stunde. Eben so ergibt sich die Dauer eines Umlaufes vom Stundenrade gleich 12 Stunden, vom Walzenrade gleich 48 Stunden, und die Zeit, nach welcher das Aufziehgewicht ablauft, gleich 32 Tagen.

574. *Erklärung.* Die Kniepresse besteht aus zwei Stützen AC, die parallel zu einander gestellt sind, und ein Zwischenstück EF, das Preßbret, aufnehmen, welches zwischen den beiden Stützen auf und ab bewegt werden kann, wobei es in einem in den Stützen angebrachten Schlitze mn seine Leitung findet. Mit dem Preßbrete ist ein Winkelhebel ADB verbunden, dessen beide Schenkel AD, DB mittelst durchgesteckter Bolzen in A, D und B sich drehen lassen. Wenn nun im Raum $EFGH$ der zu pressende Gegenstand eingelegt wird, und eine Kraft mittelst der Handhabe P wirkt, so dreht sich der Arm AD um den Punkt A, hiebei nähert sich dessen Endpunkt D der Stütze AC, und weil die Länge des zweiten Armes sich nicht ändern kann, so rückt der Punkt B sammt der Preßplatte EF herab, und übt daselbst einen Druck aus.

575. *Aufgabe.* Aus der gegebenen Kraft P und dem beobachteten Winkel $BAD=\alpha$ die Kraft Q zu bestimmen, mit welcher die Pressung vor sich geht.

Digitized by Google

Auflösung. Setzt man $AD = a$, $BD = b$, so ergibt sich

$$Q = \frac{P\sqrt{(b^2 - a^2\sin^2\alpha)}}{a\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha\sqrt{(b^2 - a^2\sin^2\alpha)}}$$

Beweis. Man ziehe PD senkrecht auf AB, setze $AB = x$, $PD = y$; da durch die Einwirkung der Kraft P nahe am Punkt D dieser Punkt der Stütze AC sich nähert, während der Punkt B sich von A in der Richtung BC entfernt, so sind dx, dy die virtuellen Geschwindigkeiten der Kräfte Q, P, und man hat für das Gleichgewicht

$$\text{I.} \quad Pdy + Qdx = 0.$$

Es ist aber $x = AP + BP = \sqrt{(a^2 - y^2)} + \sqrt{(b^2 - y^2)}$, demnach

$$\text{II.} \quad dx = -\frac{ydy}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} - \frac{ydy}{\sqrt{(b^2 - y^2)}}$$

oder weil $y = a\sin\alpha$, $\sqrt{(a^2 - y^2)} = a\cos\alpha$ ist, so folgt nach Substitution dieser Werthe

$$dx = -\operatorname{tg}\alpha dy - \frac{a\sin\alpha dy}{\sqrt{(b^2 - a^2\sin^2\alpha)}}$$

und hiemit erhält man aus I. nach Hinweglassung des Faktors dy

$$\text{III.} \quad P = Q\left[\operatorname{tg}\alpha + \frac{\sqrt{(b^2 - a^2\sin^2\alpha}}{a\sin\alpha}\right]$$

woraus Q sogleich folgt.

576. Anmerkung. Außer den bereits angeführten Werken kann noch empfohlen werden:

Ide, J. J. A., System der reinen und angewandten Mechanik fester Körper. Berlin 1802. 2 Bde.

Möbius, Aug. Fd., Lehrbuch der Statik. Leipzig 1837. 2 B.

Und zu den in (305) angeführten Schriften wird nachgetragen:

Poncelet, Ueber die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente. Aus dem Französ. übersetzt von J. W. Lahmeyer. Braunschweig 1844.

Digitized by Google

Drittes Buch.

Dynamik.

I. Freie, geradlinige Bewegung.

577. Erklärung. Eine Kraft, sofern sie die Bewegung eines angegriffenen materiellen Punktes oder des ihm zugehörigen ganzen Körpers erzeugt, heißt bewegende Kraft. Diese ist eine momentane Kraft, wenn sie bloß im ersten Augenblicke der Bewegung auf den Körper einwirkt; wofern sie aber während der ganzen Zeit der Bewegung thätig ist, so heißt sie beschleunigende Kraft. Derjenige Theil der beschleunigenden Kraft, welcher auf die Einheit der Masse entfällt, heißt die Beschleunigung des bewegten Körpers.

578. Folgesatz. Nach dem Gesetze der Trägheit erzeugt eine momentane Kraft nur immer eine gleichförmige, geradlinige Bewegung (18). Heißt aber P die beschleunigende Kraft und M die bewegte Masse, so ist die Beschleunigung des bewegten Körpers $P : M$.

579. Erklärung. Ist die Beschleunigung der Bewegung konstant, so heißt die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte oder eine gleichförmig verzögerte Bewegung, jenachdem die Beschleunigung mit der Richtung der Bewegung zusammenfällt, oder aber, ihr entgegenwirkt. Ist hingegen die Beschleunigung des bewegten materiellen Punktes nach irgend einem Gesetze veränderlich, so

Digitized by Google

nennt man die Bewegung eine veränderliche Bewegung. Man nennt Anfangsgeschwindigkeit diejenige, mit welcher ein materieller Punkt seine Bewegung angeht, Endesgeschwindigkeit aber jene, die ihm nach Verfluß irgend einer Zeit t zugehört.

580. Lehrsatz. Die Geschwindigkeit einer veränderlichen Bewegung ist der Quotient aus dem Differentiale des Raumes, getheilt durch das Differentiale der Zeit.

Beweis. Gesetzt, ein materieller Punkt werde von einer beschleunigenden Kraft getrieben, und beschreibe den Weg s in der Zeit t, die ihm dann zugehörige Geschwindigkeit heiße v. Wächst nun die Zeit t um dt, so würde die Geschwindigkeit v um dv und der Raum s um ds zunehmen, und wenn die Bewegung während der unendlich kleinen Zeit dt als gleichförmig betrachtet wird, so erhält man

$$ds = (v + dv)dt = vdt$$

weil in dem eingeklammerten Ausdrucke dv gegen v verschwindet (A. 624); allein $v + dv$ ist diejenige Geschwindigkeit, welche der bewegte Punkt erst nach Verfluß der Zeit dt erhält, und da diese stetig wächst, so ist eigentlich

$$ds < (v + dv)dt, \text{ aber zugleich } ds > vdt,$$

weil v die Geschwindigkeit des bewegten Punktes zu Ende der Zeit t vorstellt, und diese wegen der beschleunigenden Kraft, welche während des Zeittheilchens dt thätig ist, zunehmen muß, und erst nach Ablauf desselben in $v + dv$ übergeht; da nun beide Grenzen der Größe ds in einander fallen, so ist ds gleich vdt, mithin $v = ds : dt$.

581. Folgesatz. Man kann daher die veränderliche Bewegung eines materiellen Punktes während einer unendlich kleinen Zeit dt wirklich als gleichförmig betrachten, wie immer auch die beschleunigende Kraft beschaffen sein mag.

582. Grundsatz. Die Beschleunigungen sind den während der Zeiteinheit durch sie erzeugten Geschwindigkeiten proportional. Sind nämlich G, g die Beschleunigungen zweier Bewegungen, und V, v die in der Zeiteinheit erzeugten Geschwindigkeiten, so hat man $G : g = V : v$.

Digitized by Google

583. *Folgesatz.* Da aber $G = P : M$, $g = p : m$ ist (578), wenn M, m die bewegten Massen, und P, p die Kräfte bedeuten, so hat man auch $P : p = MV : mv$. Ist hier p die Einheit der Kräfte, und eben so m, v die Einheiten der Massen und Geschwindigkeiten, so hat man sofort $P = M.V$, wo P, M V absolute Zahlen bedeuten.

584. *Erklärung.* Ein Produkt wie (583) aus der Masse eines Körpers in dessen Geschwindigkeit, heißt die Bewegungsgröße des Körpers.

585. *Lehrsatz.* Wenn die beschleunigende Kraft konstant ist, so ist die Aenderung der Geschwindigkeit während der unendlich kleinen Zeit dt, gleich dem Produkte aus der Beschleunigung in das Differentiale der Zeit.

Beweis. Angenommen, g wäre die konstante Beschleunigung der Bewegung, und sonach auch die Geschwindigkeit, welche der bewegte Punkt in der Zeiteinheit erlangt; in der folgenden Zeiteinheit ist die Zunahme der Geschwindigkeit abermals g, also nach Ablauf von zwei Zeiteinheiten $2g$, und eben so ist $3g$ die Geschwindigkeit des bewegten Punktes, nachdem drei, und überhaupt ng nachdem n der Einheit gleiche Zeittheile verstrichen sind. Man sieht hieraus, daß diese durch die konstante Beschleunigung erzeugten Geschwindigkeiten genau der Zeit proportional wachsen. Ist also dt die unendlich kleine Zeit der Bewegung eines materiellen Punktes, während welcher die konstante Beschleunigung g eine Zunahme der Geschwindigkeit dv erzeugen soll, so folgt sogleich $dv = gdt$.

586. *Lehrsatz.* Auch bei der veränderlichen Bewegung hat die Aenderung der Geschwindigkeit das Produkt aus dem Differentiale der Zeit in die Beschleunigung zum Werthe.

Beweis. Sei φ die veränderliche Beschleunigung eines materiellen Punktes zu Ende der Zeit t, und v dessen Geschwindigkeit; ändert sich nun während der Zeit dt, φ um $d\varphi$, und v um dv, so ist, weil φ wächst,

$$dv > \varphi dt, \text{ aber } dv < (\varphi + d\varphi)dt,$$

weil φ die Beschleunigung zu Anfange und $\varphi + d\varphi$ dieselbe

Digitized by Google

erst zu Ende der Zeit dt bezeichnet. Beide Grenzen für dv fallen aber wegen (A. 624) in einander; folglich ist $dv = \varphi dt$.

587. Folgesatz. Der letzte Ausdruck liefert $\varphi = dv : dt$, oder, wenn man statt dv dessen Werth, aus der Differentiirung der Gleichung $v = ds : dt$ setzt, erhält man $\varphi = d^2s : dt^2$, d. i. in Worten: Die Beschleunigung bei der veränderlichen Bewegung eines materiellen Punktes ist gleich dem Quotienten aus dem Differentiale der Geschwindigkeit durch das Differentiale der Zeit oder aber die Beschleunigung ist gleich dem zweiten Differentiale des Raumes, getheilt durch das Quadrat des Differentiales der Zeit.

588. Lehrsatz. Bei der Bewegung schwerer Körper nach vertikalen Richtungen gelten die zwei Formeln

$$\text{I. } v = c \pm gt, \quad \text{II. } s = ct \pm \tfrac{1}{2}gt^2,$$

in welchen c die dem Körper mitgetheilte Geschwindigkeit, g die Beschleunigung der Schwere (etwa 31¼ Berl. Fuß = 31.03 W. Fuß = 9.81 Meter), t die während der Bewegung verstrichene Zeit, v die zu Ende dieser Zeit dem Körper zugehörende Geschwindigkeit, und s den während der Zeit vom schweren Körper zurückgelegten Weg bedeutet.

Beweis. Nach (585) hat man $dv = gdt$; integrirt man diesen Ausdruck, so folgt $v = gt + C$, wo C die Konstante der Integration vorstellt, die so bestimmt wird. War nämlich zu Anfang der Zeit t die dem Körper ertheilte Geschwindigkeit gleich c, so muß für $t = 0$, $v = c$ werden, also ist $C = c$, und sonach $v = c + gt$, wenn die Richtung der Geschwindigkeit c mit der vertikalen Richtung des frei fallenden Körpers übereinfällt; ist sie aber dieser entgegengesetzt, d. i. wird dem Körper eine Geschwindigkeit mitgetheilt, welche denselben von der Erdfläche in vertikaler Richtung zu entfernen vermag, dann ist $v = c - gt$, und allgemein $v = c \pm gt$. Mit diesem Werthe von v erhält nach (580) wegen $ds = vdt$, $ds = (c \pm gt)dt$, woraus durch die Integration folgt

$$s = ct \pm \tfrac{1}{2}gt^2,$$

wo die Konstante verschwindet, da s mit t zugleich null wird.

Digitized by Google

589. *Folgesatz.* Für $c = 0$ erhält man aus I. III. $v = gt$ und aus II., IV. $s = \frac{1}{2}gt^2$, mittelst welcher Formeln sich die bekannten Gesetze frei fallender Körper ohne Schwierigkeit ableiten lassen.

590. *Lehrsatz.* Im freien Falle verhalten sich die in verschiedenen Zeiten zurückgelegten Räume wie die Quadrate dieser Zeiten, und auch wie die Quadrate der zu Ende der Bewegung erlangten Geschwindigkeiten.

Beweis. Die Formel IV. $s = \frac{1}{2}gt^2$ liefert $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$, und für diesen Werth erhält man aus Formel III.

$$\text{V. } v = gt = g\sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{2gs}, \text{ oder } s = \frac{v^2}{2g}$$

Für ein anderes S, T, V gilt analog

VI. $S = \frac{1}{2}gT^2$, und VII. $S = V^2 : 2g$, daher

$S : s = T^2 : t^2$, und $S : s = V^2 : v^2$.

591. *Folgesatz.* Setzt man in Formel VI. $T = n\tau$, und in IV. $t = (n-1)\tau$, so folgt

$S - s = \frac{1}{2}g\tau^2[n^2 - (n-1)^2] = \frac{1}{2}g(2n-1)\tau$,

d. i. die in einzelnen Zeittheilen zurückgelegten Räume verhalten sich wie die ungeraden Zahlen.

592. *Lehrsatz.* Der im freien Fall binnen irgend einer Zeit zurückgelegte Raum ist nur halb so groß, als der gleichzeitig in gleichförmiger Bewegung mit der Endesgeschwindigkeit beschriebene Raum.

Beweis. Multiplizirt man die Formel III. mit $\frac{1}{2}t$, so ergibt sich $\frac{1}{2}vt = \frac{1}{2}gt^2$, allein nach Formel IV. ist $\frac{1}{2}gt^2 = s$; demnach wird $s = \frac{1}{2}vt$. Wird aber der Raum s' binnen der Zeit t mit der Geschwindigkeit v gleichförmig beschrieben, so folgt $s' = vt$, mithin $s = \frac{1}{2}s'$.

593. *Aufgabe.* Ein schwerer Körper wird mit einer gegebenen Geschwindigkeit aufwärts geworfen; man fragt nach der Zeit seines Aufsteigens und nach der Höhe, die er dann erreicht hat.

Digitized by Google

Auflösung. Es ist $t = \frac{c}{g}$, $s = \frac{c^2}{2g}$

Beweis. Die Formeln I. II. in (588) enthalten die vollständige Lösung der Aufgabe. Setzt man in I. die Endesgeschwindigkeit $v = 0$, so wird $c - gt = 0$, also t wie oben. Mit diesem Werthe von t liefert die Formel II.

$$s = ct - \tfrac{1}{2}gt^2 = \frac{c^2}{g} - \frac{c^2}{2g} = \frac{c^2}{2g}$$

594. Aufgabe. Ein Körper wird auf eine gegebene Höhe über die Erdfläche gehoben, und sodann sich selbst überlassen; man fragt nach der Geschwindigkeit und Dauer seiner Bewegung, wenn er durch einen gleichfalls gegebenen Raum gefallen ist.

Auflösung. Heißt h die Höhe über der Erdfläche, zu welcher der schwere Körper gebracht worden, und s der Raum, durch den er, sich selbst überlassen, gefallen ist, so findet man für $a = h + r$, wo r den Halbmesser der Erde bedeutet,

$$v = r\sqrt{\frac{2g}{a}\left(\frac{s}{a-s}\right)},\quad t = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\sqrt{(as - s^2)} + \tfrac{1}{2}a.\arccos\frac{a-2s}{a}\right]$$

Beweis. Sei $AC = r$ (Fig. 171) der Halbmesser der als Kugel betrachteten Erde, und der Körper anfänglich in B, während $AB = h$ gegeben ist; es wirke auf denselben in der Richtung BC stetig die Schwere, jedoch unter Voraussetzung, daß sie im verkehrten Verhältnisse der Quadrate der Entfernungen von dem Mittelpunkte C der Erde steht. Ist der Körper in der Zeit t von B nach D gekommen, wo $BD = s$ ist, so ist $DC = h + r - s = a - s$ seine Entfernung vom Mittelpunkt der Erde; sei alsdann φ die Beschleunigung der Schwere, also

$$(a - s)^2 : r^2 = g : \varphi,\ \text{gibt}\ \varphi = \frac{gr^2}{(a-s)^2},\ \text{und nach (587)}$$

$$\varphi = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{gr^2}{(a-s)^2}$$

multiplizirt man beiderseits mit $2ds$, so folgt

Digitized by Google

$$\frac{2ds \cdot d^2s}{dt^2} = d \cdot \frac{ds^2}{dt^2} = 2gr^2 \cdot \frac{ds}{(a-s)^2}$$

die Integration gibt wegen

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{2gr^2}{a-s} + C.$$

Ist nun zu Anfang der Bewegung die Geschwindigkeit null, also $v = 0$ für $s = 0$, so bleibt $C = -2gr^2 : a$, und daher vollständig

$$v^2 = \frac{2gr^2}{a-s} - \frac{2gr^2}{a} = \frac{2gr^2}{a}\left(\frac{s}{a-s}\right) = \frac{ds^2}{dt^2}$$

Um noch die Zeit der Bewegung zu finden, löse man diese Gleichung in Beziehung auf dt auf, so findet man

$$dt = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}} \cdot ds\sqrt{\frac{a-s}{s}} = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}} \cdot \frac{(a-s)ds}{\sqrt{(as-s^2)}}$$

welchen Ausdruck man so schreiben kann:

$$dt = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left[\frac{(\frac{1}{2}a-s)ds}{\sqrt{(as-s^2)}} + \frac{\frac{1}{2}a \cdot ds}{\sqrt{(as-s^2)}}\right]$$

Da der Zähler des ersten Gliedes das Differentiale der radikalen Größe im Nenner ist, so hat man nach (911)

$\int \frac{(\frac{1}{2}a-s)ds}{\sqrt{(as-s^2)}} = \sqrt{(as-s^2)}$, das zweite Glied findet man nach Int. 143) $\frac{1}{2}a\int \frac{ds}{\sqrt{(as-s^2)}} = \frac{1}{2}a \cdot \arccos\frac{a-2s}{a}$

und beide Ausdrücke vereinigt liefern t wie oben.

595. Aufgabe. Ein schwerer Körper wird im widerstehenden Mittel, dessen Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportional ist, vertikal abwärts gelassen; die Geschwindigkeit desselben und den zurückgelegten Weg zu bestimmen, wenn die Dauer der Bewegung gegeben ist.

Auflösung. Wenn der Widerstand des Mittels durch mv^2 vor-

Digitized by Google

gestellt wird, wo m ein Erfahrungskoeffizient ist, so hat man für $k = e^{-2t\sqrt{gm}}$, $v = \frac{1-k}{1+k}\sqrt{\frac{g}{m}}$, $s = -\frac{1}{2m}\lambda(1 - \frac{mv^2}{g})$

Beweis. Die bewegende Kraft ist in jedem Augenblicke der Bewegung dem Unterschiede zwischen der Beschleunigung der Schwere und dem Widerstande des Mittels gleich. Man hat also

$$p = \frac{dv}{dt} = g - mv^2, \text{ und hieraus } dt = \frac{dv}{g - mv^2}$$

welches nach Int. 57)

$$\text{I.} \quad t = \frac{1}{2\sqrt{gm}}\lambda\frac{\sqrt{g} + v\sqrt{m}}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}} \text{ oder}$$

$$e^{-2t\sqrt{gm}} = \frac{\sqrt{g} - v\sqrt{m}}{\sqrt{g} + v\sqrt{m}}$$

liefert. Bezeichnet man diesen Ausdruck mit k, so folgt aus der Gleichung

$$k = \frac{\sqrt{g} - v\sqrt{m}}{\sqrt{g} + v\sqrt{m}}, \quad v = \frac{1-k}{1+k}\sqrt{\frac{g}{m}}$$

Um den zurückgelegten Weg des Körpers zu finden, hat man

$$ds = vdt = \frac{vdv}{g - mv^2}$$

also nach Int. 37)

$$s = -\frac{1}{2m}\lambda(g - mv^2) + C.$$

Da nun für $v = 0$, $s = 0$ ist, so wird $C = \lambda g$, daher vollständig

$$\text{II.} \quad s = -\frac{1}{2m}\lambda(1 - \frac{mv^2}{g})$$

596. Folgesatz. Da dem Ausdrucke $k = e^{-2t\sqrt{gm}}$ gemäß mit der Zunahme von t der Werth von k immer abnimmt, und zuletzt verschwindet, so nähert sich v immer mehr einer konstanten Größe $\sqrt{\frac{g}{m}}$, d. i. die Bewegung eines im widerstehenden Mittel frei fal-

Digitized by Google

lenden schweren Körpers nähert sich desto mehr einer gleichförmigen Bewegung, je länger sie dauert.

597. Aufgabe. Ein schwerer Körper wird in einem widerstehenden Mittel vertikal aufwärts geworfen; seine Geschwindigkeit und den zurückgelegten Weg nach Verfluß einer gegebenen Zeit zu bestimmen.

Auflösung. Heißt c die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper vertikal aufwärts bewegt wird, mv^2 die Größe des Widerstandes in jedem Augenblicke der Bewegung, und Kürze halber

$$k = \operatorname{arctgc}\sqrt{\frac{m}{g}} - t\sqrt{gm},$$

so hat man $v = \operatorname{tg} k \times \sqrt{\frac{g}{m}}$, $s = \frac{1}{2m}\lambda\frac{g + mc^2}{g + mv^2}$

Beweis. Da die Bewegung des Körpers in einer Richtung vor sich geht, welche der Richtung der Schwere sowohl als auch jener des widerstehenden Mittels gerade entgegengesetzt ist, so hat man $\varphi = -g - mv^2 = \frac{dv}{dt}$, mithin $dt = \frac{dv}{g + mv^2}$

Die Integration nach Int. 55) liefert nun

$$-t = \frac{1}{\sqrt{gm}}\operatorname{arctgv}\sqrt{\frac{m}{g}} + C.$$

Um C zu bestimmen, sei c die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper aufwärts geworfen wird, so hat man

$$0 = \frac{1}{\sqrt{gm}}\operatorname{arctgc}\sqrt{\frac{m}{g}} + C, \text{ also } C = -\frac{1}{\sqrt{gm}}\operatorname{arctgc}\sqrt{\frac{m}{g}}$$

und $$t = \frac{1}{\sqrt{gm}}\left[\operatorname{arctgc}\sqrt{\frac{m}{g}} - \operatorname{arctgv}\sqrt{\frac{m}{g}}\right]$$

Hieraus ergibt sich

$$\operatorname{arctgc}\sqrt{\frac{m}{g}} - t\sqrt{gm} = \operatorname{arctgv}\sqrt{\frac{m}{g}}$$

Digitized by Google

oder $k = \operatorname{arctg} v\sqrt{\frac{m}{g}}$, also $v = \operatorname{tg} k \cdot \sqrt{\frac{g}{m}}$

Ferner hat man

$$ds = vdt = -\frac{vdv}{g + mv^2}, \text{ und nach Int. 37)}$$

$$s = -\frac{1}{2m}\lambda(g + mv^2) + C;$$

ist nun $s = 0$ für $v = c$, so wird $C = \frac{1}{2m}\lambda(g + mc^2)$,

$$\text{mithin} \qquad s = \frac{1}{2m}\lambda\frac{g + mc^2}{g + mv^2}$$

598. *Folgesatz.* Fragt man nach der größten Höhe h, zu welcher der Körper aufsteigen kann, so ist $v = 0$, $h = s$,

$$\text{sonach} \qquad h = \frac{1}{2m}\lambda\left(1 + \frac{mc^2}{g}\right)$$

die Dauer des Aufsteigens ist aber

$$t = \frac{1}{\sqrt{gm}}\operatorname{arctg} c\sqrt{\frac{m}{g}}$$

Um die Zeit t' des Niedersteigens zu bestimmen, hat man aus II. (595) h statt s setzend

$$e^{-2mh} = 1 - \frac{mv^2}{g}, \quad \text{also } v^2 = \frac{g}{m}\left(1 - e^{-2mh}\right)$$

und mit diesem Werthe liefert die Formel I. (595)

$$t' = \frac{1}{2\sqrt{gm}}\lambda\frac{\sqrt{g} + v\sqrt{m}}{\sqrt{g} - v\sqrt{m}}$$

599. Anmerkung. Die Summe der Ausdrücke für t und t' gibt die Zwischenzeit der Bewegung des vertikal geworfenen Körpers, welche bei Versuchen beobachtet werden kann, und woraus sich die Größe m oder der Koeffizient des Widerstandes der Luft berechnen läßt. Aber eben solche Versuche lehren dadurch, daß keine Uebereinstimmung gewonnen wird, entweder daß der Widerstand

Digitized by Google

der Luft einem ganz andern Gesetze unterworfen ist, oder daß noch andere Hindernisse, und namentlich auch die Reibung der Kugel mit der Luft in Rechnung zu bringen wären, wenn die Versuche mit der Rechnung übereinstimmen sollen.

II. Die Wurfbewegung.

1. Im luftleeren Raume.

600. Erklärung. Wenn die Richtung der Geschwindigkeit, welche eine momentane Kraft (577) dem Körper ertheilt, von der vertikalen Richtung abweicht, so heißt die Bewegung des schweren Körpers eine Wurfbewegung, der von dem Körper zurückgelegte Weg heißt die Wurflinie oder Bahn des geworfenen Körpers, die Entfernung des Punktes, in welchem der Körper aufgestiegen ist, und jenes Punktes, in welchem derselbe die durch den erstern gezogene horizontale Ebene wieder trifft, die Wurfweite, die Erhöhung des aufsteigenden Körpers zu irgend einer Zeit über den Horizont die Wurfhöhe, und der Winkel, den die Richtung des Wurfs mit einer horizontalen Geraden in der Ebene des bewegten Körpers einschließt, wird der Elevationswinkel genannt. Die dem Körper von der momentanen Kraft mitgetheilte Geschwindigkeit wird durch die Höhe gemessen, aus welcher ein materieller Punkt im luftleeren Raum frei fallen müßte, um dieselbe Geschwindigkeit zu erhalten. Man nennt sie die Geschwindigkeitshöhe, und hat nach (590) den Werth $h = c^2 : 2g$.

601. Lehrsatz. Die Bahn des geworfenen Körpers ist eine Parabel, deren Parameter das Vierfache der Geschwindigkeitshöhe beträgt.

Beweis. Sei AT die Richtung des Wurfs zu Anfang der Bewegung, AQ eine durch den Ort A des Körpers gezogene Horizontale, AX aber eine vertikale Gerade. Man wähle den Punkt A zum Ursprung der Koordinaten, und AX zur Axe der x, AT zur Axe der y, so kann man, wenn nach Verfluß einer Zeit t der Körper von A nach M gekommen ist, dessen Koordinaten $AP = x$, $PM = y$ sind, diese Versetzung des Körpers von A

nach M als Ergebniß der gleichzeitigen Einwirkung zweier Kräfte betrachten, deren eine nach der Richtung AT angebracht wäre, die andere nach der vertikalen AX wirkte; zerlegt man also die bewegende Kraft $\varphi = \frac{d^2s}{dt^2}$ in die zwei Seitenkräfte $\frac{d^2x}{dt^2}$ nach der Axe der x und $\frac{d^2y}{dt^2}$ nach der Axe der y: so ist die erstere gleich der Beschleunigung der Schwere, die zweite aber null, weil die nach AT thätige Kraft bloß eine momentane Kraft war; man hat also die Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Die erste Integration gibt die Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = gt + A, \quad \frac{dy}{dt} = B,$$

wo A, B die Konstanten bezeichnen, deren Bestimmung aus der Bedingung folgt, daß die Geschwindigkeit für $t = 0$ in vertikaler Richtung null ist, und nach der Richtung des Wurfs den Werth c hat, sonach ist $A = 0$, $B = c$; die zweite Integration liefert nun

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2, \; y = ct,$$

wo keine Konstante hinzugefügt wird, weil x und y mit t zugleich verschwinden. Sei nun h die Geschwindigkeitshöhe, also nach Formel V. (590) $c = \sqrt{2gh}$, so wird $y = t\sqrt{2gh}$; setzt man hierin den Werth von t gezogen aus der Gleichung $x = \frac{1}{2}gt^2$, so ergibt sich die Gleichung der Bahn des geworfenen schweren Körpers

$$y^2 = 4hx.$$

602. Aufgabe. Die Gleichung der Wurflinie zu finden, wenn die horizontale Gerade durch den Ort des Körpers zu Anfang seiner Bewegung zur Abszissenaxe, und die Ordinatenaxe durch denselben Punkt lothrecht auf jener angenommen wird.

Auflösung. Bezeichnet man die rechtwinkligen Koordinaten

des Punktes M, nämlich AP' mit x, $P'M$ mit y, den Elevationswinkel TAX mit φ, so hat man

$$y = x\operatorname{tg}\varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}$$

die Gleichung der Wurflinie im luftleeren Raume.

Beweis. Da $AP = x$, $PM = y$, $AP' = x$, $P'M = y$ ist, so hat man im Dreiecke ACP', $CP' = AC\sin\varphi$, $AP' = AC\cos\varphi$, oder $x + y = y\sin\varphi$, und $x = y\cos\varphi$; dieß gibt $y = y\sin\varphi - x$, und weil

$y = \frac{x}{\cos\varphi}$ ist, so folgt $y = x\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} - x = x\operatorname{tg}\varphi - x$;

nun ist aus (601) $y^2 = 4hx$, $x = \frac{y^2}{4h} = \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}$, hiemit wird

$$y = x\operatorname{tg}\varphi - \frac{x^2}{4h\cos^2\varphi}$$

603. Folgesatz. Die Wurfweite $AQ = b$ zu finden, setze man in (602) $x = b$, $y = 0$, so folgt

$$b = 4h\sin\varphi\cos\varphi = 2h\sin 2\varphi.$$

Dieser Ausdruck erhält für $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ seinen größten Werth $B = 2h$, d. i. die größte Wurfweite erfolgt bei einem Elevationswinkel von $\frac{1}{4}\pi$.

604. Folgesatz 2. Ist aber bei einem andern Elevationswinkel φ' die Wurfweite b', so hat man eben so $b' = 2h\sin 2\varphi'$, daher $b : b' = \sin 2\varphi : \sin 2\varphi'$. Ergänzen sich nun die Winkel φ und φ' zu $\frac{1}{2}\pi$, also wenn $\varphi' = \frac{1}{2}\pi - \varphi$ ist, so folgt

$$\sin 2\varphi' = \sin(\pi - 2\varphi) = \sin 2\varphi,$$

und in solchen Fällen ist $b = b'$, d. i. unter Elevationswinkeln, die sich zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzen, sind die Wurfweiten einander gleich.

605. Folgesatz 3. Der größte Werth von y ergibt sich, wenn man den Ausdruck für y in Beziehung auf x differentiirt, und hierauf das Differentiale gleich Null setzt. Man findet so

Digitized by Google

$x' = h\sin 2\varphi = \frac{1}{2}b$, da dann $y' = h\sin^2\varphi$ die größte Wurfhöhe ist. Es befindet sich also der oberste Punkt D in der Wurflinie über der Mitte der Wurfweite, in einem Abstande

$$DO = h\sin^2\varphi.$$

606. Aufgabe. Die Lage eines Gegenstandes, welcher durch einen geworfenen Körper getroffen werden soll, nebst seiner Geschwindigkeitshöhe ist gegeben; man soll den Elevationswinkel bestimmen.

Auflösung. Sei $AE = e$ (Fig. 172) die Entfernung und $EF = k$ die Höhe des durch den Wurf zu treffenden Gegenstandes, so hat man

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2h \pm \sqrt{(4h^2 - 4hk - e^2)}}{e}$$

Beweis. Setzt man $x = e$, $y = k$ in (602), so ergibt sich die Gleichung

$$k = e\operatorname{tg}\varphi - \frac{e^2}{4h\cos^2\varphi} = e\operatorname{tg}\varphi - \frac{e^2\sec^2\varphi}{4h}$$

aus welcher der Werth von φ gesucht wird. Substituirt man $1 + \operatorname{tg}^2\varphi$ statt $\sec^2\varphi$, und löset die hieraus in Beziehung auf $\operatorname{tg}\varphi$ sich ergebende quadratische Gleichung

$$e^2\operatorname{tg}^2\varphi = 4eh\operatorname{tg}\varphi + e^2 + 4kh = 0$$

auf, so erhält man sofort für $\operatorname{tg}\varphi$ den angegebenen Ausdruck.

607. Folgesatz. Man ersieht hieraus, daß im Allgemeinen zwei verschiedene Elevationswinkel der Aufgabe genügen, welche in einem Elevationswinkel zusammentreffen, wenn $e = 2h$ und $k = 0$ ist; dann erhält man nämlich $4h^2 - 4hk - e^2 = 0$, und $\operatorname{tg}\varphi = 1$, also $\varphi = \frac{1}{4}\pi$. Ist $e < 2h$, oder als die größte Wurfweite (603), dann gibt die Wurzelgröße mit ihren obern Zeichen einen Elevationswinkel φ über $\frac{1}{4}\pi$, und mit ihrem untern Zeichen einen andern Elevationswinkel φ unter $\frac{1}{4}\pi$; beide sind nach (604) der Bedingung unterworfen, daß sie sich zu $\frac{1}{2}\pi$ ergänzen.

608. Anmerkung. Die hier vorgetragene Lehre für die Be-

Digitized by Google

wegung geworfener schwerer Körper gilt nur für den leeren Raum. Die Luft, welche die Erdatmosphäre bildet, setzt ihrer Bewegung einen desto größern Widerstand entgegen, je größer ihre Geschwindigkeit ist; daher diese Theorie nur für kleine Geschwindigkeiten, z. B. beim Bombenwerfen, einigermaßen brauchbar ist; für größere Geschwindigkeiten hingegen kann der Widerstand der Luft so bedeutend werden, daß die wirkliche Wurfweite nur den zehnten Theil der theoretischen und sogar noch weniger beträgt. Aber nicht bloß der Widerstand der Luft hat auf die Bewegung der Körper einen Einfluß, sondern es häufen sich hier mehrere Ursachen (599), die sich noch lange nicht mit der erforderlichen Schärfe der Rechnung werden unterziehen lassen.

2. Wurfbewegung in widerstehender Luft.

609. Aufgabe. Ein schwerer Körper wird nach einer gegebenen Richtung mit einer bekannten Geschwindigkeit geworfen; man sucht die Differentialgleichungen seiner Bahn, wenn der Widerstand der Luft in jedem ihrer Punkte dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist.

Auflösung. Bezeichnet man mit α den Elevationswinkel des Wurfs, welcher dem Stellungswinkel der Wurfslinie zu Anfang der Bewegung gleich ist, und mit φ den Stellungswinkel zu irgend einer Zeit t vom Anfange der Bewegung gerechnet, da der Körper sich in einem Punkte seiner Bahn befindet, dessen horizontale Abszisse x und vertikale Ordinate y ist, setzt man ferner die Bogenlängen einer Parabel, deren halbe Parameter die Einheit und die Stellungswinkel α, φ sind, oder $\frac{1}{2}(tg\alpha\sec\alpha + \angle\alpha) = L$, und $\frac{1}{2}(tg\varphi\sec\varphi + \angle\varphi) = l$, so hat man für die Bahn des bewegten Körpers die Differentialformeln:

$$dx = \frac{-c^2\cos^2\alpha dp}{2c^2m(L-l)\cos^2\alpha + g}, \quad dy = \frac{-c^2\cos^2\alpha p dp}{2c^2m(L-l)\cos^2\alpha + g}$$

$$dt = \frac{-c\cos\alpha dp}{\sqrt{[2c^2gm(L-l)\cos^2\alpha + g^2]}}$$

Beweis. Sei c die Geschwindigkeit, welche dem geworfenen

Körper zu Anfang seiner Bewegung nach der Richtung AT ertheilt wurde, und v seine Geschwindigkeit in M, nach der Richtung der Tangente dieses Punktes, dessen Stellungswinkel φ, und x, y die Koordinaten sind, so ist nach (A. 1232)

$$\cos\varphi = \frac{dx}{ds},\ \sin\varphi = \frac{dy}{ds},\ \text{und nach (580)}\ v = \frac{ds}{dt}$$

Wird nun der Widerstand der Luft nach der Richtung der Bewegung mit R bezeichnet, also $R = mv^2$ gesetzt, so erhält man nach Zerlegung dieses Widerstandes in eine horizontale und eine vertikale Seitenkraft

$$\text{jene} = mv^2\cos\alpha = \frac{mds^2}{dt^2}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{mds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$\text{diese} = \frac{mds^2}{dt^2}\cdot\frac{dy}{ds} = \frac{mds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Auf gleiche Weise zerfällt die bewegende Kraft

$$\frac{d^2s}{dt^2}\ \text{in die Seitenkräfte}\ \frac{d^2x}{dt^2}\ \text{und}\ \frac{d^2y}{dt^2}$$

und man hat die Bewegungsgleichungen

$$\text{I.}\quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mds}{dt}\cdot\frac{dx}{dt},\ \text{und}\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{mds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}$$

deren erstere sich so schreiben läßt:

$$\frac{d^2x}{dt} : \frac{dx}{dt} = -mds$$

und weil jetzt der Dividend das Differentiale des Divisors ist, so folgt durch die Integration nach (A. 912)

$$\lambda\frac{dx}{dt} = -ms + \lambda C,$$

wo λC eine Konstante vorstellt, deren Werth durch die Bedingung gefunden wird, daß die Geschwindigkeit c zu Anfang der Bewe-

Digitized by Google

ging nach der horizontalen Richtung $c\cos\alpha$ war, für $s = 0$; es ist also

$$\lambda \frac{dx}{dt} = -ms + \lambda c\cos\alpha, \text{ oder } \lambda \frac{dx}{c\cos\alpha dt} = -ms$$

woraus $$\text{II.} \quad \frac{dx}{dt} = c\cos\alpha e^{-ms} \text{ folgt.}$$

Sei nun p die Tangente des Stellungswinkels, also

$$p = \operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}, \text{ so wird } \frac{dy}{dt} = \frac{pdx}{dt}$$

also wenn man differentiirt, und durch dt dividirt,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + p \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

welches wegen $\frac{d^2x}{dt^2} = -mds \cdot \frac{dx}{dt}$

in der zweiten der beiden Bewegungsgleichungen I. substituirt

$$\text{III.} \quad \frac{dp}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = -g \text{ gibt.}$$

Wird diese Gleichung durch das Quadrat der Gleichung II. dividirt, so erhält man

$$\text{IV.} \quad \frac{dp}{dx} = -\frac{ge^{2ms}}{c^2\cos^2\alpha}$$

und weil $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{(1 + p^2)}$ ist, so ergibt sich aus IV.

$$\text{V.} \quad dp\sqrt{(1 + p^2)} = -\frac{ge^{2ms}ds}{c^2\cos^2\alpha}$$

nun ist nach Int. 132) $N = 1 + p^2$, also $a = 1$, $b = 1$ setzend, $\int dp\sqrt{(1 + p^2)} = \frac{1}{2}p\sqrt{(1 + p^2)} + \frac{1}{2}\lambda[p + \sqrt{(1 + p^2)}]$, oder weil $p = \operatorname{tg}\varphi$ ist

$$\int dp\sqrt{(1 + p^2)} = \frac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi\sec\varphi + \mathfrak{L}\varphi);$$

Digitized by Google

wenn also l die Bogenlänge der Parabel vorstellt, deren halber Parameter 1 und Stellungswinkel φ ist, so wird nach (367)

$$l = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi\sec\varphi + \mathfrak{L}\varphi),$$

während nach Int. 40)

$$-\int\frac{ge^{2ms}ds}{c^2\cos^2\alpha} = -\frac{ge^{2ms}}{2c^2m\cos^2\alpha} \text{ ist.}$$

Durch Substitution dieser Integrale in der Gleichung V. findet man

$$l = -\frac{ge^{2ms}}{2c^2m\cos^2\alpha} + C,$$

wo C die Konstante der Integration vorstellt, und weil für $s=0$, $p = \operatorname{tg}\alpha$, wodurch l in $\tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha\sec\alpha + \mathfrak{L}\alpha) = L$ übergeht, so findet man $C = L + \frac{g}{2c^2m\cos^2\alpha}$ und hiemit wird vollständig

$$\text{VI.}\quad l = -\frac{ge^{2ms}}{2c^2m\cos^2\alpha} + L + \frac{g}{2c^2m\cos^2\alpha}$$

Substituirt man hierin den Werth von $e^{2ms} = -\frac{c^2\cos^2\alpha dp}{gdx}$ gezogen aus der Gleichung IV., so ergibt sich sofort dx wie oben. Nun ist $p = \frac{dy}{dx}$, also $dy = pdx$, wodurch dy zum Vorschein kommt, und aus der Gleichung III. erhält man

$$dt^2 = -\frac{dp\,.\,dx}{g} = \frac{c^2\cos^2\alpha dp^2}{2c^2gm(L-l)\cos^2\alpha + g^2}$$

woraus der Ausdruck für dt durch Wurzelziehung unmittelbar folgt.

610. Folgesatz. Für den Scheitel der Wurflinie ist $p = 0$, $l = 0$, dann gibt die Integration der Ausdrücke für dx und dy die beiden Koordinaten des Scheitels, und eben so erhält man für die Zwischenwerthe von p, nämlich von $p = \operatorname{tg}\alpha$ bis $p = 0$, die Lage der Punkte für den aufsteigenden Ast der Kurve, und wenn p negativ genommen wird, die Lage der Punkte in dem

Digitized by Google

niedersteigenden Aste derselben. Für den Werth von p, wo $y = 0$ ist, findet man die gesuchte Wurfweite.

611. Anmerkung. Die Integration der für dx, dy, dt angegebenen Ausdrücke kann aber nicht in geschlossenen Ausdrücken vollzogen werden. Führt man sie näherungsweise aus, so zeigt sich, daß die Wurfweite nicht mehr das Doppelte der Abszisse des Scheitels sei, sondern es fällt der Scheitel über die Mitte der Wurfweite hinaus: auch ist die Wurfweite nicht mehr die größte bei einem Winkel von $\frac{1}{4}\pi$, sondern bei einem kleinern Winkel. Die beiden Aeste der Kurve sind einander ungleich; der aufsteigende erhebt sich langsamer bis zum Scheitel, der niedersteigende Ast aber senkt sich rascher gegen den Horizont, und wird er unter denselben verlängert, so nähert er sich immer mehr einer vertikalen Asymptote.

612. Aufgabe. Wenn der Elevationswinkel nur wenige Grade beträgt, die Gleichung der Bahn des geworfenen schweren Körpers zu finden.

Auflösung. Heißt α der Elevationswinkel von der Größe, daß im Ausdrucke $p = \operatorname{tg}\alpha$ die zweite und höheren Potenzen von p vernachlässigt werden können, und h die Geschwindigkeitshöhe des Wurfes, so hat man

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{8m^2h}(e^{2mx} - 2mx - 1)$$

als Gleichung der Wurflinie.

Beweis. Da $ds = dx\sqrt{(1 + p^2)}$ ist, so folgt bei Weglassung der Größe p^2, $ds = dx$, und $s = x$, wodurch die Gleichung IV. in (609) die Form erhält

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{ge^{2mx}}{c^2\cos^2\alpha}$$

und weil dann nahe $\cos^2\alpha = 1$ ist, wenn man $2gh$ statt c^2 setzt, so wird

$$dp = -\frac{1}{2h}e^{2mx}dx,$$

Digitized by Google

deſſen Integrale ſich nach Int. 40)

$$p = -\frac{1}{4mh}e^{2mx} + C$$

ergibt; da für $x = 0$, $p = \operatorname{tg}\alpha$ iſt, ſo hat man

$$C = \operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{4mh}$$

mithin vollſtändig

$$\text{I.}\quad p = \operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{4mh}(e^{2mx} - 1)$$

Multiplizirt man dieſe Gleichung mit dx, ſo wird wegen $pdx = dy$

$$dy = [\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{4mh}(e^{2mx} - 1)]dx;$$

integrirt man dieſen Ausdruck ſo, daß x mit y verſchwindet, ſo findet man

$$\text{II.}\quad y = x\operatorname{tg}\alpha - (e^{2mx} - 2mx - 1) : 8m^2h.$$

613. Folgeſatz. Für die Wurfshöhe iſt $p = 0$, daher aus

$$\text{I. (612)}\qquad e^{2mx} = 1 + 4mh\operatorname{tg}\alpha;$$

hieraus folgt

$$x = \frac{1}{2m}\lambda(1 + 4mh\operatorname{tg}\alpha),$$

und dieſe Werthe für e^{2mx} und x in die Gleichung II. (612) geſetzt, geben die geſuchte Wurfshöhe.

Für die Wurfsweite aber iſt $y = 0$, alſo aus II. (612)

$$e^{2mx} = 1 + 2mx + 8m^2hx \,.\, \operatorname{tg}\alpha$$

eine transzendente Gleichung, aus welcher ſich die Wurfweite x mittelſt der gegebenen Größen m, h, α beſtimmen läßt. Die Zeit der Bewegung findet man aus der Gleichung $gdt^2 = -dx \,.\, dp$, wo ſtatt dp der vorhin gefundene Werth $-e^{2mx}dx : 2h$ zu ſezzen iſt; dieß gibt

Digitized by Google

$$dt = \frac{e^{mx}dx}{\sqrt{2gh}}, \text{ und } t = \frac{e^{mx}-1}{m\sqrt{2gh}}$$

III. Centralbewegung.

1. Das Gravitationsgesetz.

614. Erklärung. Bewegt sich ein materieller Punkt mit einer ihm anfänglich mitgetheilten Geschwindigkeit so, daß er, während er in seiner Bahn fortschreitet, von einer kontinuirlichen Kraft, deren Richtung durch einen unbeweglichen Punkt geht, unaufhörlich angezogen wird, so heißt die Bewegung des materiellen Punktes eine Centralbewegung, und die kontinuirliche Kraft, die den materiellen Punkt beständig von seiner Richtung ablenkt, die Centripetalkraft; die Kraft hingegen, welche ihn nach seiner Richtung geradlinig fortbewegt hätte, wenn keine Centripetalkraft vorhanden wäre, die Tagentialkraft; beide genannten Kräfte heißen Centralkräfte, während der unbewegliche Punkt, gegen den die Richtung der Centripetalkraft fortwährend geht, der Mittelpunkt der Bewegung genannt wird.

615. Erklärung. Die gerade Linie, welche den Mittelpunkt der Bewegung mit dem Orte des bewegten Punktes zu irgend einer Zeit verbindet, heißt der Radiusvektor desselben. Wenn der bewegte Punkt in einer gewissen Zeit von einem Orte seiner Bahn nach einem andern gelangt ist, so wird der von dem durchlaufenen Bogen und den Radienvektoren der beiden Endpunkte desselben begrenzte Raum die von dem Radiusvektor in der dazu verwendeten Zeit beschriebene Fläche genannt. Der kleinste Radiusvektor bezeichnet in der Bahn des materiellen Punktes einen Punkt, welchen man bei Planetenbahnen, deren Mittelpunkt der Bewegung die Sonne einnimmt, das Perihelium nennt. In der Figur 173 ist SM der an den Punkt M gezogene Radiusvektor, und SMm die vom Radiusvektor während der Zeit seiner Bewegung von M nach m beschriebene Fläche; der Punkt P ist das Perihelium.

616. Erklärung. Wenn die Bewegung des materiellen Punk-

Digitized by Google

tes in einer geschlossenen Kurve $PMAE$ vor sich geht, so heißt der Punkt A, dessen Radiusvektor am größten ist, das Aphelium seiner Bahn, die Punkte A und P zusammen die Apsiden, die Gerade AP die Apsidenlinie. Die Zeit, welche der bewegliche Punkt verwendet, um vom Perihelium aus die ganze Bahn zurückzulegen, nennt man seine Umlaufszeit. Der Winkel PSM am Mittelpunkte der Bewegung, welchen der Radiusvektor SM eines Ortes zu irgend einer Zeit mit SP einschließt, die wahre Anomalie des beweglichen Punktes. Zieht man durch die Sonne an den Punkt der Nachtgleichen die Gerade SX, so heißt der Winkel MSX die wahre Länge in der Bahn und der Winkel PSX die Länge des Periheliums.

617. Erfahrung. Kepler hat durch Vergleichung einer großen Anzahl der von Tycho de Brahe beobachteten Planetenörter, folgende nach ihm benannten Gesetze entdeckt:

I. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, deren Radiusvektor um den Mittelpunkt der Sonne Flächen beschreibt, die der Zeit proportional wachsen.

II. Den Brennpunkt der Ellipsen nimmt die Sonne ein.

III. Die Quadrate der Umlaufszeiten der Planeten um die Sonne verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Axen ihrer elliptischen Bahnen.

618. Lehrsatz. Die Bewegung der Planeten ist eine Centralbewegung, in welcher den Mittelpunkt der Bewegung die Sonne einnimmt.

Beweis. Zieht man durch den Mittelpunkt der Sonne S die rechtwinkligen Axen SX, SY, und zerlegt die unbekannte Kraft, welche die Bewegung der Planeten erzeugt, in zwei den genannten Axen parallele Kräfte X, Y, so hat man, indem man die Koordinaten eines Punktes M in der Bahn mit x, y bezeichnet,

$$\text{I.} \quad X = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Allein nach (A. 1265) ist der zwischen zwei Radienvektoren

enthaltene Flächenraum $\frac{1}{2}(ydx - xdy) = \frac{1}{2}r^2dv$, wo v den Winkel bezeichnet, den ein an den Punkt x, y geführter Radiusvektor mit der Axe der x einschließt; sonach hat man

$$ydx - xdy = r^2dv.$$

Vermöge des ersten Kepler'schen Gesetzes ist nun bei der Planetenbewegung eine solche Fläche der Zeit proportional; man hat also, wenn man die in der Zeiteinheit beschriebene Fläche mit $\frac{1}{2}c$ bezeichnet, die in der Zeit dt beschriebene Fläche $= \frac{1}{2}cdt$, daher ist

$$\text{II.}\quad ydx - xdy = cdt.$$

Differentiirt man diese Gleichung, so folgt $yd^2x - xd^2y = 0$, und hieraus

$$y \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = x \cdot \frac{d^2y}{dt^2}, \text{ oder wegen I. } Xy = xY$$

nämlich es ist $X : Y = x : y$; es verhalten sich also die Seitenkräfte X, Y, wie die zusammengehörenden Koordinaten x, y des bewegten Planeten, welches nur dann der Fall sein kann, wenn die Richtung ihrer Resultirenden in die Gerade fällt, welche den Planeten und den Anfangspunkt der Koordinaten verbindet.

619. Erklärung. Man nennt die Kraft, mit welcher die Sonne die Planeten anzieht, die Gravitation, und das Gesetz, nach welchem diese Anziehung mit der Entfernung der Planeten von der Sonne sich ändert, das Gravitationsgesetz.

620. Lehrsatz. Die anziehende Kraft der Sonne gegen die Planeten ist dem Quadrate ihrer Entfernungen von der Sonne verkehrt proportional.

Beweis. Sei $PMDAE$ (Fig. 173) die Ellipse als Bahn eines um die Sonne bewegten Planeten, in dem Brennpunkte S die Sonne, die halbe große Axe $CP = a$, und die Excentrizität $CP = ae$, also die kleine Halbaxe $CD = a\sqrt{(1 - e^2)} = b$; sind ferner der Radiusvektor $SM = r$, und die Länge des Planeten $MSX = v$, die Länge des Perihe liums $MSP = \omega$, also die wahre Anomalie $MSP = v - \omega$, so hat man nach (A. 1103) die Polargleichung der Ellipse

Digitized by Google

I. $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\omega)}$, mithin II. $\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos(v-\omega)}{a(1-e^2)}$

Man bezeichne die bewegende Kraft der Sonne auf dem Planeten mit R, und zerlege sie nach den Richtungen der Axen in zwei Seitenkräfte, so ist, weil nach (A. 1016)

$$\cos v = \frac{x}{r},\ \sin v = \frac{y}{r} \text{ ist,}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -R.\frac{x}{r},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -R.\frac{y}{r}$$

wo das der Größe R vorgesetzte Zeichen negativ ist, weil die Kraft R den Planeten gegen die Sonne treibend, die Koordinaten x, y zu vermindern strebt. Hieraus folgt, indem man die erste Gleichung mit dx, die andere mit dy multiplizirt und die Produkte addirt,

$$\frac{dx\,.\,d^2x + dy\,.\,d^2y}{dt^2} = -\frac{R}{r}(xdx + ydy)$$

nun ist $xdx + ydy = \frac{1}{2}d(x^2+y^2) = \frac{1}{2}dr^2 = rdr$, und

$$\frac{dx\,.\,d^2x + dy\,.\,d^2y}{dt^2} = d\,.\,\frac{dx^2+dy^2}{2dt^2}$$

sonach hat man integrirend

$$\text{III.}\quad \frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = b - 2\int R dr,$$

wo b die Konstante der Integration vorstellt.

Allein nach (A. 1226 II.) ist

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2dv^2$$

und nach (618)

$$r^2dv = cdt, \text{ also } dt = r^2dv : c.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung III. ergibt sich

$$\text{IV.}\quad \frac{c^2}{r^4}\cdot\frac{dr^2}{dv^2} + \frac{c^2}{r^2} = b - 2\int R dr.$$

Digitized by Google

Differentiirt man die Gleichung II., wodurch

$$-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{dv}=-\frac{e\sin(v-\omega)}{a(1-e^2)}$$

sich ergibt, und erhebt man den Ausdruck zum Quadrat, so folgt

$$\text{V.}\quad \frac{1}{r^4}\cdot\frac{dr^2}{dv^2}=\frac{e^2\sin^2(v-\omega)}{a^2(1-e^2)^2}=\frac{e^2}{a^2(1-e^2)^2}-\frac{e^2\cos^2(v-\omega)}{a^2(1-e^2)^2}$$

ferner hat man aus der Gleichung II.

$$\frac{e\cos(v-\omega)}{a(1-e^2)}=\frac{1}{r}-\frac{1}{a(1-e^2)}$$

also $\dfrac{e^2\cos^2(v-\omega)}{a^2(1-e^2)^2}=\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{2}{a(1-e^2)}\cdot\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{a^2(1-e^2)^2}$

mithin erhält man diesen Werth in V. substituirend

$$\frac{1}{r^4}\cdot\frac{dr^2}{dv^2}=\frac{2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a^2(1-e^2)^2}$$

wodurch die Gleichung IV. sich in

$$\frac{2c^2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{1}{r}-\frac{c^2}{a^2(1-e^2)}=b-2\int R\,dr$$

verwandelt. Durch Differentiirung dieses Ausdruckes folgt

$$-\frac{2c^2}{a(1-e^2)}\cdot\frac{dr}{r^2}=-2R\,dr,\text{ oder }R=\frac{c^2}{a(1-e^2)r^2}$$

da nun VI. $\dfrac{c^2}{a(1-e^2)r^2}=\mu$ eine konstante Größe ist, so ist

$$R=\frac{\mu}{r^2}$$

621. Folgesatz. Die Sonne zieht also die Planeten in ihrer Bahn mit einer Kraft an, welche gleich $\mu : r^2$ ist, und es bedeutet dann μ die Größe dieser Anziehung in der Einheit der Entfernung, weil für $r=1$, $R=\mu$ wird.

Digitized by Google

622. Lehrsatz. Die Größe der Anziehung der Sonne in der Einheit der Entfernung ist für alle Planeten dieselbe.

Beweis. Sei T die Umlaufszeit eines Planeten um die Sonne, so ist cT die doppelte von dem Radiusvektor während dieser Zeit beschriebene Fläche, und zugleich der doppelte Inhalt der elliptischen Bahn des Planeten. Nun ist der Inhalt einer Ellipse mit den Halbaxen a, b nach (A. 1258) $\pi ab = \pi a^2\sqrt{(1-e^2)}$; daher hat man $cT = 2\pi a^2\sqrt{(1-e^2)}$, und diesen Werth in die Gleichung VI. in (620) gesetzt, erhält man

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$$

In Beziehung auf einen andern Planeten unsers Sonnensystems mögen die Größen

T', a', μ' dieselbe Bedeutung haben, wie T, a, μ, so ist analog

$$\mu' = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2}$$

allein nach dem dritten Kepler'schen Gesetze (617) ist

$$T^2 : T'^2 = a^3 : a'^3, \text{ folglich}$$

$$\frac{a'^3}{T'^2} = \frac{a^3}{T^2}, \text{ und } \mu' = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} = \mu.$$

623. Lehrsatz. Die Geschwindigkeit des in einer Bahn durch Centralkräfte bewegten materiellen Punktes ist dem auf seine Richtung vom Mittelpunkte der Bewegung gefällten Perpendikel umgekehrt proportional.

Beweis. Sei k die Geschwindigkeit, welche der bewegte Punkt M zu irgend einer Zeit t besitzt, r der Radiusvektor, $v - \omega$ seine wahre Anomalie, und p das aus dem Mittelpunkte S auf die Tangente des Punktes M gefällte Perpendikel, so hat man, weil ω konstant ist,

Digitized by Google

$$k = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dv} \cdot \frac{dv}{dt}$$

Nun ist nach (A. 1248)

$$p = \frac{r^2 dv}{ds}, \text{ also } \frac{ds}{dv} = \frac{r^2}{p}$$

hiedurch wird

$$k = \frac{r^2 dv}{pdt} = \frac{c}{p}$$

wegen $r^2 dv = c dt$.

2. Planetenbahnen.

624. Lehrsatz. Die Sonne mag entweder eine feste Kugel oder aber bloß eine inwendig hohle Kugel sein, stets wird ihre Anziehung gegen einen außerhalb ihr gelegenen materiellen Punkt so beschaffen sein, als ob die ganze Masse der Sonne in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Beweis. Sei A (Fig. 174) der Mittelpunkt und $AB = a$ der Halbmesser der kugelförmigen Sonne, in der Verlängerung ihres Durchmessers BD sei in einem Abstande $AP = b$ der angezogene Planet gelegen; in dem Punkte M ihrer Oberfläche befinde sich ein Element Mmn des Sonnenkörpers, dessen Lage durch den Winkel $MAC = \alpha$, und durch den Neigungswinkel ω der Ebene MAC gegen die Ebene xy, und dessen Größe durch den Bogen $Mm = ad\alpha$ und den Bogen $Mn = a\sin\alpha d\omega$ bestimmt werde. Sei da die Höhe oder Tiefe dieses Elements, so ist sein Inhalt gleich

$$da \times ad\alpha \times a\sin\alpha d\omega = a^2 \sin\alpha da d\alpha d\omega;$$

bezeichnet man noch die Dichtigkeit desselben mit ϱ, und dessen Entfernung vom Planeten MP mit u, so ist die Anziehung desselben auf den Planeten in P gleich

$$\frac{\varrho a^2 \sin\alpha . \, da d\alpha d\omega}{u^2}$$

nach der Richtung MP, daher die Anziehung desselben nach der

Richtung $CP = \frac{\varrho a^2 \sin\alpha d a d\alpha d\omega}{u^2} \cos MPC$ oder da $\cos MPC = \frac{b - a\cos\alpha}{u}$ ist, dieselbe Anziehung gleich $\frac{\varrho a^2 \sin\alpha d a d\alpha d\omega (b - a\cos\alpha)}{u^3}$

Im Dreiecke MAP ist aber $u^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\alpha$, woraus sich ergibt

$$a\sin\alpha d\alpha = \frac{u du}{b}, \text{ und } b - a\cos\alpha = \frac{u^2 + b^2 - a^2}{2b}$$

substituirt man diese Werthe in dem eben erhaltenen Ausdrucke, so wird die Anziehung des Sonnenelementes auf den Planeten in der Richtung CP gleich

$$\frac{\varrho a d a}{2b^2}\left(1 + \frac{b^2 - a^2}{u^2}\right) du d\omega.$$

Integriren wir diesen Ausdruck in Beziehung auf ω, und setzt dann $\omega = 2\pi$, so ergibt sich

$$\frac{\pi\varrho a d a}{b^2}\left(1 + \frac{b^2 - a^2}{u^2}\right) du$$

und noch einmal in Beziehung auf u integrirend, erhält man

$$\text{I.} \quad \frac{\pi\varrho a d a}{b^2}\left(u - \frac{b^2 - a^2}{u}\right)$$

weil $\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}$ ist.

Um nun die Anziehung O von der ganzen Sonnenoberfläche zu erhalten, ist für ein Element in B, $u = b - a$, hingegen für ein Element in D, $u = b + a$; hierdurch wird der letzte Ausdruck

$$\text{II.} \quad O = \frac{4\pi\varrho a^2 da}{b^2}$$

Eine dritte Integration in Beziehung auf a gibt die Anziehung K der Sonnenkugel

Digitized by Google

$$\text{III.}\quad K = \frac{4\pi\varrho a^3}{3b^2}$$

Wäre nun die Sonne eine hohle Kugelschale, deren Dicke da ist, so würde $4\pi\varrho a^2 da = m$ ihre Masse und diese im Mittelpunkte der Sonne zu einem materiellen Punkte vereinigt, gäbe nach (620) die Anziehung $O = m : b^2$, welcher Ausdruck auch aus der Gleichung II. unmittelbar folgt. Nimmt man dagegen die Sonne als volle Kugel an, so ist ihre Masse $M = \frac{4}{3}\pi a^3\varrho$, und die Anziehung eines im Mittelpunkte der Sonne enthaltenen materiellen Punktes von dieser Masse wäre $K = M : b^2$, wie in der Gleichung III.

625. Folgesatz. Wäre aber der angezogene materielle Punkt P innerhalb der Oberfläche des anziehenden Körpers gelegen, so müßte man b negativ und kleiner als a nehmen, und man erhielte aus der Gleichung I. den Werth des Ausdruckes von $u = a - b$ bis $u = a + b$ nehmend, die Gesammtanziehung $= \frac{\pi\varrho ada}{b^2}(2b - 2b) = 0$, mithin wird ein Körper innerhalb der Oberfläche eines andern kugelförmigen Körpers nach allen Seiten mit gleicher Stärke angezogen.

626. Aufgabe. Die Polargleichung einer Planetenbahn zu finden.

Auflösung. Heißt, wie vorhin, c der doppelte Inhalt der in der Zeiteinheit vom Radiusvektor r beschriebenen Fläche, μ die Größe der Anziehung der Sonne in der Einheit der Entfernung des Planeten von der Sonne, v die dem Radiusvektor korrespondirende Länge des Planeten, und ω die Länge seines Perihe-liums, endlich b eine konstante Größe, so hat man

$$c^2 = \mu r + r\sqrt{(\mu^2 - bc^2)}\cos(v - \omega)$$

als Polargleichung der Planetenbahn.

Beweis. Man kann nach (622) die bewegende Kraft des Planeten durch $\mu : r^2$ vorstellen, wo μ die Anziehung der Sonne in der Einheit der Entfernung, r den Radiusvektor zu irgend einer Zei-

Digitized by Google

t bedeutet; die den Axen der x und y parallelen Seitenkräfte sind dann

$$\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = \frac{\mu x}{r^3}, \text{ und } \frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = \frac{\mu y}{r^3}$$

man hat daher die Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}$$

woraus folgt, wie in (620)

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{2\mu}{r} - b$$

wenn b die Konstante der Integration vorstellt.

Es ist aber, wenn man den Punkt M (Fig. 173) auf Polarkoordinaten bezieht,

$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2dv^2$, und nach (618) $r^2dv = cdt$

hierdurch verwandelt sich obige Gleichung Kürze halber $\frac{1}{r} = z$ setzend, in $\frac{c^2dz^2}{dv^2} + c^2z^2 - 2\mu z + b = 0$.

Man erhält hieraus $dv = \frac{cdz}{\sqrt{(-b + 2\mu z - c^2z^2)}}$

und nach Int. 73), wenn man dort a, b, c beziehungsweise mit $-b$, 2μ, c^2 vertauscht, ergibt sich

$$v = \arcsin \frac{c^2z - \mu}{\sqrt{(\mu^2 - bc^2)}} = \arccos \frac{\mu - c^2z}{\sqrt{(\mu^2 - bc^2)}} + \omega \quad (\text{A.987})$$

wo ω eine willkührliche Konstante anzeigt.

Durch Umkehrung dieses Ausdrucks folgt

$$c^2z = \mu - \sqrt{(\mu^2 - bc^2)} \cos(v - \omega)$$

oder weil man die Konstante ω um die Zahl π vergrößern kann, wodurch $\cos(v - \omega)$ sein Vorzeichen ändert, wird

$$c^2z = \mu + \sqrt{(\mu^2 - bc^2)} \cos(v - \omega)$$

Digitized by Google

und nach Herstellung des Werthes für $z = 1 : r$

$$c^2 = \mu r + r\sqrt{(\mu^2 - bc^2)}\cos(v - \omega).$$

627. Folgesatz. Um den Grad der Gleichung und die zugehörige krumme Linie zu übersehen, wollen wir diese Polargleichung der Planetenbahn in eine Koordinatengleichung umwandeln. Man stelle sich vor durch den Mittelpunkt der Sonne S zwei Axen SX', SY' gezogen, die mit den vorigen den Winkel $XSX' = \omega$ einschließen, und es seien x', y' die Koordinaten des Punktes M in Beziehung auf diese neuen Axen; da der Radiusvektor SM mit der Axe der x' den Winkel $MSX = v - \omega$ bildet, so hat man

$$x' = r\cos(v - \omega),\ y = r\sin(v - \omega),\ r = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}$$

hierdurch wird obige Polargleichung

$$c^2 = \mu\sqrt{(x'^2 + y'^2)} + x'\sqrt{(\mu^2 - bc^2)}$$

und wenn man diesen Ausdruck rational gemacht hat, erhält man

$$\mu^2 y'^2 + bc^2 x'^2 = c^4 - 2c^2 x'\sqrt{(\mu^2 - bc^2)}$$

eine Gleichung des zweiten Grades, welche nach (A. 1131) einer Ellipse, Hyperbel oder einer Parabel angehört, je nachdem die Konstante b positiv, negativ oder null ist.

628. Folgesatz 2. Ist $\mu^2 = bc^2$, so wird nach (A. 1134) die Planetenbahn ein Kreis vom Halbmesser $c^2 : \mu = \mu : b$. Wenn also ein Planet im verkehrten quadratischen Verhältnisse der Entfernungen zur Sonne angezogen wird, so beschreibt er um die Sonne einen Kegelschnitt.

629. Folgesatz 3. Sei zu Anfang der Bewegung eines Planeten l die Entfernung desselben von der Sonne, V dessen Geschwindigkeit, welche eine momentane Kraft ihm nach der Richtung der Bewegung, die den Winkel θ mit dem Radiusvektor r einschließt, mitgetheilt hat, so hat man gleichzeitig

$$r = l,\ \frac{dr}{dt} = V\cos\theta, \text{ und } \frac{ds}{dt} = V$$

Digitized by Google

substituirt man diese Werthe in die obigen Bewegungsgleichungen

$$\frac{dr^2 + r^2dv^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + b = 0, \text{ und } r^2dv = cdt$$

so erhält man die Werthe der Konstanten

$$b = \frac{2\mu}{l} - V^2, \text{ und } c = Vl\sin\theta$$

es ist also b positiv, negativ oder null, je nachdem V^2 kleiner, größer oder gleich ist der Größe $2\mu : l$ und im Kreise (628) ist $b = \mu : l$, und $\mu = V^2.l$, oder $R = V^2 : l$; woraus folgt, daß der Kegelschnitt, welchen ein Planet beschreiben muß, bloß von seiner Geschwindigkeit und Entfernung von der Sonne im ersten Augenblicke der Bewegung abhängt. Die anfängliche Richtung des bewegten Körpers hat auf die Gattung des Kegelschnitts keinen Einfluß, und ändert bloß die Abmessungen der beschriebenen Bahn.

630. Anmerkung. Das von Newton zuerst entdeckte Gesetz der allgemeinen Schwere oder der Gravitation erstreckt sich auf alle Weltkörper, und wird nur noch durch die Massen der sie anziehenden Körper so modifizirt, daß jede Masse von jeder andern Masse angezogen wird, und diese Anziehungen verhalten sich direkt, wie die Massen, und umgekehrt, wie die Quadrate der Entfernungen. Hiedurch erleidet auch das dritte Kepler'sche Gesetz eine kleine Aenderung. Sind nämlich T, T' die Umlaufszeiten, m, m' die Massen zweier Planeten, a, a' die halben großen Axen ihrer Bahnen, und M die Masse der Sonne, so wird $T^2 : T'^2 = a^3(M + m') : a'^3(M + m)$.

3. Die Schwungkraft.

631. Erklärung. Das Bestreben, welches ein im Kreise bewegter Körper äußert, sich nach der Richtung des Halbmessers vom Mittelpunkte des Kreises zu entfernen, nennt man dessen Schwungkraft.

632. Lehrsatz. Die Schwungkraft eines materiellen Punktes, der sich am Umfange eines Kreises bewegen muß, ist dem Qua-

Digitized by Google

drate der Geschwindigkeit, dividirt durch den Halbmesser des Kreises, gleich.

Beweis. Nimmt man die unendlich kleine Zeit dt zur Einheit an, so verwandeln sich die Ausdrücke für die bewegende Kraft nach Richtungen, die den Axen parallel laufen,

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} \text{ in } d^2x, d^2y;$$

heißt also, wie vorhin, R die Schwungkraft für die Einheit der Masse, und θ der Winkel XCM (Fig. 174), den der Halbmesser des Punktes M mit der Axe CX einschließt, so folgt

$$d^2x = -R\cos\theta, \; d^2y = -R\sin\theta, \text{ oder weil}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}, \; \sin\theta = \frac{y}{r}, \text{ so wird } d^2x = -\frac{Rx}{r}, \; d^2y = -\frac{Ry}{r}$$

Multiplizirt man diese Gleichungen beziehungsweise mit x und y, und nimmt die Summe der Produkte, so ergibt sich

$$xd^2x + yd^2y = -\frac{R(x^2+y^2)}{r} = -Rr, \text{ also ist}$$

$$R = -\frac{xd^2x + yd^2y}{r}$$

Man hat aber $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, und nach (A. 1226 III.), wenn r konstant ist, $d^2x = -r\cos\theta d\theta^2$, und $d^2y = -r\sin\theta d\theta^2$; durch Substitution dieser Werthe ergibt sich $R = rd\theta^2$. Nun ist $rd\theta$ der Kreisbogen, der in der unendlich kleinen Zeit dt beschrieben wird, mithin gleich der Geschwindigkeit v des bewegten Punktes, also $rd\theta^2 = v^2 : r$, sonach $R = v^2 : r$, wie in (629).

633. *Folgesatz.* Ist T die Zeit in Sekunden, während welcher der materielle Punkt den ganzen Umfang $2r\pi$ des Kreises zurücklegt, so hat man, weil nach (623) die Bewegung im Kreise eine gleichförmige ist, $2r\pi = v \cdot T$, also $v = 2r\pi : T$, und hiermit erhält man aus (632)

$$R = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Digitized by Google

634. Anmerkung. Bei der Bewegung eines materiellen Punktes durch das Element einer beliebigen Kurve, bezeichnet die Schwungkraft den Druck, den das Element nach der Richtung der Normale desselben zu erleiden hat, und es ist im Ausdrucke (632), wenn v die Geschwindigkeit des bewegten Punktes vorstellt, nur noch der Krümmungshalbmesser ϱ des Elementes statt r zu setzen, um die Schwungkraft $R = v^2 : \varrho$ zu erhalten. Ist aber m die Masse des beweglichen Punktes, dann wird $R = mv^2 : \varrho$ (630).

IV. Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebenem Wege.

635. Lehrsatz. Wenn ein materieller Punkt bloß durch die Schwere längs einer vertikalen krummen Linie bewegt wird, so erlangt er in jedem Punkte derselben jene Geschwindigkeit, welche er im freien Falle durch die Höhe des beschriebenen Bogens erhalten hätte.

Beweis. Sei BMA (Fig. 175) der Bogen einer krummen Linie, welche ganz in einer vertikalen Ebene gelegen ist, und A ihr tiefster Punkt; sei ferner $y = fx$ die Gleichung dieser Kurve, bezogen auf den Anfangspunkt im Punkte A und eine vertikale Abszissenaxe AX. Der materielle Punkt sei Anfangs im Punkte B, und werde sodann bloß der Einwirkung der Schwere überlassen; er gelange nach Verfluß einer Zeit t von B gegen M, nachdem er den Raum $BM = s$ beschrieben und in M eine Geschwindigkeit v erlangt hat. Die bewegende Kraft in vertikaler Richtung ist die Beschleunigung g der Schwere, in horizontaler Richtung aber ist sie null; man hat daher

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g, \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$$

Das Vorzeichen — bezieht sich auf die Abnahme der Koordinaten bei fortdauernder Bewegung; multiplizirt man die erste Gleichung mit $2dx$, die andere mit $2dy$, so gibt die Summe dieser Produkte

$$\frac{2(dxd^2x + dyd^2y)}{dt^2} = -2gdx, \text{ oder}$$

$$d \cdot \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = d \cdot \frac{ds^2}{dt^2} = -2gdx$$

und wenn man integrirt, erhält man

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = -2gx + C$$

Ist nun zu Anfang der Bewegung, da der materielle Punkt in B war, die Geschwindigkeit null, da dann $x = AD = b$ sei, so wird $0 = -2gb + C$, also $C = 2gb$, und daher vollständig $v^2 = 2g(b - x)$,
nun ist $b - x = DP$ die Fallhöhe des bewegten Punktes, für welche ein frei fallender Körper nach (590) eine Geschwindigkeit $v' = \sqrt{2g} \cdot DP$ erhalten hätte; sonach ist $v = v'$.

636. Folgesatz. Die Zeit der Bewegung zu finden, hat man wegen (580)

$$v = \frac{ds}{dt}, \text{ mithin } \frac{ds^2}{dt^2} = 2g(b - x), \text{ woraus}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(b-x)}}, \text{ und } t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{ds}{\sqrt{(b-x)}} \text{ folgt.}$$

Es ist also die Geschwindigkeit des bewegten Punktes von der Gattung der Kurve, auf welcher die Bewegung Statt hat, unabhängig; die Zeit der Bewegung aber richtet sich nach der Natur der krummen Linie selbst.

637. Folgesatz 2. Ein schwerer materieller Punkt erhält bei seiner Bewegung auf der schiefen Ebene dieselbe Geschwindigkeit, wie beim freien Falle durch die Höhe der schiefen Ebene. Da aber die Kräfte P, Q, welche einander an der schiefen Ebene das Gleichgewicht halten, nach (582 und 583) sich wie die Beschleunigungen verhalten, und hier die Kraft P parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkt, so folgt, wenn man mit G die Beschleuni-

Digitized by Google

gung der Bewegung auf der schiefen Ebene, mit g die Beschleunigung der Schwere bezeichnet, nach (544 II.)

$$G = g(\cos\alpha \pm \mu\sin\alpha).$$

Es ist daher wegen (589), wenn die Geschwindigkeit der Bewegung auf der schiefen Ebene mit v, der zurückgelegte Raum mit s bezeichnet wird,

$$v = g(\cos\alpha \pm \mu\sin\alpha)t,\ s = {}^1/_2 g(\cos\alpha \pm \mu\sin\alpha)t^2$$

Ist hierbei die Reibung $\mu = 0$, so wird

$$G = g\cos\alpha,\ v = gt\cos\alpha,\ s = {}^1/_2 gt^2\cos\alpha,\ v^2 = 2gs\cos\alpha,$$

unter α den Böschungswinkel der schiefen Ebene verstanden.

638. Erklärung. Eine krumme Linie heißt eine tautochronische Kurve, wenn jeder ihrer vertikalen Bögen, bis zum unterst gelegenen Scheitel, in derselben Zeit durchlaufen wird: hingegen heißt sie eine brachystochronische Kurve, wenn ein zwischen zwei gegebenen Punkten enthaltener vertikale Bogen unter allen Kurven in der kürzesten Zeit zurückgelegt wird. In der tautochronischen Kurve werden die ungleichen Bögen MA, BA einer krummen Linie von einem schweren materiellen Punkte in derselben Zeit beschrieben, während die Dauer der Bewegung durch gleich begrenzte Bögen verschiedener Kurven in der brachystochronischen Kurve die kürzeste ist.

639. Lehrsatz. Die Cykloide ist eine tautochronische Kurve.

Beweis. Bei der Cykloide ist, wenn man AB (Fig. 176) zur Abszissenaxe und den Punkt A zum Anfangspunkte nimmt, nach (A. 1353)

$$x = r\arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{(2ry - y^2)},$$

hieraus folgt

$$dx = \frac{ydy}{\sqrt{(2ry - y^2)}},\ \text{und}\ ds = dy\sqrt{\frac{2r}{2r-y}}$$

Kehrt man nun die Figur ACB um, so daß die Basis AB

Digitized by Google

horizontal bleibt, der Scheitel C aber nach C' zu unterst zu liegen kommt, so gelangt der Punkt M nach M'. Ist jetzt der Anfangspunkt der Koordinaten im Punkte C', und die Axe $C'D$ vertikal und zugleich die neu gewählte Abszissenaxe, so ist

$$PM' = y = DQ' = 2r - x, \text{ demnach } dy = -dx;$$

mit diesen Werthen wird $ds = -dx\sqrt{\frac{2r}{x}}$, demnach aus (636)

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int \frac{-dx\sqrt{2r}}{\sqrt{(bx - x^2)}} = \sqrt{\frac{r}{g}}\int \frac{-dx}{\sqrt{(bx - x^2)}}$$

und nach Int. 143)

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \arccos \frac{2x - b}{b} + C$$

zu Anfang der Bewegung war $x = b$, und $t = 0$, also

$$0 = \sqrt{\frac{r}{g}} \arccos \frac{b}{b} + C = \sqrt{\frac{r}{g}} \arccos 1 + C$$

und weil der Bogen, dessen Cosinus die Einheit ist, verschwindet, so ist $C = 0$, mithin vollständig

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \arccos \frac{2x - b}{b}$$

Für den untersten Punkt ist aber $x = 0$, und $\arccos \frac{2x-b}{b}$ $= \arccos -1 = \pi$, sonach ist in der Cykloide die Zeit der Bewegung von irgend einem Punkte bis zum Scheitel, oder

$$t = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

ein Ausdruck, der von der Größe des Cykloidalbogens ganz unabhängig ist; folglich werden wie immer ungleiche Cykloidalbögen $M'C$, mc von einem schweren materiellen Punkte in derselben Zeit beschrieben.

Digitized by Google

Daß die Cykloide auch eine Brachystochrone sei, findet man unter Anderem in Poisson's o. a. Mechanik, §. 198.

1. Bewegung auf krummen Linien.

640. Aufgabe. Die Dauer der Bewegung eines schweren materiellen Punktes in einem vertikalen Kreisbogen zu finden.

Auflösung. Bezeichnet a den Halbmesser des Kreises, b den Pfeil oder Sinus versus des Kreisbogens, welcher beschrieben wird, so hat man die Zeit t der Bewegung durch den Kreisbogen von B bis A (Fig. 177) nach der Formel:

$$t = \tfrac{1}{2}\pi\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2a}+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{b}{2a}\right)^3+\ldots\right]\sqrt{\frac{a}{g}}$$

Beweis. Im Kreise ist nach (A. 1218) $ds = \frac{adx}{y}$; wird nun der Punkt A zum Ursprunge der Koordinaten, und der vertikale Halbmesser AC zur Abszissenare genommen, so hat man für irgend einen Punkt D des Kreisbogens $AF = x$, $DF = y$, und es ist $y = \sqrt{(2ax - x^2)}$, daher aus (636)

$$dt = \frac{a}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)(b-x)}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\left(1-\frac{x}{2a}\right)(bx-x^2)}}$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, entwickle man die Größe $\left(1-\frac{x}{2a}\right)^{-1/2}$ in die Reihe

$$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2a}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2a}\right)^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{x}{2a}\right)^3+\ldots$$

so wird $dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2a}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{x}{2a}\right)^2+\ldots\right]$

folglich

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\int\frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2a}\int\frac{xdx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$$
$$+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{2a}\right)^2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}+\ldots$$

Digitized by Google

und nach (A. 950) wird

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}=\pi,\quad \int_0^b \frac{xdx}{\sqrt{(bx-x^2)}}=\tfrac{1}{2}b\pi,$$

$$\int_0^b \frac{x^2dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}=\frac{1.3}{2.4}b^2\pi,\quad \int_0^b \frac{x^3dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}=\frac{1.3.5}{2.4.6}b^3\pi$$

$$\int_0^b \frac{x^4dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}=\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}b^4\pi.$$

Durch Verbindung dieser Ausdrücke erhält man sofort t wie oben.

641. Folgesatz. Wir ersehen hieraus, daß die Dauer der Bewegung eines schweren materiellen Punktes auf einem Kreisbogen desto größer sei, je größer der Pfeil b oder je länger der Kreisbogen selbst ist. Im Falle, daß b gegen $2a$ so klein ist, um den Bruch $b:2a$ und dessen Potenzen vernachlässigen zu können, erhält man

$$t=\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

d. i. die Bewegung eines schweren materiellen Punktes in kleinen Kreisbögen bis zum tiefsten Punkte des Durchmessers erfolgt in derselben Zeit.

2. Das einfache Pendel.

642. Erklärung. Unter einem Pendel versteht man im Allgemeinen einen festen Körper, welcher vermöge seiner Schwere eine hin- und hergehende, d. h. schwingende Bewegung um einen festen Punkt oder um eine horizontale Axe annimmt, sobald er durch eine Kraft aus der Lage seines Gleichgewichts gebracht wird. Denkt man sich in A (Fig. 177) einen schweren materiellen Punkt, welcher vermittelst eines gewichtslosen, undehnbaren und unbiegsamen Fadens AC mit einem festen Punkte C so verbunden ist, daß er sich um diesen drehen kann, so heißt die Vorrichtung ein einfacher Pendel. Ist aber in A ein Körper mittelst

einer Stange AC befestigt, und erfolgt die Drehung um eine feste im Punkte C projizirte horizontale Axe, so heißt die Vorrichtung ein zusammengesetzter Pendel. Der Punkt C wird der Drehpunkt oder Aufhängepunkt, die in C projizirte Axe die Drehaxe, die Länge AC des Fadens die Pendellänge, und die Zeit, welche der Pendel braucht, um aus der Lage BC in die Stellung $B'C$ zu gelangen, die Dauer einer Schwingung oder die Schwingungszeit genannt. Der Winkel BCA, um welchen der Pendel aus der vertikalen Lage versetzt wird, und welcher stufenweise abnimmt, so wie das Pendel dieser Lage sich nähert, heißt der Elongationswinkel.

643. Folgesatz. Der materielle Endpunkt eines einfachen Pendels beschreibt während seiner Bewegung einen Kreisbogen BAB', und es ist bei kleinen Kreisbögen nach (641) die Schwingungszeit $T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$; bei größern Kreisbögen aber wird die Schwingungszeit nach (640) gefunden:

$$T = \pi\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{b}{2a} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \ldots\right]\sqrt{\frac{a}{g}}$$

644. Lehrsatz. Wird ein Pendel aus seiner vertikalen Lage gebracht, so ist die Beschleunigung, mit welcher er zum Niedersteigen getrieben wird, dem Sinus des Elongationswinkels proportional.

Beweis. Ist das Pendel nach Verfluß einer Zeit t aus der Lage CB in die Lage CD gekommen, sei $DG = g$ die Beschleunigung der Schwere; durch Verzeichnung des Kräfte-Parallelogramms $DIGH$ zerfällt die Kraft DG in die Kräfte DI, DH, jene nach der Richtung der Tangente des Punktes D, diese in der Richtung des verlängerten Fadens CD; nun ist DG mit CA und GI mit CD parallel, demnach der Winkel $DGI = DCA$; aber $DI = DG\sin DGI = g\sin DCA$, folglich ist die Beschleunigung der Bewegung des Pendels dem Sinus des Elongationswinkels proportional.

645. Folgesatz. Es nimmt zwar die beschleunigende Kraft

des Pendels, bis er in die vertikale Richtung gekommen ist, fortwährend ab, weil aber die Geschwindigkeit der Bewegung (635) im Punkte D gleich $\sqrt{2g(b-x)}$, und im Punkte $A = \sqrt{2gb}$ am größten wird; so kann das Pendel in der Lage CA nicht in Ruhe bleiben, sondern es muß auf der entgegengesetzten Seite bis B' steigen, so lange als die Geschwindigkeit $\sqrt{2gb}$ des Punktes A nicht aufgehoben ist.

646. Erklärung. Man versteht unter Winkelgeschwindigkeit die Geschwindigkeit eines Punktes, welcher bei der drehenden Bewegung in der zur Einheit angenommenen Entfernung von dem Drehpunkte oder der Drehungsaxe gelegen ist. Wenn zwei Pendel in jedem Augenblicke dieselbe Winkelgeschwindigkeit besitzen, so heißen sie isochronische oder gleichzeitig schwingende Pendel. Ein Sekundenpendel heißt dasjenige, dessen jede Schwingung eine Sekunde dauert, welcher mithin binnen 24 Stunden 86400 Schwingungen vollendet.

647. Folgesatz. Heißt ω die Winkelgeschwindigkeit eines Pendels von der Länge l, und v die Geschwindigkeit des Punktes D (Fig. 177), wenn das Pendel in der Lage CD sich befindet, so hat man $v = l\omega$, und auch $v = \sqrt{2g(b-x)}$. Es ist aber, wenn der Winkel $BCA = \alpha$, $DCA = \theta$ gesetzt wird, $AE = l(1-\cos\alpha) = b$, $AF = l(1-\cos\theta) = x$, somit $b - x = l(\cos\theta - \cos\alpha)$; mit diesen Werthen erhält man

$$\omega = \frac{v}{l} = \sqrt{\frac{2g}{l}\,(\cos\theta - \cos\alpha)}$$

648. Folgesatz 2. Setzt man l die Länge eines Sekundenpendels, so folgt aus (643) $T = 1$ genommen, $1 = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ woraus sich $g = \pi^2 l$ ergibt. Man findet also die Beschleunigung der Schwere an irgend einem Orte, wenn man die Länge eines Sekundenpendels durch astronomische Beobachtungen bestimmt, und diese Länge durch das Quadrat der Ludolphischen Zahl π multiplizirt.

Digitized by Google

Beispiel. Sei l=3.145 W. Fuß, so hat man $\log l$=0.497621
$\log \pi = 0.497150$ also $\log \pi^2$=0.994300
$\log . g$=1.491921
und $g = 31.04$ W. Fuß. Und eben so ist die an der Pariser Sternwarte beobachtete Länge des Sekundenpendels
l=0.9938147 Metres = 3.143958 W.Fuß, woraus sich zu Paris g=9.808557 Metres = 31.02964 W. Fuß ergibt.

Um sich über die Bestimmung der Länge des Sekundenpendels und die Beschleunigung der Schwere aus den Versuchen zu unterrichten, lese man die gediegenen Schriften:

Bessel, Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels in den Abhandlungen der mathem. Classe der k. preuß. Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1826.

Bessel, Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht. Berlin, 1832, nebst dem in (A. 1531) bereits angeführten Werke von J. E. Schmidt.

649. Folgesatz 3. Um aus der beobachteten Länge a eines Pendels, dessen eine Schwingung in der Zeit T vor sich geht, die Länge eines Sekundenpendels l abzuleiten, sei N die Zahl der Schwingungen binnen einer gewissen Zeit bei jenem Pendel, während welcher das andere n Schwingungen macht; so hat man

$$NT = N\pi\sqrt{\frac{a}{g}}, \text{ und } n = n\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ also}$$

$$N\pi\sqrt{\frac{a}{g}} = n\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ woraus sich ergibt}$$

$$N^2 : n^2 = l : a, \text{ und es ist } l = aN^2 : n^2,$$

oder, wenn die Beobachtungen beider Pendel während 24 Stunden angestellt wurden, so ist $n = 86400$, und hierdurch

$$l = aN^2 : 86400.$$

650. Anmerkung. Auf diese Weise bestimmte man die Beschleunigungen der Schwere, sowohl unter dem Aequator (A. 1525), als auch an verschiedenen Orten der Erde. Das Ergebniß dieser mit großer Genauigkeit angestellten Beobachtungen war eine Zu-

Digitized by Google

nahme der Erdschwere vom Aequator, wo $g = 9.78019$ Metres beträgt gegen die Erdpole. Da nun nach dem Gravitationsgesetze (620) diese Beschleunigungen sich verkehrt verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen der Beobachtungsorte vom Mittelpunkte der Erde, so schloß man hieraus, daß unsere Erde nicht kugelförmig, sondern am Aequator mehr erhoben, an den Polen aber abgeplattet sei. Die Abplattung beträgt nahe 1 : 290 des Durchmessers vom Erdäquator. Nach Delambre ist der Halbmesser des Aequators 6376522 und die halbe Erdaxe 6355863 Metres.

651. Anmerkung 2. Weil die Sonne täglich um 3′56″=236″ in ihrer Bahn (A. 1512) vorrückt, so ist ein Sterntag oder die Zwischenzeit zweier Kulminationen eines Sterns um diese Dauer kürzer, als der Sonnentag, und beträgt eigentlich nur 23 Stunden 56 Min. und 4 Sek., oder 86164 Sekunden, und so groß ist auch die Zeit, innerhalb welcher die Erde sich einmal um ihre Axe dreht. Man findet also nach (632) die Schwungkraft dieser Umdrehung am Aequator, wenn man dort $r = 6355863$, $T = 86164$ setzt, gleich $0.^{m}0339072$, um welche Größe die wahre Beschleunigung der Erde am Aequator durch die Schwungkraft vermindert wird. Es ist also die erstere, oder
$g' = 9.78019 + 0.03391 = 9.8141$ Metres, und wenn man 9.8141 durch 0.03391 dividirt, ergibt sich nahe 289, oder die Verminderung der Schwere am Aequator durch die Schwungkraft ist der 289 Theil der ersteren. Würde sich also die Erde 17mal schneller drehen als jetzt, so müßte nach (632) ihre Schwungkraft 289mal größer werden, somit die Erdschwere am Aequator geradezu aufheben, und die Körper würden aufhören gegen den Mittelpunkt der Erde zu drücken.

652. Lehrsatz. Die Abnahme der Schwere durch die Schwungkraft der Axendrehung vom Pole der Erde gegen den Aequator hin ist nahe dem Quadrate des Kosinus der geographischen Breite proportional.

Beweis. Sei (Fig. 178) $APQp$ die Erdkugel, Pp ihre Axe und AQ der Aequator; M sei ein Ort auf ihrer Oberfläche,

Digitized by Google

dessen geographische Breite $MCQ = B$ ist. Die Beschleunigung der Schwere am Pole sei g_1, an dem Orte M sei sie, nach Abzug der Verminderung durch die Schwungkraft, gleich g, und am Aequator g_2. Die Schwungkraft in M sei N, und am Aequator N_2, die Winkelgeschwindigkeit der Erde sei ω, der Halbmesser der Erdkugel r. Der Punkt M beschreibt während der gleichförmigen Axendrehung einen Kreis vom Halbmesser $r' = r\cos B$ mit einer konstanten Geschwindigkeit $v = r'\omega$. Hierdurch wird nach (632)

$$N = \frac{v^2}{r} = r'\omega^2 = r\cos B.\omega^2,$$

deren Richtung die Gerade MN ist: durch Verzeichnung des Kräfteparallelogramms $ENDM$ zerfällt sie in die Kraft MD nach der Richtung der Tangente, und in die Seitenkraft ME in der Verlängerung des Erdhalbmessers, nur die letztere trägt zur Verminderung der Schwere bei, und man findet

$$ME = MN \,.\, \cos EMN = N\cos B = r\cos^2 B\omega^2.$$

653. Folgesatz. Man hat also

$$g = g_1 - r\cos^2 B\omega^2 = g_1 - r\omega^2 + r\sin^2 B\omega^2.$$

Nun ist aber $g_1 - r\omega^2$ unter Voraussetzung einer kugelförmigen Gestalt der Erde $= g_2$, mithin ist $g = g_2 + r\sin^2 B\omega^2$, oder weil nach (651) $r\omega^2 = g_2 : 289$, so erhält man

$g = g_2(1 + \sin^2 B : 289)$, d. i. die Zunahme der Schwere vom Aequator gegen die Pole hin ist dem Quadrate des Sinus der geographischen Breite proportional.

654. Anmerkung. Poisson theilt in dem o. a. Werke für die geographische Breite B an dem Meereshorizonte für den leeren Raum und Sekunde der mittlern Sonnenzeit als Zeiteinheit

$$l = 0^m.993512(1 - 0.002588\cos 2B)$$
$$= 3.142938(1 - 0.002588\cos 2B) \text{ Wiener Fuß.}$$
$$g = 9^m.80557(1 - 0.002588\cos 2B)$$
$$= 31.019557(1 - 0.002588\cos 2B) \text{ Wiener Fuß).}$$

Mit der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde ändert sich die Schwere und mit dieser die Länge des Sekundenpendels. Es

Digitized by Google

sei g die Beschleunigung der Schwere, r der Erdhalbmesser und l die Länge des Sekundenpendels an der Oberfläche der Erde. Erhebt man sich um die Größe h über dieselbe, so sei g' die Schwere und l' die Länge des Sekundenpendels, alsdann ist $g : g' = (r + h)^2 : r^2$, folglich

$$g = g' \frac{(r+h)^2}{r^2} = g'\left(1 + \frac{2h}{r} + \ldots\right)$$

$$\text{und } g' = \frac{gr^2}{(r+h)^2} = g\left(1 - \frac{2h}{r} + \frac{3h^2}{r^2} - \ldots\right)$$

Weil aber $h : r$ ein kleiner Bruch ist, so kann man das Quadrat und die höhern Potenzen vernachlässigen, und man erhält

$$g = g'\left(1 + \frac{2h}{r}\right), \; g' = g\left(1 - \frac{2h}{r}\right)$$

folglich nach (648), wenn $g = \pi^2 l$, $g' = \pi^2 l'$ gesetzt wird,

$$l' = l\left(1 - \frac{2h}{r}\right), \; l = l'\left(1 + \frac{2h}{r}\right)$$

655. Erklärung. Wenn das Pendel vermittelst eines Scharnieres um eine vertikale Stange beweglich ist, und diese dann um ihre Axe gedreht wird, so muß das Pendel in Folge der Schwungkraft irgend einen Elongationswinkel annehmen, und es beschreibt die Pendelstange während seiner Bewegung eine Kegelfläche, und der unterste Punkt, im Allgemeinen eine krumme Linie von doppelter Krümmung, welche in einer Kugelfläche befindlich ist, deren Mittelpunkt mit dem Drehpunkte zusammenfällt, und deren Halbmesser die Länge des Pendels ist. Man nennt ein solches Pendel ein konisches Pendel oder ein Centrifugalpendel.

656. Erklärung. Das Centrifugalpendel wird bei Dampfmaschinen gebraucht, um das Reguliren des Zuflusses vom Dampf mittelst der Hähne des Dampfcylinders zu bewirken, und heißt der Regulator. Er besteht aus einer vertikalen Spindel AB (Fig. 179), an welcher mittelst eines Scharnieres C zwei gleiche feste Stangen CDM, CEM, deren untere Enden mit gleich gro-

Digitized by Google

ßen metallenen Kugeln M, M belastet sind, herabhängen. Mit diesen Stangen sind durch Scharniere bei D und E zwei andere Stangen DF, EF verbunden, welche eine Hülse FG tragen, die über die Spindel auf und ab geschoben werden kann. Die Bewegung dieser vier Stangen ist nur in der vertikalen Ebene möglich, welche stets durch die Umdrehungsaxe AB geht. Wenn nun die Umdrehungsgeschwindigkeit wächst, so entfernen sich wegen der zunehmenden Schwungkraft die Kugeln weiter von der Axe, die Stangen DF, FE folgen dieser Bewegung und heben die Hülse FG, mit welcher der Hebel GH zur Umdrehung der Hähne in Verbindung steht. Nimmt aber die Umdrehungsgeschwindigkeit ab, so senken sich die Kugeln durch ihr Gewicht, wodurch die Hülse FG abwärts bewegt wird.

3. Pendelbewegung in widerstehender Luft.

657. Aufgabe. Wenn sich ein einfaches Pendel in widerstehender Luft bewegt, sowohl seine Lage als auch seine Geschwindigkeit zu bestimmen, wenn die Zeit seiner Bewegung gegeben ist.

Auflösung. Heißt α der Elongationswinkel des Pendels zu Anfang der Bewegung, und ist θ dessen Elongationswinkel, v seine Geschwindigkeit nach Verfluß einer Zeit t, innerhalb welcher das Pendel die Hälfte einer Schwingung noch nicht vollbracht hat, so hat man, wenn Kürze halber k eine konstante Größe und γ den Werth $\sqrt{\left(1 - \frac{g\alpha}{4k^2}\right)}$ bedeutet

$$\theta = \alpha e^{\frac{-gt}{2k}} \left[\cos\gamma t \sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{\sqrt{a}g}{2gk} \sin\gamma t \sqrt{\frac{g}{a}}\right]$$

$$v = -\frac{\alpha}{\gamma}\left(\sin\gamma t \sqrt{\frac{g}{a}}\right) e^{\frac{-gt}{2k}} \sqrt{\frac{g}{a}}$$

Beweis. Da die Bewegung eines Pendels, welches seine auf einander folgenden Schwingungen in gleichen Zeiten zurücklegt, nur in kleinen Kreisbögen angenommen werden muß, so kann man seine Geschwindigkeit als so klein betrachten, daß der Wider-

stand der Luft schon der ersten Potenz derselben proportional ist. Setzt man also diesen Widerstand $R = \frac{g}{k} \cdot \frac{ds}{dt}$, wo k das Verhältniß der Dichtigkeit des bewegten Pendels zur Dichtigkeit der Luft vorstellt, so ergibt sich als bewegende Kraft des Pendels nach (644)

$$\text{I.} \quad \frac{d^2s}{dt^2} = g \sin\theta - \frac{g}{k} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Nun ist $s = a(\alpha - \theta)$, wenn a die Pendellänge bedeutet, und $\sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{4}! \theta^5 - \ldots$ wo wegen der Kleinheit der Elongation $\theta < \alpha$, die dritte und die folgenden Potenzen von θ außer Acht fallen; dieß gibt $ds = -ad\theta$, und $d^2s = -ad^2\theta$, und die Gleichung I. verwandelt sich nach Substitution dieser Werthe in

$$\text{II.} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{k} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{g\theta}{a} = 0$$

Diese Differentialgleichung der zweiten Ordnung läßt sich nach (A. 1002) integriren; nimmt man nämlich an, es sei $\theta = e^{\int u dt}$, wo u eine Funktion von t vorstellt, das gesuchte Integrale der Gleichung II., so erhält man

$$d\theta = e^{\int u dt} u dt, \text{ und } d^2\theta = e^{\int u dt} u^2 dt^2 + e^{\int u dt} du dt^2$$

hierdurch verwandelt sich die Gleichung II. in

$$e^{\int u dt}\left(u^2 + du + \frac{g}{k} u + \frac{g}{a}\right) = 0$$

und diesem Ausdrucke wird Genüge geleistet, wenn $du = 0$, und zugleich $u^2 + \frac{gu}{k} + \frac{g}{a} = 0$ genommen wird. Die zweite dieser Bedingungen liefert

$$u = -\frac{g}{2k} \pm \sqrt{\left(\frac{g^2}{4k^2} - \frac{g}{a}\right)} = -\frac{g}{2k} \pm \sqrt{\frac{g}{a}} \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{ag}{4k^2}\right)} \sqrt{-1}$$

setzt man zur Abkürzung

Digitized by Google

$\frac{g}{2k} = \beta$, $\sqrt{(1 - \frac{ag}{4k^2})} = \gamma$, $\frac{g}{a} = \delta$, $\sqrt{-1} = i$, so wird

$$u = -\beta \pm i\gamma\sqrt{\delta}, \text{ und folglich}$$

$$\theta = e^{\int u dt} = Ce^{-\beta t} \cdot e^{i\gamma t\sqrt{\delta}} + C'e^{-\beta t} \cdot e^{-i\gamma t\sqrt{\delta}}$$

wo C, C' zwei noch unbestimmte Konstanten bedeuten. Es ist aber nach (A. 606) wegen $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

$e^{i\gamma t\sqrt{\delta}} = \cos\gamma t\sqrt{\delta} + i\sin\gamma t\sqrt{\delta}$, und

$e^{-i\gamma t\sqrt{\delta}} = \cos\gamma t\sqrt{\delta} - i\sin\gamma t\sqrt{\delta}$, woraus sofort folgt

$\theta = e^{-\beta t}[(C + C')\cos\gamma t\sqrt{\delta} + i(C - C')\sin\gamma t\sqrt{\delta}]$

oder $C + C' = c$, $i(C - C') = c'$ setzend

$\theta = e^{-\beta t}(c\cos\gamma t\sqrt{\delta} + c'\sin\gamma t\sqrt{\delta})$.

Zur Bestimmung der Konstanten c, c' hat man die Bedingungen für $\theta = \alpha$, $t = 0$, und die Geschwindigkeit des bewegten Punktes $= ad\theta : dt = 0$; hierdurch wird erstlich $c = \alpha$, also

$$\text{III. } \theta = e^{-\beta t}(\alpha\cos\gamma t\sqrt{\delta} + c'\sin\gamma t\sqrt{\delta}), \text{ mithin}$$

$$\text{IV. } \frac{d\theta}{dt} = -\beta e^{-\beta t}(\alpha\cos\gamma t\sqrt{\delta} + c'\sin\gamma t\sqrt{\delta})$$

$$+ e^{-\beta t}(-\alpha\sin\gamma t\sqrt{\delta} : \gamma\sqrt{\delta} + c'\cos\gamma t\sqrt{\delta} \cdot \gamma\sqrt{\delta})$$

folglich für $t = 0$ erhält man

$$-\beta\alpha + c'\gamma\sqrt{\delta} = 0, \text{ also } c' = \frac{\alpha\beta}{\gamma\sqrt{\delta}} = \frac{\alpha\sqrt{ag}}{2k\gamma}$$

daher ist vollständig θ wie oben, wenn im Ausdrucke III. statt c β und δ ihre Werthe gesetzt werden; hierdurch ist nun die Lage des Pendels in jedem Augenblicke seiner Bewegung bestimmt. Den Ausdruck IV. kann man aber so schreiben:

$$\frac{d\theta}{dt} = e^{-\beta t}(-\alpha\beta\cos\gamma t\sqrt{\delta} - c'\beta\sin\gamma t\sqrt{\delta} - \alpha\gamma\sqrt{\delta}.\sin\gamma t\sqrt{\delta}$$
$$+ c'\gamma\sqrt{\delta}.\cos\gamma t\sqrt{\delta})$$

Digitized by Google

und es ist, mit Berücksichtigung der Abkürzungen

$$c'\gamma\sqrt{\delta} = \frac{\alpha\sqrt{ag}}{2k} \cdot \sqrt{\frac{g}{a}} = \frac{\alpha g}{2k} = \alpha\beta, \text{ und}$$

$$c'\beta + \alpha\gamma\sqrt{\delta} = \frac{\alpha\beta^2}{\gamma\sqrt{\delta}} + \alpha\gamma\sqrt{\delta} = \frac{\alpha}{\gamma}(\beta^2+\gamma^2\delta)\sqrt{\frac{a}{g}} = \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\frac{a}{g}}$$

hierdurch verwandelt sich die Gleichung IV. in

$$\text{V.} \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\frac{a}{g}} \cdot e^{-\beta t} \cdot \sin\gamma t\sqrt{\frac{g}{a}}$$

woraus die Geschwindigkeit des Pendels v erhellet.

658. *Folgesatz.* Zu Ende einer jeden Schwingung muß die Geschwindigkeit des Pendels null werden; wenn also in V. $v=0$ gesetzt wird, so folgt $\gamma t\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi$, woraus die Dauer T einer Schwingung $T = \frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{a}{g}}$ zum Vorschein kommt. Hieraus ist zu ersehen, daß durch den Widerstand der Luft die Dauer einer jeden Schwingung in dem Verhältnisse $1 : \gamma$ vergrößert wird.

659. *Folgesatz 2.* Heißt α_n die Elongation nach der $n$ten Schwingung, und t die Gesammtdauer dieser n Schwingungen, also (658)

$$t = nT = \frac{n\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{a}{g}}$$

so folgt, wenn man diesen Werth von t in die Gleichung III. substituirt, und α_n statt 0 setzt, da $\beta t = n\pi\sqrt{ag} : 2\gamma k$ wird

$$\alpha_n = \alpha e^{-\beta t}\alpha e^{\frac{-n\pi\sqrt{ag}}{2\gamma k}}$$

welcher Ausdruck zeigt, daß die Elongationen des Pendels bei mehreren auf einander folgenden Schwingungen in einer geometrischen Progression abnehmen, deren Exponent die Größe $c^{\frac{-\pi\sqrt{ag}}{2\gamma k}}$ ist.

Digitized by Google

660. Anmerkung. Borda beobachtete an einem in der Luft schwingenden Pendel, welches durch kein Räderwerk getrieben wurde, daß es nach 1800 Schwingungen nur noch eine Elongation hatte, welche $^2/_3$ der anfänglichen war; man erhält also in (659) $\alpha_n = {}^2/_3\alpha$, $n = 1800$, demnach

$$^2/_3 = e^{\frac{-1800\pi\sqrt{ag}}{2\gamma k}} \quad \text{oder} \quad \frac{1800\pi\sqrt{ag}}{2k} = \gamma\lambda^3/_2 = \gamma(0.40546)$$

nun ist $\frac{ag}{4k^2} = 1 - \gamma^2$, hierdurch wird

$(1800\pi)^2(1-\gamma^2) = \gamma^2(0{,}40846)^2$, und hieraus

$\gamma^2[1800^2\pi^2 + (0{,}40546)^2] = 1800^2\pi^2$, also

$$\gamma = \frac{1800\pi}{\sqrt{[1800^2\pi^2+(0.40546)^2]}} = \left[1+\left(\frac{0.40546}{1800\pi}\right)^2\right]^{-1/2} = 1 - \frac{(0.40546)^2}{2.1800^2\pi^2}$$

$$= 1 - x.$$

Es ist aber $\log 0.40546 = 0.607948 - 1$, also

$\log(0.40546)^2 = 0.215896 - 1$

$\log 1800\pi = 3.752422$ und $\log(1800\pi)^2 = 7.504845$

Unterschied $= 0.711051 - 9$

$x = 0.0000000025705$ $\log 2 = 0.301030$

$\gamma = 1 - x = 0.999999997429$ $\log x = 0.410021 - 9$

Mit dem so bestimmten Werthe von γ findet man k aus der Formel $k = {}^1/_2\sqrt{\frac{ag}{1-\gamma^2}}$.

Man sieht hieraus, weil γ sehr nahe der Einheit gleich kommt, daß man in Beziehung auf die Dauer der Schwingungen eines Pendels den Widerstand der Luft außer Acht lassen könne, und daß bei kleinen Geschwindigkeiten der Widerstand der Luft der ersten Potenz der Geschwindigkeit proportional sei.

Digitized by Google

V. Das Trägheitsmoment.

1. Eigenschaften der Trägheitsmomente.

661. Erklärung. Zerlegt man die Masse eines Körpers in ihre Elemente, oder den Körper, in dessen materiellen Punkte, und multiplizirt ein jedes dieser Elemente in das Quadrat seines Abstandes von einer und derselben geraden Linie, so nennt man die Summe dieser Produkte das Moment der Trägheit der ganzen Masse und die gerade Linie, auf welche die senkrechten Abstände einzelner Massenelemente bezogen werden, die Momentenaxe.

662. Lehrsatz. Wird die Axe der z zur Momentenaxe genommen, so ist das Trägheitsmoment eines Körpers von der Masse M gleich $\int(x^2 + y^2)dM = \iiint(x^2 + y^2)dxdydz$.

Beweis. Sei im Punkte F (Fig. 5) ein Massenelement dM eines Körpers und die Lage dieses Punktes in Beziehung auf die durch den Punkt O gezogenen Koordinatenaxen sei durch die Koordinaten $DF = z$, $DA = y$, $OA = x$ gegeben, und OZ sei zugleich die Axe der Momente, so hat man das auf dieselbe vom Punkte F gefällte Perpendikel $FE = OD = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, und das Trägheitsmoment des Massenelements dM wird $(x^2+y^2)dM$. Hieraus folgt für das Trägheitsmoment der ganzen Masse in Beziehung auf die Momentenaxe OZ der Ausdruck $\int(x^2 + y^2)dM$, oder weil (6)$dM = \varrho dxdydz$ ist, so wird derselbe $\iiint(x^2 + y^2)dxdydz$, für $\varrho = 1$, wo die vorkommenden Konstanten durch die Grenzen bestimmt werden, zwischen welchen die Integrationen zu verrichten sind.

663. Folgesatz. Je nachdem die Axe der z, der y oder der x zur Momentenaxe gewählt wird, erhält das Trägheitsmoment des Körpers beziehungsweise den Werth

$$\int(x^2 + y^2)dM,\ \int(x^2 + z^2)dM,\ \int(y^2 + z^2)dM.$$

664. Lehrsatz. Das Trägheitsmoment eines Körpers in Be-

Digitized by Google

ziehung auf eine beliebige Axe ist gleich dem Trägheitsmomente desselben in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt des Körpers ihr parallel gezogenen Axe, vergrößert um das Produkt aus der Masse des Körpers in das Quadrat des senkrechten Abstandes beider Axen von einander.

Beweis. Sei AB (Fig. 180) die Momentenaxe, hinsichtlich welcher das Trägheitsmoment eines Körpers ST zu bestimmen ist. Man schneide den Körper mit einer durch den Schwerpunkt G gehenden Ebene XGY senkrecht auf AB, wähle den Punkt G zum Anfangspunkte der Koordinaten, GX zur Abszissenaxe GY, GZ zu Axen der y und z, setze die Koordinaten des Durchschnittes der Axe AB mit der Ebene xy, nämlich $GC = b$, $FC = c$, $FG = a$, und bezeichne die Koordinaten eines Punktes M des Körpers MP, MQ, FQ mit x', y', z, und PR, RG mit y, x; so ist $x' = x - b$, $y' = y - c$, daher

$$x'^2+y'^2=(x-b)^2+(y-c)^2=x^2+y^2-2bx-2cy+b^2+c^2$$

und diese Gleichung mit dM multiplizirt und integrirt gibt

$$\int(x'^2+y'^2)dM=\int(x^2+y^2)dM-2b\int xdM-2c\int ydM+(b^2+c^2)M,$$

nun ist $\int xdM$ das statische Moment der Masse M in Beziehung auf die durch ihren Schwerpunkt gehende Axe y, also (82) gleich Null, und eben so $\int ydM = 0$; man hat also, wegen $b^2+c^2=a^2$

$$\int(x'^2+y'^2)dM=\int(x^2+y^2)dM+a^2M.$$

Hierbei ist $\int(x'^2+y'^2)dM$, das Tragheitsmoment des Körpers hinsichtlich der Axe AB, und $\int(x^2+y^2)dM$ das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die zu AB parallele Axe GZ.

665. Folgesatz. Drückt man das Verhältniß des Trägheitsmomentes in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Axe gegen die Masse des Körpers durch k^2 aus, so daß k^2 der Quotient ist aus jenem, getheilt durch die Masse des Körpers, so hat man $\int(x^2+y^2)dM = Mk^2$; bezeichnet man nun den Abstand einer andern, der durch den Schwerpunkt gezogenen, parallelen Momentenaxe mit a, so ist nach (664)

$$\int(x'^2+y'^2)dM = Mk^2 + Ma^2 = M(a^2+k^2)$$

666. Folgesatz 2. Das Trägheitsmoment eines Körpers rücksichtlich einer durch den Schwerpunkt gehenden Axe ist sonach klei-

Digitized by Google

ner, als in Beziehung auf eine jede andere mit ihr parallele Axe. Sind aber beide Axen nicht parallel, so hat auch die Richtung der Momentenaxe auf die Größe des Trägheitsmomentes einen Einfluß.

667. Aufgabe. Das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine der Lage nach gegebene gerade Linie als Momentenaxe zu finden.

Auflösung. Sind α, β, γ die Winkel, welche die Gerade als Momentenaxe mit den drei Koordinatenaxen einschließt, und p ein Perpendikel aus irgend einem Elemente des Körpers auf dieselbe Gerade, also $\int p^2 dM$ das gesuchte Trägheitsmoment des Körpers, so hat man

$$\int p^2 dM = \sin^2\alpha \int x^2 dM + \sin^2\beta \int y^2 dM + \sin^2\gamma \int z^2 dM$$
$$- 2\cos\alpha\cos\beta \int xy dM - 2\cos\alpha\cos\gamma \int xz dM - 2\cos\beta\cos\gamma \int yz dM.$$

Beweis. Sei r der an einen materiellen Punkt des Körpers gezogene Radiusvektor, und x, y, z dessen Koordinaten, bezogen auf ein rechtwinkliges Axensystem und einen Anfangspunkt, welcher in der Richtung der Momentenaxe angenommen wird, so sind nach (A. 1425) $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$ die Kosinusse der Winkel zwischen dem Radiusvektor und den Koordinatenaxen, somit wenn man den Winkel zwischen der Momentenaxe und dem Radiusvektor mit V bezeichnet, nach (A. 1560)

$$\text{I. } \cos V = \frac{x}{r}\cos\alpha + \frac{y}{r}\cos\beta + \frac{z}{r}\cos\gamma,$$

außerdem hat man $p = r\sin V$ und $p^2 = r^2\sin^2 V = r^2 - r^2\cos^2 V$, setzt man nun für $\cos V$ den so eben gefundenen Werth I. und bemerkt, daß $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ sei, so reduzirt sich der Werth von p^2 auf

$$p^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2, \text{ oder}$$
$$\text{II. } p^2 = x^2\sin^2\alpha + y^2\sin^2\beta + z^2\sin^2\gamma$$
$$- 2xy\sin\alpha\sin\beta - 2xz\sin\alpha\sin\gamma - 2yz\sin\beta\sin\gamma,$$

Digitized by Google

multiplizirt man diesen Ausdruck mit dM und integrirt hierauf, so folgt der für $\int p^2 dM$ angegebene Werth.

668. Folgesatz. Das Trägheitsmoment $\int p^2 dM$, in Bezug auf die gegebene Momentenaxe ist demnach von den sechs Integralen

$$\int x^2 dM,\ \int y^2 dM,\ \int z^2 dM \text{ und}$$
$$\int xy dM,\ \int xz dM,\ \int yz dM$$

abhängig. Werden die Koordinatenaxen so gewählt, daß die drei letzteren verschwinden, so vereinfacht sich die Formel (667) auf

$$\int p^2 dM = \sin^2\alpha \int x^2 dM + \sin^2\beta \int y^2 dM + \sin^2\gamma \int z^2 dM.$$

669. Erklärung. Die drei Momentenaxen, hinsichtlich welcher die Integrale $\int xy dM$, $\int xz dM$, $\int yz dM$ verschwinden, nennt man die Hauptmomentenaxen oder kürzer Hauptaxen, und die auf solche Axen bezogenen Trägheitsmomente des Körpers die Hauptträgheitsmomente oder kürzer Hauptmomente.

670. Aufgabe. Wenn die Lage einer Momentenaxe gegen die Hauptaxen bekannt ist, aus den gegebenen Hauptmomenten das Trägheitsmoment des Körpers hinsichtlich dieser Momentenaxe zu finden.

Auflösung. Sind α, β, γ die Winkel, welche die Lage der Momentenaxe hinsichtlich der Hauptaxen bestimmen, und A, B, C die gegebenen Hauptmomente des Körpers, so hat man das gesuchte Trägheitsmoment $\int p^2 dM = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$.

Beweis. Denn man hat nach (668)

$$\int p^2 dM = \sin^2\alpha \int x^2 dM + \sin^2\beta \int y^2 dM + \sin^2\gamma \int y^2 dM,$$

bezeichnet man aber mit A, B, C die Hauptmomente der Trägheit hinsichtlich der Koordinatenaxen, so ist nach (663)

$$\int (x^2 + y^2) dM = C,\ \int (x^2 + z^2) dM = B,\ \int (y^2 + z^2) dM = A$$

und hieraus folgt

$$2\int z^2 dM = A + B - C,\ 2\int y^2 dM = A + C - B,\ 2\int x^2 dM = B + C - A$$

folglich

$$\text{I.}\quad \int p^2 dM = \tfrac{1}{2}A(\sin^2\beta + \sin^2\gamma - \sin^2\alpha)$$
$$+ \tfrac{1}{2}B(\sin^2\alpha + \sin^2\gamma - \sin^2\beta) + \tfrac{1}{2}C(\sin^2\alpha + \sin^2\beta - \sin^2\gamma)$$

nun ist wegen (A. 1525) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, mithin

Digitized by Google

$$\sin^2\beta+\sin^2\gamma-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha,\ \sin^2\alpha+\sin^2\gamma-\sin^2\beta=2\cos^2\beta$$
$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\cos^2\gamma,$$

wodurch die vorige Gleichung I. in

$$\text{II.}\quad \int\rho^2 dM = A\cos^2\alpha+B\cos^2\beta+C\cos^2\gamma \quad \text{übergeht.}$$

671. Lehrsatz. Jeder Körper besitzt wenigstens drei Hauptmomentenaxen, die sich unter rechten Winkeln schneiden.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satzes kann man nur nach einer Rechnung übersehen, die sonst keine Schwierigkeiten hat, als daß sie ziemlich weitläufig ist. Wenn man mit Beibehaltung des Anfangspunktes der Koordinaten von einem System rechtwinkliger Koordinaten x, y, z zu einem andern derlei Koordinatensysteme x', y', z' übergeht, so dienen hierzu die Formeln (A. 1543)

$$\text{I.}\quad \begin{cases} x=(\cos\varphi\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\cos\theta)x' \\ \quad -(\sin\varphi\cos\psi-\cos\varphi\sin\psi\cos\theta)y'+\sin\psi\sin\theta z' \\ y=-(\cos\varphi\sin\psi-\sin\varphi\cos\psi\cos\theta)x' \\ \quad +(\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi\cos\theta)y'+\cos\psi\sin\theta z' \\ z=-\sin\varphi\sin\theta x'-\cos\varphi\sin\theta y'+\cos\theta z', \end{cases}$$

welche wir Kürze halber wie in (A. 1538) durch

$$x=a_1x'+b_1y'+c_1z',\ y=a_2x'+b_2y'+c_2z',\ z=a_3x'+b_3y'+c_3z'$$

darstellen wollen, wo die Bedeutung der Koeffizienten a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 u. s. f. dort angegeben ist. Will man umgekehrt von dem Koordinatensystem x', y', z' zu jenem x, y, z übergehen, so hat man nach (A. 1540)

$$\text{II.}\quad \begin{cases} x'=a_1x+a_2y+a_3z \\ y'=b_1x+b_2y+b_3y \\ z'=c_1x+c_2y+c_3z. \end{cases}$$

Setzt man zur Abkürzung

$m=x\cos\theta\sin\psi+y\cos\theta\cos\psi-z\sin\theta$, $n=x\cos\psi-y\sin\psi$,

so erhält man aus II.

$x'=m\sin\varphi+n\cos\varphi$, $y'=m\cos\varphi-n\sin\varphi$, daher

$x'y'=(m^2-n^2)\cos\varphi\sin\varphi+mn(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$, woraus

Digitized by Google

$\int x'y'dM = \cos\varphi\sin\varphi\int(m^2-n^2)dM + (\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\int mndM$, oder
III. $\int x'y'dM = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\int(m^2-n^2)dM + \cos 2\varphi\int mndM$ folgt.

Man hat ferner

IV. $\int x'z'dM = \cos\varphi\int nz'dM + \sin\varphi\int mz'dM$
V. $\int y'z'dM = \cos\varphi\int mz'dM - \sin\varphi\int nz'dM.$

Soll nun $\int x'y'dM$ verſchwinden, ſo ergibt ſich aus III.

$$\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2\int mndM}{\int(m^2-n^2)dM}$$

und hierdurch findet man nach (A. 691 und 686) ſowohl $\operatorname{tg}\varphi$, als auch $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$. Bezeichnet man noch die Integrale

$$\int x^2dM,\ \int y^2dM,\ \int z^2dM,\ \int xydM,\ \int xzdM,\ \int yzdM,$$

welche von der Geſtalt des Körpers und von der Lage der Koordinatenaxen abhängen, mit f, g, h, f', g', h' beziehungsweiſe, ſo folgt aus den Gleichungen IV. und V., wenn auch die Integrale $\int x'z'dM$ und $\int y'z'dM$ verſchwinden, indem man die erſtere mit $\sin\varphi$, die andere mit $\cos\varphi$ multiplizirt, und die Summe dieſer Produkte nimmt $\int mz'dM = 0$, wenn man aber die erſtere mit $\cos\varphi$, die andere mit $\sin\varphi$ multiplizirt, und die Differenz beider Produkte genommen wird, $\int nz'dM = 0$.

Man erhält nun

$$\begin{aligned} nz' &= (x\cos\psi - y\sin\psi)(x\sin\psi\sin\theta + y\cos\psi\sin\theta + z\cos\theta) \\ &= \sin\theta[\sin\psi\cos\psi(x^2-y^2) + (\cos^2\psi-\sin^2\psi)xy] \\ &\quad + \cos\theta(xz\cos\psi - yz\sin\psi), \text{ mithin} \\ \int nz'dM &= \sin\theta[\sin\psi\cos\psi(f-g) + (\cos^2\psi-\sin^2\psi)f'] \\ &\quad + \cos\theta(g\cos\psi - h'\sin\psi) \end{aligned}$$

und hieraus

$$\text{VI.}\quad \operatorname{tg}\theta = -\frac{g'\cos\psi - h'\sin\psi}{\sin\psi\cos\psi(f-g) + (\cos^2\psi-\sin^2\psi)f'}$$

Man erhält ferner $mz' =$

$(x\cos\theta\sin\psi + y\cos\theta\cos\psi - z\sin\theta)(x\sin\psi\sin\theta + y\cos\psi\sin\theta + z\cos\theta)$

und hieraus, da $\int mz'dM = 0$ werden ſoll,

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{2}\sin 2\theta(f\sin^2\psi+2f'\sin\psi\cos\psi+g\cos^2\psi-h)$$
$$+\cos 2\theta\ (g'\sin\psi+h\cos\psi)=0, \text{ mithin}$$

$$\text{VII.}\quad \operatorname{tg}2\theta = -\frac{2(g'\sin\psi+h'\cos\psi)}{f\sin^2\psi+2f'\sin\psi\cos\psi+g\cos^2\psi+h}$$

Wenn also ψ einen reellen Werth hat, so lassen sich auch reelle Werthe für θ und φ angeben.

Nun ist $\operatorname{tg}2\theta = 2\operatorname{tg}\theta : (1-\operatorname{tg}^2\theta)$; setzt man hierin statt $\operatorname{tg}\theta$ den Werth aus VI., und statt $\operatorname{tg}2\theta$ den Werth aus VII., so folgt nach einigen Reduktionen

$$\frac{(g'\cos\psi-h'\sin\psi)[(f-g)\sin\psi\cos\psi+f'(\cos^2\psi-\sin^2\psi)]}{[(f-g)\sin\psi\cos\psi+f'(\cos^2\varphi-\sin^2\psi)]^2-(g'\cos\psi-h\sin\psi)^2}$$
$$= \frac{g'\sin\psi+h'\cos\psi}{f\sin^2\psi+2f'\sin\psi\cos\psi+g\cos^2\psi-h}$$

Man mache $\operatorname{tg}\psi=u$, also $\sin\psi=\frac{u}{\sqrt{(1+u^2)}}$, $\cos\psi=\frac{1}{\sqrt{(1+u^2)}}$ so ergibt sich aus der letzten Gleichung

$$[(f-g)u+f'(1-u^2)][((f-g)u+f'(1-u^2))(g'u+h')$$
$$-(fu^2+2f'u+g-h(1+u^2))(g'-h'u)]$$
$$=(g'-h'u)^2(g'u+h')(1+u^2)$$

und nach gehöriger Reduktion und Beseitigung des gemeinschaftlichen Faktors $1+u^2$, erhält man

$$\text{VIII.}\quad [(f-g)u+f'(1-u^2)][f'h'+hg'+gg'+(fh'-f'g'-hh')u]$$
$$=(g'-h'u)^2(g'u+h').$$

Dieser Ausdruck VIII. führt offenbar auf eine Gleichung des dritten Grades, welcher nothwendig wenigstens eine reelle Wurzel angehört. Es läßt sich also in jedem Körper ein Punkt zum Ursprunge der Koordinaten nehmen, und durch denselben drei rechtwinklige Axen ziehen, hinsichtlich welcher die Gleichungen: $\int x'y'dM=0$, $\int x'z'dM=0$ und $\int y'z'dM=0$ befriedigt sind.

672. Lehrsatz. Sind die drei Hauptmomente eines Körpers in Bezug auf dessen drei Hauptaxen ungleich, so ist das größte

Digitized by Google

derselben größer, das kleinste hingegen kleiner, als das Trägheitsmoment desselben Körpers in Bezug auf jede andere durch denselben Anfangspunkt gezogene Momentenaxe.

Beweis. Seien A, B, C, wie in (670), die nach ihren numerischen Werthen geordneten Hauptmomente des Körpers, also $A>B>C$, so hat man $\int p^2 dM = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$, nun ist $\cos^2\alpha = 1-\cos^2\beta-\cos^2\gamma$, folglich

$$\int p^2 dM = A - \cos^2\beta(A-B) - \cos^2\gamma(A-C),$$

wo $A-B$, $A-C$ positive Größen sind, daher $\int p^2 dM < A$. Ferner ist $\cos^2\gamma = 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta$, folglich

$$\int p^2 dM = \cos^2\alpha(A-C) + \cos^2\beta(B-C) + C, \text{ d. i. } \int p^2 dM > C.$$

673. Lehrsatz. Wenn in Bezug auf drei rechtwinklige Hauptaxen zwei Momente der Trägheit einander gleich sind, so hängt das Trägheitsmoment in Bezug auf jede andere durch denselben Anfangspunkt gehende Momentenaxe bloß von einem ihrer drei Richtungswinkel α, β, γ ab.

Beweis. Die Voraussetzung $A=B$ verwandelt die Gleichung II. (670) in $A(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+C\cos^2\gamma$, es ist aber $\cos^2\alpha+\cos^2\beta = 1-\cos^2\gamma = \sin^2\gamma$, somit wird

$$\int p^2 dM = A\sin^2\gamma + C\cos^2\gamma.$$

674. Lehrsatz. Wenn zwei Hauptmomente einander gleich sind, so gibt es außer diesem System von Hauptaxen für denselben Anfangspunkt der Koordinaten noch eine unendliche Menge anderer Systeme von Hauptaxen, welche aber alle mit jenem System eine Axe gemein haben, während ihre übrigen Axen in einer Ebene gelegen sind.

Beweis. Angenommen, die Axen der x', y', z' in (671) sind die Hauptaxen eines gegebenen Körpers, für welche also die Bedingungen (669)

$$\text{I. } \int x'y'dM = 0,\ \int x'z'dM = 0,\ \int y'z'dM = 0$$

erfüllt sind. Bezeichnet man $\int(y'^2+z'^2)dM$ und $\int(x'^2+z'^2)dM$, oder die Trägheitsmomente in Bezug auf die Axe der x und y mit A und B, und nimmt $A=B$ an, folgt

$$\text{II. } \int x'^2 dM = \int y'^2 dM.$$

Digitized by Google

Es ist aber $x=a_1x'+b_1y'+b_1z'$, $y=a_2x'+b_2y'+c_2z'$, also

$$xy=a_1a_2x'^2+(a_1b_2+a_2b_1)x'y'+(a_1c_2+a_2c_1)x'z'$$
$$+b_1b_2y'^2+(b_1c_2+b_2c_1)y'z'+c_1c_2z'^2;$$

multiplizirt man diese Gleichung mit dM und integrirt sie, so erhält man wegen II. und I.

$$\int xydM=(a_1a_2+b_1b_2)\int x'^2dM+c_1c_2\int z'^2dM,$$ und wegen (A. 1541)

$$\text{III.}\quad \int xydM=c_1c_2[\int z'^2dM-\int x'^2dM].$$

Auf gleiche Weise folgt

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} \int xzdM=c_1c_3[\int z'^2dM-\int x'^2dM] \\ \int yzdM=c_2c_3[\int z'^2dM-\int x'^2dM] \end{cases}$$

Es ist aber nach (A. 1538) $c_1=\cos\gamma_1$, $c_2=\cos\gamma_2$, $c_3=\cos\gamma_3$, und γ_1, γ_2, γ_3 sind die Winkel, welche die Axe der z' mit den Axen der x, y, z einschließt. Läßt man nun beide Axen der z und z' zusammenfallen, so ist $\gamma_1=0$, $\gamma_2=\gamma_3=\frac{1}{2}\pi$, mithin $c_1=c_2=0$, $c_3=1$, und man erhält aus den Gleichungen III. u. IV. $\int xydM=0$, $\int xzdM=0$, $\int yzdM=0$, d. i. wenn die Axen der x', y', z' Hauptaxen und zwei Hauptmomente derselben einander gleich sind, so müssen auch die Axen der x, y und z Hauptaxen, sein, oder weil die Axen der z und z' zusammenfallen, und die Axen der x und y beliebige Winkel in der Ebene x' y' mit den Hauptaxen der x' und y' bilden, so gibt es unzählige Hauptaxen welche durch denselben Anfangspunkt gehen und in der Ebene, $x'y'$ gelegen sind.

675. Folgesatz. Sind sämmtliche Hauptmomente

$$\int(x'^2+y'^2)dM,\ \int(x'^2+z'^2)dM,\ \int(y'^2+z'^2)dM$$

einander gleich, so folgt sogleich $\int x'^2dM=\int y'^2dM=\int z'^2dM$, somit

$$\int xydM=(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)\int x_1^2dM$$
$$\int xzdM=(a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3)\int y_1^2dM$$
$$\int yzdM=(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)\int z_1^2dM,$$

welche Ausdrücke wegen (A. 1541) sämmtlich Null sind, oder in Worten: Sobald ein System von drei Hauptaxen gleiche Hauptmomente besitzt, so sind alle andern Systeme von Axen,

Digitized by Google

die man durch denselben Anfangspunkt legen kann, gleichfalls Hauptaxen.

676. Lehrsatz. Die Summe der Trägheitsmomente eines Körpers in Beziehung auf drei beliebige durch denselben Anfangspunkt gehende, sich unter rechten Winkeln schneidende Axen ist eine unveränderliche Größe.

Beweis. Sind die Axen der x, y, z Hauptaxen des Körpers, in Beziehung auf welche die Hauptmomente die Werthe A, B, C haben, und sind die Axen der x', y', z', welche sich unter rechten Winkeln in demselben Anfangspunkte schneiden, was immer für Momentenaxen, in Beziehung auf welche die Momente die Werthe A', B', C' besitzen, und man bezeichnet mit

$$\left.\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\\ \beta_1, \beta_2, \beta_3\\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\end{matrix}\right\} \text{ die Winkel, welche die Axen der } \left\{\begin{matrix}x'\\ y'\\ z'\end{matrix}\right\} \text{ mit den Axen der } \left\{\begin{matrix}x\\ y\\ z\end{matrix}\right.$$

einschließen, so hat man nach (670)

$$\begin{aligned}A' &= A\cos^2\alpha_1 + B\cos^2\alpha_2 + C\cos^2\alpha_3\\ B' &= A\cos^2\beta_1 + B\cos^2\beta_2 + C\cos^2\beta_3\\ C' &= A\cos^2\gamma_1 + B\cos^2\gamma_2 + C\cos^2\gamma_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{mithin } A'+B'+C' &= A(\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1)\\ &+B(\cos^2\alpha_2+\cos^2\beta_2+\cos^2\gamma_2)+C(\cos^2\alpha_3+\cos^2\beta_3+\cos^2\gamma_3)\end{aligned}$$

oder wegen (A. 1425), weil α_1, β_1, γ_1 die Winkel zwischen der Axe der x und den Axen der x', y', z' bedeuten u. s. f.

$$A'+B'+C' = A+B+C.$$

2. Trägheitsmoment der Körper von gegebener Gestalt.

677. Aufgabe. Das Trägheitsmoment eines rechtwinkligen, homogenen Parallelopipeds zu bestimmen, wenn eine seiner Kanten zur Momentenaxe und eine Ecke des Körpers zum Anfangspunkte gewählt wird.

Auflösung. Heißen a, b, c die Abmessungen, ϱ die Dichtigkeit, also $M = \varrho abc$ die Masse des Parallelopipeds, so sind die

Trägheitsmomente des Körpers rücksichtlich der Kanten c, b, a als Momentenaxen, beziehungsweise:

$$\tfrac{1}{3}M(a^2+b^2),\ \tfrac{1}{3}M(a^2+c^2),\ \tfrac{1}{3}M(b^2+c^2).$$

Beweis. Theilt man ein solches Parallelopiped durch Ebenen, die beziehungsweise mit den koordinirten Ebenen gleichlaufend sind, in eine unendliche Anzahl Elemente, so ist der Inhalt eines jeden dieser Elemente gleich $dxdydz$, und daher nach (662) das Trägheitsmoment des Parallelopipeds in Beziehung auf die Axe der z gleich $\iiint(x^2+y^2)dxdydz$. Um dieses dreifache Integrale auf alle Punkte des Körpers auszudehnen, muß man nach z von $z=0$ bis $z=c$, dann nach y, von $y=0$ bis $y=b$, zuletzt nach x, von $x=0$ bis $x=a$ integriren. Die erste Integration gibt $c\iint(x^2+y^2)dxdy$, die zweite aber $c\int(bx^2+\frac{1}{3}b^3)dx$, die dritte endlich liefert das gesuchte Trägheitsmoment hinsichtlich der Kante c als Momentenaxe $\frac{1}{3}c(a^3b+ab^3)=\frac{1}{3}M(a^2+b^2)$. Vertauscht man aber die Buchstaben a, b, c mit einander, so erhält man sofort auch die Trägheitsmomente des Körpers rücksichtlich der Kanten b und a wie oben.

678. Aufgabe. Das Trägheitsmoment eines homogenen Ellipsoids mit drei ungleichen Axen zu bestimmen.

Auflösung. Wird der Mittelpunkt des Ellipsoids zum Anfangspunkte, und jede der drei unter rechten Winkeln sich schneidenden Hauptaxen zu Momentenaxen genommen, so ist das Trägheitsmoment des Ellipsoids von der Masse $M=\frac{4}{3}\pi\varrho abc$ rücksichtlich derselben

$$\tfrac{1}{5}M(a^2+b^2),\ \tfrac{1}{5}M(a^2+c^2),\ \tfrac{1}{5}M(b^2+c^2).$$

Beweis. Nach (A. 1588) ist die Gleichung eines Ellipsoids mit drei Halbaxen a, b, c

$$a^2b^2z^2+a^2c^2y^2+b^2c^2x^2=a^2b^2c^2$$

aus welcher folgt

$$\text{I.}\quad z=\pm c\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

das Trägheitsmoment des Ellipsoids in Bezug auf die Axe den

Digitized by Google

x als Momentenaxe ist aber nach (662) $\iiint(x^2+y^2)dxdydz$, die erste Integration gibt nun den Ausdruck $z\iint(x^2+y^2)dxdy$, wo das Integrale nach der Gleichung 1. zwischen den Grenzen

$$z=+c\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)} \text{ und } z=-c\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

genommen, den Ausdruck

$$2c\iint(x^2+y^2)\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)}dxdy=2c\iint x^2\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)}dxdy$$
$$+2c\iint y^2\sqrt{\left(1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)}dxdy$$

liefert. Diese beiden Theile, in welche die zu integrirende Formel zerfällt, sind aber so beschaffen, daß wenn man den ersten derselben zuerst nach x, sodann nach y, und den zweiten Theil in verkehrter Ordnung integrirt, die Ergebnisse hinsichtlich der Buchstaben x, y symmetrisch sein müssen. Setzt man nun im ersten Theile, welcher P heißen mag, Kürze halber $b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}=r^2$ so wird, da x^2 und dx als konstante Größen vor das Integralzeichen kommen,

$$P=\frac{2cx^2dx}{b}\int\sqrt{(r^2-y^2)}dy,$$

und man erhält nach Int. 134)

$$\int dy\sqrt{(r^2-y^2)}=\tfrac{1}{2}y\sqrt{(r^2-y^2)}+\tfrac{1}{2}r^2.\arcsin(y:r),$$

welches zwischen den Grenzen $y=r$, und $y=-r$ genommen, in

$$dP=\frac{2cx^2dx}{b}\cdot r^2\pi=\frac{2\pi cx^2dx}{b}\left(b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}\right)$$

übergeht, und hieraus folgt

$$P=\frac{2bc\pi}{a^2}\int(a^2x^2-x^4)dx=\frac{2bc\pi}{a^2}\left(\tfrac{1}{3}a^2x^3-\tfrac{1}{5}x^5\right)=\tfrac{4}{15}a^2bc\pi.$$

Bezeichnet man den zweiten Theil des obigen Ausdruckes

Digitized by Google

mit Q, so erhält man durch bloße Vertauschung der Buchstaben $Q=\frac{4}{15}ab^3c\pi$, demnach das gesuchte Trägheitsmoment

$$P+Q=\frac{4}{15}abc\pi(a^2+b^2)=\frac{1}{5}M(a^2+b^2),$$

weil $M=\frac{4}{3}abc\pi$ für $\varrho=1$ ist.

In Bezug auf die beiden andern Momentenaxen gibt die Vertauschung der Buchstaben das gesuchte Trägheitsmoment wie oben.

679. *Folgesatz.* Im Falle einer Kugel hat man $a=b=c$, demnach das Trägheitsmoment einer Kugel vom Halbmesser a, gleich $\frac{2}{5}Ma^2=\frac{8}{15}\pi a^5$.

680. *Aufgabe.* Das Trägheitsmoment eines Rotationskörpers zu finden.

Auflösung. Wird die Gleichung der erzeugenden Kurve durch $y=fx$ vorgestellt, so ist das Trägheitsmoment des durch ihre Umdrehung entstehenden Körpers $\frac{1}{2}\pi\int y^4dx$.

Beweis. Jeder Schnitt des Rotationskörpers, welcher im Abstande x vom Anfangspunkte senkrecht auf der Abszissenaxe geführt wird, ist ein Kreis vom Halbmesser y, dessen Mittelpunkt auf der Abszissenaxe gelegen ist. Um nun zuvörderst das Trägheitsmoment einer Scheibe von der Dicke dx und dem Halbmesser y zu finden, denken wir uns auf der Scheibe einen konzentrischen Kreisring vom Halbmesser ϱ, Breite $d\varrho$ und Dicke dx verzeichnet, so ist der Umfang dieses Ringes $2\pi\varrho$, und Inhalt $2\pi\varrho d\varrho dx$, während der Abstand eines jeden seiner Punkte von der Abszissenaxe innerhalb der Grenzen ϱ und $\varrho+d\varrho$ liegt; man hat also nach (661) zum Trägheitsmomente dieses Ringes den Ausdruck $2\pi dx\int\varrho d\varrho.\varrho^2=2\pi dx\int\varrho^3d\varrho=\frac{1}{2}\pi\varrho^4dx$; wird dieses Integrale zwischen den Grenzen $\varrho=0$ bis $\varrho=y$ genommen, so erhalten wir das gesuchte Trägheitsmoment der Scheibe gleich $\frac{1}{2}\pi y^4dx$, und dieser Ausdruck auf sämmtliche Scheiben ausgedehnt, aus denen der Rotationskörper besteht, gibt $\frac{1}{2}\pi\int y^4dx$ zum Trägheitsmomente desselben.

681. *Folgesatz.* Da ein Kegelschnitt in der allgemeinen Gleichung (A. 1082) $y^2=mx+nx^2$ enthalten ist, so erhält man

Digitized by Google

$\frac{1}{2}\pi\int y^4 dx = \frac{1}{2}\pi\int(mx+nx^2)^2 dx = \frac{1}{2}\pi\int(m^2x^2+2mnx^3+n^2x^4)dx$,
und nach vollzogener Integration wird das Trägheitsmoment eines durch die Rotation eines beliebigen Kegelschnittes erzeugten Körpers gleich

$$\tfrac{1}{2}\pi x^3\left(\tfrac{1}{3}m^2+\tfrac{1}{2}mnx+\tfrac{1}{5}n^2x^2\right).$$

682. Folgesatz 2. Für einen Kreis hat man $m=2r$, $n=-1$ demnach das Trägheitsmoment eines Kugelabschnittes gleich $\pi x^3(\frac{2}{3}r^3-\frac{1}{2}rx+\frac{1}{10}x^2)$, und hieraus für eine ganze Kugel, wenn $x=2r$ gesetzt wird, das Trägheitsmoment gleich $\frac{8}{15}\pi r^5$, übereinstimmend mit (679).

683. Folgesatz 3. In einer Parabel hat man $m=p$, $n=o$, oder das Trägheitsmoment eines paraboloischen Konoids (A. 1438) $= \frac{1}{6}\pi y^4 x = \frac{1}{6}\pi p^2 x^3$.

684. Folgesatz 4. Für eine Ellipse gilt
$m=\frac{2b^2}{a}$, $n=-\frac{b^2}{a^2}$, folglich das Trägheitsmoment eines Abschnittes vom länglichten Sphäroid gleich

$$\frac{\pi b^4 x^3}{2a^2}\left(\tfrac{4}{3}-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{5a^2}\right)$$

Setzt man aber $n=b^2:a^2$, so folgt für einen Abschnitt des hyperbolischen Konoids das Trägheitsmoment

$$\frac{\pi b^4 x^3}{2a^2}\left(\tfrac{4}{3}+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{5a^2}\right)$$

685. Folgesatz 5. Ist $y=ax+b$ die Gleichung der beschreibenden Geraden, so folgt das Trägheitsmoment des erzeugten abgestutzten Kreiskegels $\frac{1}{2}\pi\int(ax+b)^4 dx = \pi[(ah+b)^5-b^5]:10a$, wenn das Integrale von $x=0$ bis $x=h$ genommen wird. Wenn nun R, r die Halbmesser der kreisförmigen Grundflächen bezeichnen, so hat man gleichzeitig

$$b=r,\ ah+b=R,\ \text{also}\ a=(R-r):h,$$

hierdurch verwandelt sich der gefundene Ausdruck in

Digitized by Google

$$\frac{\pi h(R^5-r^5)}{10(R-r)}=\tfrac{1}{10}\pi h(R^4+R^3r+R^2r^2+Rr^3+r^4).$$

686. Folgesatz 6. Setzt man hier erstlich $r=0$ und dann $R=r$, so erhält man im ersten Falle das Trägheitsmoment eines Kreiskegels $\frac{1}{10}\pi hR^4$, im zweiten Falle das Trägheitsmoment eines Cylinders $\frac{1}{2}\pi hR^4$.

VI. Drehung eines festen Körpers um eine Axe.

1. Gleichförmige Umdrehung.

687. Erklärung. Wird durch die Einwirkung einer Kraft auf einen festen Körper eine Umdrehung desselben um eine unveränderliche Axe erzeugt, so ist diese Bewegung entweder gleichförmig oder aber veränderlich, je nachdem die bewegende Kraft bloß momentan durch einen Stoß, oder stetig als beschleunigende Kraft wirkt. Bei einer gleichförmigen Umdrehung eines Körpers um eine unveränderliche Axe haben die verschiedenen materiellen Punkte, welche den festen Körper bilden, nach Maßgabe ihrer Abstände von der Umdrehungsaxe, ungleiche Geschwindigkeiten, allein die Winkelgeschwindigkeit ist während der ganzen Zeit der Bewegung für alle Punkte des Körpers gleich groß; bei einer veränderlichen Umdrehung aber ändert sich auch die Winkelgeschwindigkeit mit der Zeit der Bewegung. Man nennt nun die Winkelbeschleunigung eines rotirenden Körpers die Aenderung, welche mit der Winkelgeschwindigkeit in der Zeiteinheit vorgeht, wenn die bewegende Kraft stetig auf die Umdrehung des Körpers wirkt.

688. Lehrsatz. Die Winkelgeschwindigkeit eines gleichförmig um eine Axe sich drehenden Körpers ist gleich der Summe der statischen Momente der bewegenden Kräfte, dividirt durch das Trägheitsmoment des Körpers hinsichtlich der Umdrehungsaxe.

Beweis. Man ziehe durch einen Anfangspunkt F (Fig. 180) drei rechtwinklige Koordinatenaxen FA, FX', FY' so, daß die Axe der z mit der Drehungsaxe AB zusammenfällt. Die Win-

Digitized by Google

kelgeschwindigkeit des durch momentane Kräfte bewegten Körpers sei ω, welche positiv ist, wenn der Körper sich so dreht, daß die Punkte, die in der positiven Seite der Axe der y befindlich sind, in die positive Seite der Axe der x gelangen, ehe sie in die negative Seite dieser Axen kommen, negativ hingegen, wenn die Drehung im entgegengesetzten Sinne erfolgt. Die Koordinaten irgend eines Punktes M seien $FQ=x$, $PQ=y$, $PM=z$, seine Entfernung von der Drehaxe $MN=PF=r$, und dM seine Masse. Während der Umdrehung des Körpers beschreibt der Punkt M einen Kreis vom Halbmesser r, mit einer Geschwindigkeit $r\omega$, und der korrespondirenden Kraft $r\omega dM$ (584). Das Moment dieser Kraft ist, da sie am Hebelsarme r wirkt, $r^2\omega dM$, und die Summe der Momente für sämmtliche materiellen Punkte des Körpers $\omega\int r^2dM=\omega M(a^2+k^2)$ nach (665), wenn Mk^2 das Trägheitsmoment des Körpers hinsichtlich der durch den Schwerpunkt G parallel mit AB gezogenen Momentenaxe, und a ihren Abstand unter einander vorstellt. Es ist also $\omega M(a^2+k^2)$ die erforderliche Kraft, um einen Körper von der Masse M mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Axe AB zu drehen. Seien nun Q, Q', Q'' ... die Kräfte, welche an den Hebelsarmen q, q', q'' ... beziehungsweise die Umdrehung des Körpers bewirken; man begreift leicht, daß nur derjenige Theil dieser Kräfte zur Umdrehung des Körpers beiträgt, welcher parallel mit der Ebene xy und senkrecht auf den Hebelsarm wirkt: denn zerlegt man die am Angriffspunkte nach was immer für einer Richtung angebrachte Kraft Q in zwei Seitenkräfte, deren eine in der zur Ebene xy parallelen Ebene gelegen, die andere darauf senkrecht angebracht, mithin der Umdrehungsaxe parallel wäre, so hat offenbar die letztere, indem sie bloß einen Druck auf die Lager der Axe ausübt, auf die Umdrehung des Körpers keinen Einfluß, und eben so läßt sich die in der Ebene xy wirkende Seitenkraft, falls sie nicht schon auf den ihr zugehörenden Hebelsarm senkrecht wäre, in zwei Seitenkräfte weiters zerlegen, deren eine in die Verlängerung des Hebelsarmes fällt, die andere hingegen, welche allein zur Drehung beiträgt, auf dem Hebelsarme senkrecht und in der Ebene xy gelegen wäre. Es sind also die statischen Momente dieser Kräfte

Digitized by Google

$Qq+Q'q'+Q''q''+\ldots$ oder ΣQq gleich $\omega M(a^2+k^2)$, woraus sofort

$$\omega = \frac{\Sigma Qq}{M(a^2+k^2)} \quad \text{folgt.}$$

689. Folgesatz. Dieser Ausdruck zeigt zur Genüge, daß die Winkelgeschwindigkeit ω mit der Abnahme des Abstandes a der Umdrehungsaxe von einer durch den Schwerpunkt des Körpers ihr parallel gezogenen Axe zunimmt, und am größten wird, wenn $a=0$ ist, oder daß unter gleichen Umständen der Körper am schnellsten umgedreht wird, wenn seine Drehaxe durch den Schwerpunkt gebt.

690. Folgesatz 2. Hat aber der Körper, bevor die Kräfte $Q, Q', Q''\ldots$ zu wirken anfingen, schon eine Winkelgeschwindigkeit u gehabt, so wächst dieselbe durch die Einwirkung dieser Kräfte um den (688) angegebenen Werth, und man erhält die so vergrößerte Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = u + \frac{\Sigma Qq}{M(a^2+k^2)}$$

691. Folgesatz 3. Bezeichnet man mit g, h, die Koordinaten des Angriffspunktes einer Kraft Q, und mit α den Winkel, welchen ihre Richtung mit der Axe der x einschließt, so ist nach (59) ihr Hebelsarm $q = h\cos\alpha - g\sin\alpha$, hierdurch wird aus (690)

$$\omega = u + \frac{\Sigma Q(h\cos\alpha - g\sin\alpha)}{M(a^2+k^2)}$$

692. Aufgabe. Den Druck zu bestimmen, welchen die Umdrehungsaxe während der Drehung des Körpers zu erleiden hat.

Auflösung. Heißen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ die Resultirenden der nach den Axe der x und y zerlegten Kräfte $Q, Q', Q''\ldots$ und p, q ihre Hebelsarme, oder die Entfernungen der Punkte, wo jene die Axe der z schneiden, von dem Anfangspunkte der Koordinaten, so erhält man die Gleichungen:

$\mathfrak{P}=\Sigma Q\cos\alpha+(\omega-u)\int y dM$, $\mathfrak{Q}=\Sigma Q\sin\alpha-(\omega-u)\int x dM$

$\mathfrak{P}p=\Sigma Qr\cos\alpha+(\omega-u)\int yz dM$, $\mathfrak{Q}q=\Sigma Qr\sin\alpha-(\omega-u)\int xz dM$.

Digitized by Google

Beweis. Bewegt sich der Körper mit einer Winkelgeschwindigkeit u, bevor die Kräfte Q, Q', Q'' ... auf ihn eingewirkt haben, und erhält er nach der im Sinne der Bewegung erfolgenden Einwirkung dieser Kräfte eine Winkelgeschwindigkeit ω, so ist $\omega - u$ die durch dieselben im Körper bewirkte Winkelgeschwindigkeit, und man hat in (688) für die hierzu erforderliche Kraft eines materiellen Punktes M den Ausdruck $r(\omega-u)dM$, welche nach der Richtung der Tangente Mt wirkend in die Seitenkräfte $r(\omega-u)dM\cos PMt = -(\omega-u)x\,dM$, nach der Axe der y und $r(\omega-u)dM\sin PMt = (\omega-u)y\,dM$ nach der Axe der x zerfällt, weil der Winkel PMt (Fig. 180) $= PFX'$ ist, da beide Winkel von geraden Linien gebildet werden, welche paarweise auf einander senkrecht stehen. Man erhält hieraus, wenn man diese Ausdrücke durch die Integration auf sämmtliche Punkte des Körpers ausdehnt, sogleich die angegebenen Formeln.

693. *Folgesatz.* Setzt man hier statt $\omega-u$ seinen Werth aus (691), und bemerkt, daß wenn x, y die Koordinaten des Schwerpunktes bedeuten, $Mx = \int x\,dM$, $My = \int y\,dM$ sei, so ergibt sich sofort

$$\mathfrak{P} = \Sigma Q\cos\alpha + \frac{\Sigma Q(h\cos\alpha - g\sin\alpha)y}{a^2+k^2}$$

$$\mathfrak{Q} = \Sigma Q\sin\alpha - \frac{\Sigma Q(h\cos\alpha - g\sin\alpha)x}{a^2+k^2}$$

$$\mathfrak{P}p = \Sigma Qr\cos\alpha + \frac{\Sigma Q(h\cos\alpha - g\sin\alpha)}{M(a^2+k^2)}\int yz\,dM$$

$$\mathfrak{Q}q = \Sigma Qr\sin\alpha - \frac{\Sigma Q(h\cos\alpha - g\sin\alpha)}{M(a^2+k^2)}\int yz\,dM$$

694. *Folgesatz* 2. Wenn kein Druck auf die Axe Statt finden soll, so muß $\mathfrak{P}=0$, $\mathfrak{Q}=0$ werden. Also erhält man aus (693) die Bedingungen

$$\text{I.}\quad \Sigma Q\cos\alpha + \frac{\Sigma Q(h\cos\alpha - g\sin\alpha)y}{a^2+k^2} = 0$$

$$\text{II.}\quad \Sigma Q\sin\alpha - \frac{\Sigma Q(h\cos\alpha - g\sin\alpha)x}{a^2+k^2} = 0$$

Digitized by Google

$$\text{III. } \Sigma Qr\cos\alpha + \frac{\Sigma Q(h\cos\alpha - g\sin\alpha)}{M(a^2+k^2)} \int yzdM = 0$$

$$\text{IV. } \Sigma Qr\sin\alpha - \frac{\Sigma Q(h\cos\alpha - g\sin\alpha)}{M(a^2+k^2)} \int xzdM = 0$$

695. Folgesatz 3. Wenn sich sämmtliche Kräfte auf eine einzige Mittelkraft reduziren, oder, was auf dasselbe herauskommt, wenn nur eine einzige Kraft Q an dem Körper wirkt, so kann man Einfachheit halber die Axe der y mit dieser Kraft parallel ziehen, oder die Kraft Q auf der Ebene xz senkrecht wirken lassen. Alsdann wird $\alpha=0$, $\cos\alpha=0$, $\sin\alpha=1$, und das Zeichen der Summirung verschwindet, weil nur eine Kraft vorhanden ist; mithin verwandeln sich die Gleichungen (694) in

$$\text{I. } MQg\gamma=0, \quad \text{II. } QM(a^2+k^2)=QMg\xi$$
$$\text{III. } Qg\int yzdM=0. \quad \text{IV. } M(a^2+k^2)r=g\int xzdM.$$

Aus I. ergibt sich $\gamma=0$, d. h. der Schwerpunkt des bewegten Körpers liegt in der Ebene xz, und folglich wirkt die Kraft senkrecht auf diejenige Ebene, welche die Drehaxe und den Schwerpunkt enthält.

Aus II. erhält man $g\xi=a^2+k^2$, da aber $\xi=a$ dem Abstande der Umdrehungsaxe von dem Schwerpunkte ist, so folgt der erforderliche Hebelsarm der Kraft

$$\text{V. } g = \frac{a^2+k^2}{a} = \frac{M(a^2+k^2)}{Ma}$$

gleich dem Trägheitsmomente des Körpers, getheilt durch dessen statisches Moment in Beziehung auf die Umdrehungsaxe. Aus III. erhält man VI. $\int yzdM=0$, und aus IV.

$$r = \frac{g\int xzdM}{M(a+k^2)}, \text{ und also wegen V. folgt VII. } r = \frac{\int xzdM}{Ma}$$

Die Gleichung VI. bezieht sich auf die Vertheilung der Masse des Körpers um die Umdrehungsaxe, wenn die letztere nichts von der Wirkung der Kraft spüren soll, und die Gleichung VII. bestimmt vollends die Lage des Angriffspunktes der Kraft Q.

Digitized by Google

696. Erklärung. Eine Umdrehungsaxe, welche bei der Drehung eines Körpers keinen Druck erleidet, nennt man eine freie Axe, und den Angriffspunkt einer Kraft Q, oder falls die Umdrehung von mehrern Kräften bewirkt wird, der Angriffspunkt ihrer Resultirenden, wenn dabei die Axe keinen Druck auszuhalten hat, heißt der Mittelpunkt des Stosses.

697. Folgesatz. Der Abstand des Anfangspunktes, in welchem die freie Axe die Ebene xy schneidet, vom Mittelpunkte des Stosses ist der Quotient aus dem Trägheitsmomente des Körpers, getheilt durch dessen statisches Moment, beide Momente auf die Umdrehungsaxe bezogen (695. V.).

2. Das zusammengesetzte Pendel.

698. Anmerkung. Eine ungleichförmige drehende Bewegung findet Statt, wenn ein schwerer Körper um eine feste horizontale Axe sich drehen soll, wie dieses bei einem zusammengesetzten Pendel der Fall ist, auf den allein wir uns Kürze halber hier einlassen wollen.

699. Aufgabe. Ein schwerer, fester Körper sei um eine horizontale, feste Axe beweglich, und er werde aus seiner Lage der Ruhe um einen gegebenen Elevationswinkel entfernt; man sucht die Geschwindigkeit seiner Umdrehung, nachdem eine gegebene Zeit verstrichen ist.

Auflösung. Heißt α der anfängliche Elongationswinkel, und θ der Elongationswinkel nach Verfluß einer Zeit t, M die Masse des Körpers, a der Abstand seines Schwerpunktes von der Drehaxe, g die Beschleunigung der Schwere, und $M(a^2+k^2)$ das Trägheitsmoment des Körpers hinsichtlich der Umdrehungsaxe, so hat man seine Geschwindigkeit v aus der Formel

$$v^2 = \frac{2ag}{a^2+k^2}(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Beweis. Sei OZ (Fig. 181) die horizontale Umdrehungsaxe des Körpers, um welche eine Masse M, deren Schwerpunkt in A

Digitized by Google

ist, durch die konstante Kraft der Schwere in Bewegung gebracht wird. Man setze $OA=\alpha$, den anfänglichen Elongationswinkel $AOB=\alpha$, und den während der Drehung des Körpers veränderlichen Elongationswinkel $AOC=\theta$, nachdem derselbe durch irgend eine Kraft aus seiner Lage der Ruhe OMN, in welcher OA vertikal war, in die Lage Omn versetzt worden, wobei dessen Schwerpunkt aus A nach B gebracht wurde. Wird der Körper in dieser anfänglichen Lage der Drehung sich selbst überlassen, so treibt ihn die Schwere gegen die Lage OMN, und sein Schwerpunkt gelangt nach Verfluß einer Zeit t von B nach C. Sei ω die Winkelgeschwindigkeit, die der Körper in dieser letzten Lage erhält, wenn die Umdrehung desselben als Wirkung einer momentanen Kraft Q, deren Moment Qq wäre, betrachtet würde, so hätte man mit Beibehaltung der Bezeichnung von (688)

$$\omega = \frac{Qq}{M(a^2+k^2)}$$

und die Winkelgeschwindigkeit ω wäre konstant; allein da die Schwere als eine stetige Kraft, eine konstante Beschleunigung der Bewegung zur Folge hat, wobei $Q=Mgdt$, und der veränderliche Hebelsarm $q=a\sin\theta$ wird, so erhält man die Winkelbeschleunigung während der Zeit dt

$$d\omega = \frac{Mgdt.a\sin\theta}{M(a^2+k^2)}, \text{ oder } \frac{d\omega}{dt} = \frac{ag\sin\theta}{a^2+k^2}$$

Die Geschwindigkeit des in der Einheit der Entfernung von der Drehaxe gelegenen Punktes ist aber $d\theta : dt$, weil $d\theta$ den zurückgelegten Weg vorstellt; wenn also der Winkel θ während der Bewegung dieses Punktes abnimmt, so ist

$$\omega = -\frac{d\theta}{dt}, \text{ daher } \frac{d\omega}{dt} = -\frac{d^2\theta}{dt^2}, \text{ mithin}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{ag\sin\theta}{a^2+k^2}$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit $2d\theta$, und integrirt hierauf, so entsteht

Digitized by Google

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2ag\cos\theta}{a^2+k^2} + C$$

Ist $d\theta : dt = 0$, für $\theta = \alpha$, d. h. fängt die Bewegung des Körpers aus dem Zustande der Ruhe dann an, wenn der Winkel $AOB = \alpha$ war, so hat man

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2ag}{a^2+k^2}(\cos\theta - \cos\alpha) = v^2,$$

unter v die Geschwindigkeit des in der Einheit der Entfernung von der Drehaxe gelegenen Punktes verstanden, und diese Gleichung drückt die Geschwindigkeit des Körpers für jeden Werth seiner Elongation θ aus.

700. Folgesatz. Man sieht daraus, daß der Körper, wenn er ursprünglich in Ruhe war, es nur dann sein konnte, wenn $\theta = 0$ oder wenn sein Schwerpunkt A in der durch den Punkt O gehenden Vertikale OX sich befindet. Wird er aber aus dieser Lage um einen Elongationswinkel α versetzt, so kommt er sich selbst überlassen in dieselbe zurück; seine Geschwindigkeit ist alsdann $\theta = 0$ setzend, der Größe $\sqrt{a(1-\cos\alpha)}$ proportional, und dieselbe, als ob er im freien Falle durch die Höhe EA sich bewegt hätte; er muß also auf der entgegengesetzten Seite so lange aufsteigen, bis diese durch die Schwere aufgehoben ist, da er dann seine Bewegung gegen die Vertikale OX von Neuem antritt: kurz, er wird wie ein einfaches Pendel seine Schwingungen dieß- und jenseits der vertikalen Geraden OX vollziehen.

701. Erklärung. Ein einfaches Pendel, welches mit einem gegebenen zusammengesetzten Pendel gleichzeitig schwingt, heißt ein isochronisches Pendel. Ueberträgt man die Länge des letzteren vom Punkte O aus gegen D auf die Vertikale OX, so wird der so bestimmte Punkt der Schwingungsmittelpunkt des zusammengesetzten Pendels genannt.

702. Lehrsatz. Der Abstand des Schwingungsmittelpunktes eines zusammengesetzten Pendels von der Drehaxe ist der Quo-

Digitized by Google

tient aus dem Trägheitsmomente desselben, getheilt durch das statische Moment, beide Momente auf die Umdrehungsaxe bezogen.

Beweis. Sei l die Länge eines einfachen Pendels, so ist nach (647) dessen Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\alpha)$$

diesen Werth erhält aber auch die Winkelgeschwindigkeit eines zusammengesetzten Pendels, wenn man in (699)

$$l = \frac{a^2+k^2}{a} = \frac{M(a^2+k^2)}{Ma}$$

sein läßt.

703. Folgesatz. Wenn also ein Körper, dessen Schwerpunkt in A ist, um eine feste horizontale Axe schwingt, so kann man immer einen Punkt D angeben, der ganz eben so um jene Axe schwingt, als ob die ganze Masse des Körpers in ihm vereiniget wäre.

704. Anmerkung. Unsere Uhrenpendel sind durchgängig zusammengesetzte Pendel, welche aus einer mit Blei ausgefüllten messingenen Linse und einer hölzernen, gläsernen oder eisernen prismatischen Stange bestehen. Die Linse ist, wie gesagt, aus polirtem Messingblech, und hat die Gestalt zweier gleichen Kugelsegmente, welche mit ihren kreisförmigen Grundflächen unter einander verbunden sind. Die Pendelstange ist an ihren beiden Enden in metallenen Hülsen gefaßt, deren obere mit einer stählernen prismatischen Axe, die mit ihrer Schneide in steinernen horizontalen Lagern aufliegt, verbunden ist, die untere Hülse hingegen endigt in einen cylindrischen, mit Schraubengängen versehenen Stab, dessen Mutter in dem Körper der Linse sich befindet. Wird die Pendelstange festgehalten, so kann bei Umdrehung der Linse das so gestaltete Pendel verkürzt oder verlängert werden.

705. Aufgabe. Den Schwingungsmittelpunkt in einem Uhrenpendel zu bestimmen.

Digitized by Google

Auflösung. Heißt r der Halbmesser der Kugel, zu welcher die beiden Hälften der Linse als Segmente gehören, ϱ der Halbmesser ihrer kreisförmigen Grundflächen, $2a$ die Dicke der Linse h die Länge der prismatischen Stange vom Aufhängepunkte an bis zur Stelle, wo sie von der Linse bedeckt wird, c^2 ihr Querschnitt, D und D' die Dichtigkeiten der Linse und der Stange, so ist der Abstand des Schwingungsmittelpunktes des Pendels, oder

$$l = \frac{2a^2D\pi[a(\frac{4}{3}r^2 - ar + \frac{1}{5}a^2) + (h+\varrho)^2(r - \frac{1}{3}a)] + \frac{1}{2}D'h^2c^2}{2a^2D\pi(r - \frac{1}{3}a)(h+\varrho) + \frac{1}{2}D'h^2c^2}$$

Beweis. Das Trägheitsmoment eines Kugelabschnittes hinsichtlich einer durch den Schwerpunkt gehenden Momentenaxe ist nach (682) $\frac{1}{2}\pi x^3(\frac{2}{3}r^2 - rx + \frac{1}{5}x^2)$, das Doppelte hiervon multiplizirt mit der Dichtigkeit D liefert das Trägheitsmoment der Linse in Beziehung auf eine durch den Mittelpunkt der Linse parallel zur Drehaxe gezogene horizontale Momentenaxe. Hieraus folgt nach (665) weil hier $M = 2D\pi x^2(r - \frac{1}{3}x)$, $a = h + r$ ist, das Trägheitsmoment der Linse hinsichtlich der Umdrehungsaxe, für $x = a$

$$2a^2D\pi[a(\tfrac{4}{3}r^2 - ar + \tfrac{1}{5}a^2) + (h+\varrho)^2(r - \tfrac{1}{3}a)],$$

das Trägheitsmoment der Pendelstange ist aber nach (667) $\frac{1}{2}D'h^2c^2$. Andrerseits ist das statische Moment der Linse $2a^2D\pi(r - \frac{1}{3}a)(h+\varrho)$, und jenes der Stange $\frac{1}{2}D'h^2c^2$, und durch Verbindung dieser Werthe erhält man nach (702) den oben angesetzten Ausdruck.

706. Folgesatz. Ist der Querschnitt der Pendelstange sehr klein, so lassen sich die in c^2 multiplizirten Glieder im Zähler und Nenner des Werthes für l vernachlässigen, und es ergibt sich nahe

$$l = \frac{a(\frac{4}{3}r^2 - ar + \frac{1}{5}a^2) + (h+\varrho)^2(r - \frac{2}{3}a)}{(r - \frac{1}{3}a)(h+\varrho)}$$

707. Lehrsatz. Wird durch den Schwingungsmittelpunkt eines zusammengesetzten Pendels die Umdrehungsaxe geführt, so daß es um diesen Punkt sich drehen kann, so fällt der neue Schwingungsmittelpunkt mit dem vorigen Aufhängepunkte zusammen.

Digitized by Google

Beweis. Man stelle sich vor, das Pendel *OMN* (Fig. 181) werde umgekehrt, und die Umdrehungsaxe statt durch den Aufhängepunkt *O* durch den Schwingungsmittelpunkt *D* gezogen, so bleibt der Schwerpunkt des Körpers unveränderlich in *A* und eben so sein Trägheitsmoment Mk^2 hinsichtlich einer horizontal durch den Schwerpunkt gezogenen Momentenaxe; sei dann l' der unbekannte Abstand des neuen Schwingungsmittelpunktes von der Umdrehungsaxe durch *D*, und a' die Entfernung des neuen Aufhängepunktes vom Schwerpunkte *A*, so hat man nach (702)

$$l' = \frac{M(a'^2+k^2)}{Ma'} = a' + \frac{k^2}{a'}$$

allein $a'=l-a$, und wegen

$$l = a + \frac{k^2}{a^2}, \text{ wird } a' = \frac{k^2}{a}, \text{ sonach}$$

$$l' = l - a + \frac{k^2}{a'} = l - a + a = l,$$

d. i. der neue Schwingungsmittelpunkt fällt mit dem vorigen Aufhängepunkte zusammen.

708. Folgesatz. Ein zusammengesetztes Pendel schwingt auf gleiche Weise, wenn man in demselben den Aufhängepunkt mit dem Schwingungsmittelpunkte vertauscht.

VII. Stoss fester Körper.

709. Erklärung. Kann ein fester Körper seine Bewegung nicht fortsetzen, ohne einen andern festen Körper von seinem Orte zu verdrängen, so erfolgt im Augenblicke der Berührung ihrer Oberflächen eine Erscheinung, welche eine plötzliche Aenderung der Richtungen und Geschwindigkeiten der bewegten Massen zur Folge hat, und welche man mit dem Namen Stoß bezeichnet.

Wenn die Richtungen der Bewegung der Schwerpunkte zweier Körper im Augenblicke des Anstoßens auf der sie berührenden Ebene senkrecht stehen, so wird der Stoß ein gerader genannt,

Digitized by Google

im Gegenfalle heißt der Stoß schief. Geht die Normale des Berührungspunktes zweier Körper durch die Schwerpunkte derselben, so ist der Stoß central, sonst excentrisch.

1. Gerader Stoß fester Körper.

710. Anmerkung. Die Wirkung des Stosses bei dem Zusammentreffen zweier Körper ist von der Beschaffenheit derselben abhängig, und man unterscheidet daher hierbei die Körper in elastische und in unelastische. Um die Untersuchung zu vereinfachen, werden die bewegten Körper als Kugeln angenommen. Der Stoß zweier Körper scheint augenblicklich zu erfolgen: dieses ist aber in der Wirklichkeit nicht der Fall, denn alle Körper sind mehr oder weniger elastisch; sie drücken sich also an den Berührungsstellen nach und nach ein. In dem Maße, als die Formänderung vor sich geht, ändern sich die Geschwindigkeiten der übrigen Theile derselben, und die Differenz der normalen Geschwindigkeiten der beiden Berührungspunkte wird allmählig kleiner, und zuletzt null, d. i. die Normalgeschwindigkeiten werden einander gleich. Sind also die Körper absolut hart, so kann zwar von der Formänderung der bewegten Körper keine Rede sein, allein der Stoß dauert doch eine Zeit hindurch, als jene Differenz der Geschwindigkeiten fortbesteht; es hört die Gegenwirkung in diesem Augenblicke auf, und der Stoß ist beendigt. Wenn dagegen die Körper elastisch sind, so fangen sie von diesem Augenblicke an, ihre Gestalt wieder herzustellen; sie üben daher nochmals einen Druck gegen einander aus, wodurch ihre Geschwindigkeiten beziehlich noch mehr geändert werden.

711. Lehrsatz. Wenn zwei unelastische Kugeln auf einander stoßen, so ist ihre Geschwindigkeit nach dem Stosse gleich der Summe ihrer Bewegungsgrößen, getheilt durch die Summe der Massen.

Beweis. Wenn zwei Kugeln, deren Geschwindigkeiten C und c, Massen M und m sind, auf einander stoßen, sei P die Kraft des Stosses, und von dem Augenblicke des Zusammentreffens bis zum Momente, in welchem die Kraft P noch wirksam sich zeigt,

sei die Zeit t verflossen, V und v aber seien die Geschwindigkeiten der Kugeln am Ende dieser Zeit. Während nun t um dt wächst, ändern sich V um dV und v um dv, und da durch den Stoß die anstoßende Kugel an Geschwindigkeit verliert, und die gestoßene Kugel an Geschwindigkeit gewinnt, so hat man die bewegende Kraft beider Kugeln

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Pg}{m}, \quad \frac{dV}{dt} = -\frac{Pg}{M}$$

und weil P als eine unbekannte Funktion der Zeit betrachtet werden kann, die ft heißen mag, erhält man

$$dv = \frac{g}{m} ft.dt, \; dV = -\frac{g}{m} ft.dt$$

die Integration gibt, wenn die Funktion qt das Integrale von $ft.dt$ vorstellt, und a, A die Konstanten der Integration bedeuten,

$$v = \frac{g}{m} qt + a, \quad V = -\frac{g}{M} qt + A$$

Da nun für $t=0$, der Natur der Sache zufolge, v in c, V in C übergeht, so hat man zur Bestimmung der Konstanten a, A die Gleichungen

$$c = \frac{g}{m} q0 + a, \; C = -\frac{g}{M} q0 + A$$

mithin vollständig

$$v = c + \frac{g}{m}(qt - q0), \; V = C + \frac{g}{M}(q0 - qt)$$

Sei w die gemeinschaftliche Geschwindigkeit beider Kugeln, nachdem der Stoß vollbracht ist, t' die Dauer desselben, so hat man aus den beiden letzten Gleichungen sofort

$$w = c + \frac{g}{m}(qt' - q0), \text{ und } w = c + \frac{g}{M}(q0 - qt')$$

Digitized by Google

multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit m, die andere mit M, so folgt

$$w(M + m) = MC + mc, \text{ woraus sich}$$

$$w = \frac{MC + mc}{M + m} \text{ ergibt.}$$

712. Folgesatz. Befindet sich die gestoßene Kugel vor dem Stosse in Ruhe, so ist $c = 0$, und $w = MC : (M + m)$.

Bewegen sich aber beide Kugeln gegen einander, so ist c negativ und

$$w = \frac{MC - mc}{M + m}$$

und wenn hierbei die Massen einander gleich sind, wird

$$w = \tfrac{1}{2}(C - c).$$

713. Folgesatz 2. Durch den Stoß verliert der anstoßende Körper an Geschwindigkeit die Größe $C - w$, und der gestoßene Körper gewinnt an Geschwindigkeit $w - c$; es ist aber

$$C - w = C - \frac{MC + mc}{M + m} = \frac{m(C - c)}{M + m}, \text{ und } w - c = \frac{M(C - c)}{M + m}$$

714. Aufgabe. Zwei elastische Kugeln, deren Massen und Geschwindigkeiten gegeben sind, stoßen auf einander; man sucht ihre Geschwindigkeiten nach dem Stosse.

Auflösung. Sind M, m die Massen, C und c die Geschwindigkeiten beider Kugeln vor dem Stosse, und V die Geschwindigkeit der stoßenden, v die der gestossenen Kugel nach dem Stosse, so hat man

$$v = \frac{M(2C - c) + mc}{M + m}, \quad V = \frac{m(2c - C) + MC}{M + m}$$

Beweis. Sobald die beiden elastischen Kugeln durch den Stoß das Maximum ihrer Zusammendrückung erlitten haben, wobei die stoßende Kugel einen Verlust, die gestoßene Kugel aber einen Gewinn an Geschwindigkeit erfährt, deren Größen beziehlich aus

Digitized by Google

(713) sich ergeben, ist der Stoß keineswegs beendigt, sondern er dauert noch durch die Zwischenzeit t fort, binnen welcher sich ihre kugelförmige Gestalten wieder herstellen, und wobei der stoßende Körper noch einmal so viel an seiner Geschwindigkeit verliert, und der gestoßene Körper wieder eben so viel gewinnt, als wenn die Kugeln absolut hart wären; es sind also diese Geschwindigkeitsänderungen nach (713) beziehungsweise

$$-2(C-w)=-\frac{2m(C-c)}{M+m}, \text{ und } 2(w-c)=\frac{2M(C-c)}{M+m}$$

demnach ergibt sich

$$V=C-\frac{2m(C-c)}{M+m}=\frac{MC+m(2c-C)}{M+m}, \text{ und}$$

$$v=c+\frac{2M(C-c)}{M+m}=\frac{mc+M(2C-c)}{M+m}$$

welche Ausdrücke offenbar in einander übergehen, wenn man M mit m und C mit c gleichzeitig vertauscht.

715. *Folgesatz.* Wenn der gestoßene Körper in Ruhe sich befindet, so ist $c=0$, daher

$$V=\frac{C(M-m)}{M+m}, \quad v=\frac{2MC}{M+m}$$

sind aber nebstdem ihre Massen gleich, so folgt

$$V=0, \quad v=C,$$

d. i. der stoßende Körper wird nach dem Stosse ruhen, und der gestoßene bewegt sich mit der Geschwindigkeit und Richtung des stoßenden Körpers.

716. *Folgesatz 2.* Bewegen sich aber beide Körper gegeneinander, so wird c negativ, daher

$$V=\frac{MC-m(2c+C)}{M+m}, \quad v=\frac{M(2C+c)-mc}{M+m}$$

Digitized by Google

und sind überdieß die Massen einander gleich, so wird

$$V = -c, \quad v = +C,$$

d. i. sie wechseln nach dem Stosse ihre Geschwindigkeiten und Richtungen; der stoßende Körper erhält die Geschwindigkeit des gestoßenen, mit der er zurückprallt, und der gestoßene Körper bewegt sich mit der Geschwindigkeit und Richtung des stoßenden Körpers.

717. Erklärung. Unter der mechanischen Wirkung oder Arbeitsgröße einer Kraft versteht man das Produkt aus der Kraft in die Geschwindigkeit, welche sie an dem Angriffspunkte erzeugt. Die mechanische Wirkung des Stosses ist das Produkt aus der Bewegungsgröße in ihre Geschwindigkeit, bezogen auf die zur Einheit angenommene Beschleunigung der Schwere. Man nennt sie auch lebendige Kraft der bewegten Masse.

718. Folgesatz. Heißt P die auf der Masse m angebrachte Kraft und c die erzeugte Geschwindigkeit, so ist Pc die Arbeitsgröße der Kraft P, mc die Bewegungsgröße des Körpers, und $mc^2 : g$ die mechanische Wirkung oder die lebendige Kraft des Stosses.

719. Lehrsatz. Beim Stosse harter Körper ist der Verlust an lebendiger Kraft, welchen beide Körper zusammen durch den Stoß erleiden, gleich der lebendigen Kraft einer Masse, welche die vierte Proportionalzahl zur Summe beider Massen und den einzelnen Massen der stoßenden Körper bildet, und deren Geschwindigkeit der Unterschied der Geschwindigkeiten beider Körper vor dem Stosse ist.

Beweis. Man bezeichne, wie vorhin, mit M, m die Massen, mit C, c die Geschwindigkeiten der an einander stoßenden unelastischen Körper, so hat man die mechanische Wirkung beider Körper vor dem Stosse

$$E = \frac{MC^2 + mc^2}{g}$$

Digitized by Google

und die mechanische Wirkung derselben nach dem Stosse

$$E' = \frac{Mw^2 + mw^2}{g} = \frac{(M+m)w^2}{g} = \frac{(MC+mc)^2}{g(M+m)}$$

daher ist

$$E - E' = \frac{MC^2 + mc^2}{g} - \frac{(MC+mc)^2}{g(M+m)} = \frac{Mm(C-c)^2}{g(M+m)}$$

es bedeutet aber $Mm : M+m$ eine Masse, welche die vierte Proportionalzahl zu $M+m$, M und m vorstellt, woraus die Wahrheit des Satzes unmittelbar folgt.

720. Lehrsatz. Beim Stosse elastischer Körper sind die lebendigen Kräfte vor und nach dem Stosse einander gleich.

Beweis. Heißen V und v die Geschwindigkeiten beider Körper nach dem Stosse, so hat man

$$E = \frac{MC^2 + mc^2}{g}, \quad E' = \frac{MV^2 + mv^2}{g}$$

nun ist $V = C - 2(C-w) = 2w - C$, $v = c + 2(w-c) = 2w - c$, wo w aus (711) bekannt ist, und man erhält

$$E' = \frac{M(2w-C)^2 + m(2w-c)^2}{g}$$

oder reduzirend

$$E' = \frac{4w^2(M+m) - 4w(MC+mc) + MC^2 + mc^2}{g}$$

aber $\frac{4w^2(M+m)}{g} = \frac{4(MC+mc)^2}{g(M+m)} = \frac{4w(MC+mc)}{g}$

sonach ist $E = E'$.

721. Lehrsatz. Wird ein Körper von einer Kraft nach einer Richtung gestoßen, welche verlängert nicht durch seinen Schwerpunkt geht, so erhält der Körper eine zweifache Bewegung, eine fortschreitende, bei welcher der Schwerpunkt des Körpers sich gerade so bewegt, als ob die Richtung des Stosses durch den

Digitized by Google

Schwerpunkt ginge, und gleichzeitig eine drehende Bewegung, um eine zur Ebene, in welcher die Richtung des Stosses und der Schwerpunkt des Körpers sich befindet, senkrecht durch den Schwerpunkt gehende Axe.

Beweis. Sei PA (Fig. 182) die Richtung und Größe einer Kraft P, welche an dem Angriffspunkte A dem Körper, dessen Schwerpunkt in G angenommen wird, einen Stoß versetzt; man schneide den Körper mit einer Ebene YGX, in welcher die Richtung AP der Kraft und der Schwerpunkt sich befindet, ziehe GX parallel mit AP, und GZ senkrecht auf diese Ebene; man halbire AP in B, und zerlege die Kraft BP in die Seitenkräfte PD parallel zu GY und PC nach einer durch den Schwerpunkt G gehenden Richtung versetze den Angriffspunkt P der Kraft PC in den Punkt E ihrer Richtung so, daß $CG=CE$ wird, und mache $EF=PC$, hierauf zerlege man EF in die Seitenkräfte EI, EH parallel zu GY, GX; so wirken nun statt der Kraft P am Punkte A die vier Kräfte AB, EH, und PD, EI, deren erstere zu GX, letztere zu GY parallel laufen: jene geben, wegen $EH=BP$, die Resultirende $GK=AP$, welche durch den Schwerpunkt geht, diese erzeugen an den gleichen Hebelsarmen AG, GL die Umdrehung des Körpers um eine durch den Schwerpunkt G senkrecht auf der Ebene YGX gehende Axe GZ.

722. Folgesatz. Wenn also eine Kraft P einen Körper nach einer nicht durch dessen Schwerpunkt gehenden Richtung trifft, so bewegt sich der Schwerpunkt so, als ob die Masse des Körpers in demselben vereinigt wäre, und die Richtung des Stosses durch den Schwerpunkt ginge; man hat also, wenn M die Masse des Körpers, v die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung und ω die Umdrehungsgeschwindigkeit bedeutet, für $AG=p$

$$s = vdt,\ dv = \frac{gPdt}{M},\quad \omega = \frac{Pp}{Mk^2}$$

723. Folgesatz 2. Die Bewegung einer Kugel auf der schiefen Ebene ist so beschaffen, daß der Schwerpunkt der Kugel parallel zur Länge der schiefen Ebene sich fortbewegt, dabei aber

Digitized by Google

zugleich die Kugel um eine horizontale Axe sich dreht, weil die, obschon geringe Reibung für eine widerstehende Kraft anzusehen ist, welche im Berührungspunkte an dem Endpunkte des Halbmessers senkrecht angebracht ist, und weil der Schwerpunkt der Kugel in der vertikalen Richtung nicht unterstützt ist.

724. Anmerkung. Eine gestoßene Billardkugel nimmt auch beim geraden und centralen Stosse immer beide Bewegungen an, weil die Reibung zwischen der Kugel und der Ebene des Billards nicht unbedeutend ist. Bei dem Bombenwerfen ist die Achse der Kammer die mittlere Richtung der bewegenden Kraft; wegen des Spielraums liegt der Schwerpunkt der Bombe bei der Neigung des Pöllers außer der Achse der Kammer, und aus dieser Ursache beschreibt die Bombe ihre Bahn gemeiniglich mit einer drehenden Bewegung, wenn sie beim Herausfahren auch nicht an die inneren Wände des Pöllers angeschlagen hat. Unsere Erde besitzt außer der fortschreitenden Bewegung um die Sonne, noch eine tägliche Umdrehung um ihre Axe, woraus geschlossen werden kann, daß sie zuerst beim Anfange ihrer Bewegung einen Stoß erhalten haben muß, dessen Richtung nicht durch ihren Schwerpunkt ging. Betrachtet man die Erde als eine gleich dichte Kugel vom Halbmesser r, welche in dem Abstande p von ihrem Mittelpunkte durch eine momentane Kraft P in Bewegung versetzt wurde, sei C die Geschwindigkeit eines Punktes am Aequator, und c die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung, so hat man $M = \frac{4}{3}\pi r^3$ das Trägheitsmoment der Kugel $Mk^2 = \frac{8}{15}\pi r^5$, daher $P = \frac{4}{3}\pi r^3 c$, und $C = r\omega$

$$\omega = \frac{Pp}{\frac{8}{15}\pi r^5} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 cp}{\frac{8}{15}\pi r^5} = \frac{5cp}{2r^2}$$

$$\text{woraus } p = \frac{2r^2\omega}{5c} = \frac{2rC}{5c}$$

folgt. Durch Substitution der für C und c beobachteten Werthe ergibt sich beiläufig $p = r : 160$, d. i. der Stoß, welchen unsere Erde vor aller Bewegung ursprünglich erlitt, ging in einer Entfernung von ungefähr 5 Meilen vom Mittelpunkte der Erde.

Digitized by Google

2. Schiefer Stoß fester Körper.

725. Aufgabe. Aus den gegebenen Halbmessern zweier Kugeln, den Geschwindigkeiten und Richtungen ihrer Bewegung, den Ort ihrer Mittelpunkte anzugeben, wenn sie mit einander zusammentreffen.

Auflösung. Seien C, c die Geschwindigkeiten, R, r die Halbmesser zweier Kugeln, deren Mittelpunkte sich zu Anfang der Bewegung in den Punkten A und B auf der Geraden AB (Fig. 183) befinden, und AC, BC die Richtungen ihrer Bewegung, welche verlängert im Punkte C zusammentreffen, man schneide von der wo nöthig verlängerten Geraden BC das Stück BD so ab, daß sich verhält $C : c = AC : BD$, ergänze das Parallelogramm $ABEC$, verbinde E mit D, und schneide aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser $CF = R + r$ in die Gerade ED ein, führe die Gerade CD, ferner FG mit AC, GH mit CF parallel; so sind die so bestimmten Punkte G, H die gleichzeitigen Orte der Mittelpunkte der Kugeln bei ihrem Zusammentreffen. Wäre aber $C : c = AC : BD'$, so daß der Punkt D' in die Verlängerung der Geraden BC fiele, so gibt eine ähnliche Konstruktion die Punkte G', H' für den Ort der Mittelpunkte beider Kugeln bei ihrem Zusammentreffen.

Beweis. Man hat zu beweisen, daß $C : c = AH : BG$, und daß $GH = R + r$ sei. Das erstere erhellet so:

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke DFG, BDE hat man

$$\left.\begin{matrix} BE \\ AC \end{matrix}\right\} : BD = \left.\begin{matrix} GF \\ CH \end{matrix}\right\} : GD, \text{ also auch}$$

$$\left.\begin{matrix} AC - CH \\ AH \end{matrix}\right\} : \left.\begin{matrix} BD - GD \\ BG \end{matrix}\right\} = AC : BD = C : c.$$

Ferner ist $GH = FC = R + r$.

726. Folgesatz. Die Möglichkeit des Stosses zweier Kugeln hängt daher von der Bedingung ab, daß das Perpendikel aus C auf die Gerade ED nicht größer sei, als die Summe $R + r$ ihrer Halbmesser.

Digitized by Google

727. Aufgabe. Zwei nicht elastische Kugeln bewegen sich mit gegebenen Geschwindigkeiten und nach gegebenen Richtungen so, daß sie beim Zusammentreffen einen schiefen Stoß erleiden; man sucht die Geschwindigkeiten und Richtungen nach dem Stosse.

Auflösung. Sind M, m die Massen, C, c die Geschwindigkeiten beider Kugeln A, B (Fig. 184), ferner G, H ihre gleichzeitigen Orte beim Zusammentreffen, also $AH : BG = C : c$ (725), heißen ferner α, β die spitzigen Winkel AHI, BGI, welche die verlängerte Gerade GH durch ihre Mittelpunkte im Augenblicke des Stosses mit ihren Richtungen einschließt und α', β' die Winkel derselben Geraden mit ihren Richtungen HY, BX nach dem Stosse, so hat man

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{C\sin\alpha}{w},\quad \operatorname{tg}\beta' = \frac{c\sin\beta}{w},\quad w = \frac{MC\cos\alpha - mc\cos\beta}{M+m}$$

und die Geschwindigkeiten V, v nach dem Stosse

$$V = \sqrt{(C^2\sin^2\alpha + w^2)},\ v = (c^2\sin^2\beta + w^2).$$

Beweis. Durch Zerlegung der Geschwindigkeiten AH, BG in die Seitengeschwindigkeiten $HL = C\cos\alpha$, $HM = C\sin\alpha$, und $GI = c\cos\beta$, $GK = c\sin\beta$, unter denen die Geschwindigkeiten $C\sin\alpha$ und $c\sin\beta$ gar nichts zum Stoß beitragen, erhält man die gemeinschaftliche Geschwindigkeit w nach dem Stosse durch die Formel

$$w = \frac{MC\cos\alpha - mc\cos\beta}{M+m}$$

ist nun $w = GN = HO$, so erzeugen die Seitengeschwindigkeiten $HM' = C\sin\alpha$, und HO eine Bewegung des Körpers A nach der Richtung HY, und die Seitengeschwindigkeiten $GK' = c\sin\beta$ und GN eine Bewegung von B nach der Richtung GX, und es ergeben sich für $\operatorname{tg}\alpha'$ und $\operatorname{tg}\beta'$, ferner für V und v sofort die angegebenen Werthe.

728. Aufgabe. Zwei elastische Kugeln bewegen sich mit gegebenen Geschwindigkeiten und Richtungen; es sollen die Geschwindigkeiten und Richtungen der Bewegung beider Körper nach dem Stosse gefunden werden.

Digitized by Google

Auflösung. Zieht man durch den Ort ihrer Mittelpunkte G, H (Fig. 184) im Augenblicke des Stoßes die Gerade IO, und bezeichnet die Winkel derselben mit den Richtungen der Bewegung vor dem Stoße durch α, β, und die Winkel derselben Geraden mit den Richtungen nach dem Stoße mit α', β', so hat man für

$$V = \frac{M(2C\cos\alpha - c\cos\beta) + cm\cos\beta}{M+m}$$

$$v = \frac{m(2c\cos\beta - C\cos\alpha) + Mc\cos\alpha}{M+m}$$

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{C\sin\alpha}{V},\quad \operatorname{tg}\beta' = \frac{c\sin\beta}{v}$$

und die Geschwindigkeiten nach dem Stoße sind

$$V' = \sqrt{(C^2\sin^2\alpha + V^2)},\quad v' = \sqrt{(c^2\sin^2\beta + v^2)}$$

Beweis. Die Geschwindigkeit $AH = C$ zerfällt in die Seitengeschwindigkeiten $HL = C\cos\alpha$, und $HM = C\sin\alpha$, und eben so die Geschwindigkeit $BG = c$ in $GI = c\cos\beta$ und $GK = c\sin\beta$. Der Stoß erfolgt zwischen den Massen M und m in der Richtung IO mit den Geschwindigkeiten $C\cos\alpha$, $c\cos\beta$, und man findet nach (714) ihre Geschwindigkeiten V, v nach dem Stoße, wie oben. Ist nun $HO = V$, $GN = v$, und man verbindet sie mit den Seitengeschwindigkeiten $C\sin\alpha$, $c\sin\beta$, so ergeben sich die zusammengesetzten Geschwindigkeiten

$$HY = \sqrt{(C^2\sin^2\alpha + V^2)},\quad GX = \sqrt{(c^2\sin^2\beta + v^2)}$$

und ihre Richtungswinkel α', β' wie oben.

729. Lehrsatz. Wenn ein nicht elastischer Körper auf eine unbewegliche horizontale Ebene schief anstößt, so bewegt er sich nach dem Stoße längs der Ebene mit einer Geschwindigkeit, welche dem Produkte aus der Geschwindigkeit des Körpers in den Kosinus seines Richtungswinkels mit der Ebene gleich ist.

Beweis. Ist α der Winkel zwischen der Richtung der Bewegung und der festen Ebene, und c die Geschwindigkeit des anstoßenden Körpers, so zerfällt dieselbe in die Seitengeschwindigkeiten

Digitized by Google

$c\cos\alpha$ längs der Ebene, und $c\sin\alpha$ senkrecht auf dieselbe: die letztere wird aber durch die Festigkeit der Ebene aufgehoben, demnach bewegt sich der Körper längs der Ebene mit der Geschwindigkeit $c\cos\alpha$.

730. Lehrsatz. Wenn ein elastischer Körper auf eine unbewegliche Ebene schief anstößt, so bewegt er sich nach dem Stosse mit derselben Geschwindigkeit wie vor dem Stosse, und nach einer Richtung, welche mit der festen Ebene einen Winkel einschließt, der dem Richtungswinkel des anstoßenden Körpers gleich kommt, d. i. die Richtungen der Bewegung vor und nach dem Stosse schließen mit der festen Ebene gleiche Winkel ein.

Beweis. Zerlegt man die Geschwindigkeit c des anstoßenden Körpers in die Seitengeschwindigkeiten $c\cos\alpha$, $c\sin\alpha$, so trägt die erstere zum Stosse gar nichts bei, weil ihre Richtung mit der festen Ebene übereinfällt: die letztere hingegen bewirkt nach dem Stosse eine Geschwindigkeit V, welche nach (714) den Werth $-c\sin\alpha$ erhält; es sind folglich nach dem Stosse die Seitengeschwindigkeiten $-c\sin\alpha$ und $c\cos\alpha$, welche bei der Zusammensezzung die Geschwindigkeit c erzeugen, und man hat zugleich den Richtungswinkel β des bewegten Körpers nach dem Stosse aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-c\sin\alpha}{c\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha, \text{ also } \beta = \pi - \alpha.$$

731. Anmerkung. Ueber die Anwendung des schiefen Stosses elastischer Kugeln auf das Billardspiel lese man

Clar. *de la Caille* lectiones elementares Mechanicae. Viennae 1759. §. 193. Ausführlichere Untersuchungen über den Stoß fester Körper findet man in den schon o. a. Werken von *Poisson*, *Pontécoulant*, Ohm u. a. m.

VIII. Bewegung eines Systems fester Körper.

732. Anmerkung. Die Körper, deren Bewegung wir bisher bestimmt haben, wurden, mit Ausnahme einzelner Fälle, als ma-

Digitized by Google

terielle Punkte betrachtet, welche von Kräften getrieben wurden, deren Richtungen sämmtlich in eine und dieselbe Ebene fallen. Nun wollen wir uns zu jenem Standpunkte erheben, von welchem aus die großen Meister der analytischen Mechanik *Lagrange* und *Laplace* ausgegangen sind, um ihre bewunderungswürdigen Entdeckungen vorzubereiten, welche stets als das schönste Denkmal menschlichen Scharfsinnes da stehen werden.

1. Allgemeine Lehrsätze der Bewegung.

733. Grundsatz. Wenn ein System von materiellen Punkten oder Körpern, auf welches Kräfte wirken, sich bewegt, so wird im Allgemeinen jeder Punkt desselben eine Geschwindigkeit annehmen, die von derjenigen verschieden ist, welche ihm die an ihm wirkenden Kräfte mittheilen würden, wenn er frei wäre. Die letztere kann man in zwei Seitengeschwindigkeiten zerlegen, von denen eine der Geschwindigkeit gleich ist, die der Punkt wirklich annimmt; die andere Seitengeschwindigkeit kommt nicht in Thätigkeit, sondern sie wird durch die Gegenwirkung der übrigen Punkte aufgehoben, und ist demnach als verloren anzusehen, so wie die der letzteren korrespondirende Kraft gleichfalls als verloren zu betrachten ist.

Die Anzahl der mit einander verbundenen materiellen Punkte oder Körper und die Art ihrer Verbindung mag sein wie immer, so müssen die in jedem Augenblicke verloren gehenden Kräfte sich aufheben also unter einander im Gleichgewichte stehen.

Durch diesen Grundsatz lassen sich sämmtliche Aufgaben über die Bewegung eines Systems von materiellen Punkten, oder eines Systems von Körpern auf die Gesetze des Gleichgewichts zurückführen. Man nennt ihn nach dessen Erfinder *d'Alembert* das D'Alembert'sche Prinzip.

734. Folgesatz. Ertheilt man dem Systeme materieller Punkte oder Körper eine Bewegung, welche derjenigen, die es annehmen muß, gleich, aber dem Sinne nach entgegengesetzt ist, so wird das ganze System ruhen; folglich vernichten diese Bewegungen diejenigen, welche das System angenommen hat, und welchem es ohne

Digitized by Google

dessen gegenseitige Verbindung gefolgt sein würde. Es muß also zwischen diesen verschiedenen Bewegungen oder den sie erzeugenden Kräften Gleichgewicht vorhanden sein.

735. Lehrsatz. In einem freien System von materiellen Punkten oder Körpern, auf welche beliebig viele Kräfte nach bestimmten Richtungen wirken, gibt es folgende sechs Bewegungsgleichungen:

$$1)\ \Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma mX,\quad 2)\ \Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}=\Sigma mY,\quad 3)\ \Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}=\Sigma mZ$$

$$4)\ \Sigma m\left(\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}\right)=\Sigma m(xY-yX)$$

$$5)\ \Sigma m\left(\frac{zd^2x-xd^2z}{dt^2}\right)=\Sigma m(zX-xZ)$$

$$6)\ \Sigma m\left(\frac{yd^2z-zd^2y}{dt^2}\right)=\Sigma m(yZ-zY)$$

Beweis. Betrachten wir ein System von Körpern, welche beliebig auf einander wirken, und von irgend welchen beschleunigenden Kräften getrieben werden. Es seien m_1, m_2, m_3 ... die Massen der verschiedenen Körper des Systems, $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$... die ihre Lage im Raume bestimmenden rechtwinkligen Koordinaten. Wie immer die Zahl der Kräfte P, P', P'' ... welche die Masse m an dem Punkte, dessen Koordinaten x, y, z sind, angreifen, beschaffen sein mag, stets läßt sich ihre Wirkung auf drei den Axen parallele Kräfte X, Y, Z (45) zurückführen, welche dasselbe leisten, als alle jene Kräfte zusammen; es sind also X, Y, Z die beschleunigenden Kräfte, welche auf die Masseneinheit parallel zu den Koordinatenaxen wirken, daher mX, mY, mZ die Kräfte, welche den Körper m nach, nach eben diesen Richtungen treiben. Zerlegt man die Geschwindigkeit, welche der Körper vor der Einwirkung dieser Kräfte hatte, nämlich

$$\frac{ds}{dt}\text{ in die Seitengeschwindigkeiten }\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}$$

Digitized by Google

nach den Richtungen der Axen, so sind

$$\text{I.} \quad \frac{mdx}{dt}, \quad \frac{mdy}{dt}, \quad \frac{mdz}{dt}$$

die ihnen zugehörenden Bewegungsgrößen, welche zufolge der Wirkung der beschleunigenden Kräfte im nächsten Zeittheile in

$$\text{II.} \quad \frac{mdx}{dt} + mXdt, \frac{mdy}{dt} + mYdt, \frac{mdz}{dt} + mZdt$$

übergehen. Andrerseits erleiden die in I. aufgeführten Kräfte wegen der Einwirkung der Beschleunigungen einen Zuwachs, welcher dadurch bestimmt wird, daß man die in I. vorkommenden Ausdrücke noch einmal differentiirt; man erhält so die wirklichen bewegenden Kräfte, welche den Körper m am Ende der Zeit dt treiben:

$$\text{III.} \quad \frac{mdx}{dt} + \frac{md^2x}{dt}, \quad \frac{mdy}{dt} + \frac{md^2y}{dt}, \quad \frac{mdz}{dt} + \frac{md^2z}{dt}$$

Nimmt man nun an, daß die in II. aufgestellten Kräfte im umgekehrten Sinne ihrer Richtung angebracht sind (734), so werden die auf diesem Körper wirkenden bewegenden Kräfte

$$\text{IV.} \quad m\left(\frac{d^2x}{dt} - Xdt\right), \quad m\left(\frac{d^2y}{dt} - Ydt\right), \quad m\left(\frac{d^2z}{dt} - Zdt\right)$$

Um die Ausdrücke für die ähnlichen, aus den Veränderungen der Bewegung der Körper m', m'' ... entspringenden Kräfte zu erhalten, braucht man nur die Buchstaben

$$m, x, y, z, X, Y, Z$$

in der Gleichung IV. zu akzentuiren.

Dem Prinzipe D'Alemberts gemäß ist aber der Körper unter der vereinigten Wirkung dieser Kräfte in Ruhe; man braucht also nur ihre Werthe in die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts von Kräften (67) zu substituiren; man erhält auf diesem Wege sogleich

Digitized by Google

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} - \Sigma mX = 0 = \Sigma P\cos\alpha$$

$$\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} - \Sigma mY = 0 = \Sigma P\cos\beta$$

$$\Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} - \Sigma mZ = 0 = \Sigma P\cos\gamma$$

und wenn man diese Werthe für $\Sigma P\cos\alpha$ und $\Sigma P\cos\beta$ in die Gleichung IV. (67) setzt, den Ausdruck

$$\Sigma my \frac{d^2x}{dt^2} - \Sigma mXy - \Sigma mx\frac{d^2y}{dt^2} + \Sigma MxY = 0$$

woraus

$$\Sigma m\left(\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2}\right) = \Sigma m(xY - Xy)$$

oder der Ausdruck 4) folgt, und auf gleiche Weise ergeben sich die Ausdrücke 5) und 6).

736. Anmerkung. Die so eben entwickelten Gleichungen 1) bis 6) gelten für jedes freie System von Körpern m, m', m'' .., in welchem kein Punkt fest ist. Wäre irgend einer dieser Körper gezwungen, auf einer gegebenen Fläche oder Kurve bleiben zu müssen, so fügt man den auf ihn wirkenden Kräften den Widerstand, welchen er von dieser Fläche oder Kurve erleidet, hinzu, und man kann ihn dann als völlig frei betrachten, daher auch für diesen Fall die Gleichungen 1) bis 6) gelten.

737. Lehrsatz. Der Schwerpunkt eines Systems von Körpern bewegt sich im Raume so, als wären alle Massen der Körper in ihm zu einem materiellen Punkte vereinigt, und alle auf die Körper einwirkenden Kräfte nach ungeänderten Richtungen unmittelbar an demselben angebracht.

Beweis. Sind x, y, z die Koordinaten des Schwerpunktes eines Systems von Körpern m, m', m'' .., so hat man (80)

$$x = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}\ ,\quad y = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}\ ,\quad z = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}$$

Digitized by Google

werden diese Ausdrücke zweimal in Beziehung auf t differentiirt, so erhält man

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}}{\Sigma m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2}}{\Sigma m}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\Sigma m \frac{d^2z}{dt^2}}{\Sigma m}$$

also mit Rücksicht auf die Gleichungen 1), 2) und 3)

$$7) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\Sigma mX}{\Sigma m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\Sigma mY}{\Sigma m}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\Sigma mZ}{\Sigma m}$$

738. Lehrsatz. Wirkt auf ein System von Körpern bloß eine momentane Kraft, die gegenseitige Einwirkung der Körper unter einander mag wie immer beschaffen sein, so bewegt sich sein Schwerpunkt geradlinig und gleichförmig.

Beweis. Sei M die Wirkung eines Elements der Masse m auf irgend ein Element von m', so ist Mm', wie auch diese Wirkung beschaffen sein mag, die beschleunigende Kraft, welche m durch m' erleidet: nennt man also p die gegenseitige Entfernung beider Körper, und α, β, γ die Winkel zwischen der Geraden p und den Koordinatenaxen, so ist vermöge dieser Wirkung allein

$$\text{I.} \quad X = Mm'\cos\alpha, \quad Y = Mm'\cos\beta, \quad Z = Mm'\cos\gamma$$

hierbei $\cos\alpha = \frac{x'-x}{p}$, $\cos\beta = \frac{y'-y}{p}$, $\cos\gamma = \frac{z'-z}{p}$

Ganz eben so erhält man die Wirkung der Masse m auf m'

$$\text{II.} \quad X' = -Mm\cos\alpha, \quad Y' = -Mm\cos\beta, \quad Z' = -Mm\cos\gamma$$

multiplizirt man I. mit m und II. mit m', so gibt die Summe dieser Produkte

$$mX + m'X' = 0, \quad mY + m'Y' = 0, \quad mZ + m'Z' = 0.$$

Aehnliche Gleichungen ergeben sich durch die Betrachtung der gegenseitigen Wirkungen der Masse m und m'', m' und m'' u. s. f.; wirkt nun auf das System keine anderweitige beschleunigende Kraft, so sind die drei Größen ΣmX, ΣmY und ΣmZ

Digitized by Google

jede für sich null. Für diesen Fall geben aber die Gleichungen 7)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

woraus integrirt

8) $x = a + bt, \quad y = a' + b't, \quad z = a'' + b''t$

folgt, wenn a, a', a'', b, b', b'' die willkührlichen Konstanten der Integration vorstellen.

Eliminirt man aus den drei Gleichungen 8) die Zeit t, so ergibt sich

$$\frac{y - a'}{b'} = \frac{z - a''}{b''} = \frac{x - a}{b}$$

woraus sogleich folgt

9) $y = \frac{b'(z - a'')}{b''} + a', \quad x = \frac{b(z - a'')}{b''} + a,$

welche Gleichungen einer Geraden im Raume angehören, längs welcher der Schwerpunkt sich bewegen muß; zugleich findet man die Geschwindigkeit dieser Bewegung

10) $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}} = \sqrt{(b^2 + b'^2 + b''^2)}$

gleich einer konstanten Größe, welche zeigt, daß die Bewegung des Schwerpunktes geradlinig und gleichförmig vor sich gehe.

739. Folgesatz. Gleichwie vermöge der Trägheit ein materieller Punkt die einmal angenommene Bewegung ohne Einwirkung einer fremden Kraft nicht ändern kann, eben so wenig kann ein System von Körpern die Bewegung seines Schwerpunktes durch die bloße Wirkung der Theile des Systems auf einander ändern. Diese Eigenschaft der Bewegung eines Systems von Körpern nennt man das Prinzip der Erhaltung des Schwerpunktes.

740. Lehrsatz. Wenn die beschleunigende Kraft der Bewegung eines Systems von Körpern stets gegen einen und denselben Mittelpunkt gekehrt ist, so ist die Summe der Produkte aus

Digitized by Google

den einzelnen Massen in die von der Projektion des Radiusvektors auf jeder der koordinirten Ebenen beschriebenen Fläche der Zeit proportional.

Beweis. Multiplizirt man die Gleichungen 4), 5) und 6) mit dt, und integrirt sie, so folgt, weil

$$\int \frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt} = \frac{x\,dy - y\,dx}{dt} \text{ ist}$$

$$11)\quad \begin{cases} \Sigma m\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dt}\right) = c + \Sigma\int m(xY - yX)\,dt \\ \Sigma m\left(\frac{z\,dx - x\,dz}{dt}\right) = c' + \Sigma\int m(zX - xZ)\,dt \\ \Sigma m\left(\frac{y\,dz - z\,dy}{dt}\right) = c'' + \Sigma\int m(yZ - zY)\,dt \end{cases}$$

wo c, c', c'' drei Konstanten der Integration bedeuten.

Wirkt auf das System außer der gegenseitigen Anziehung der dasselbe bildenden Körper nur noch eine nach dem Anfangspunkte der Koordinaten gerichtete Kraft, so sind die Glieder rechts des Gleichheitszeichens dieser Gleichung null.

Um dieses einzusehen, bezeichnen wir mit M die Wirkung eines Elements der Masse m auf irgend ein Element von m', so ist, wie in (738)

$$X = Mm'\cos\alpha,\quad Y = Mm'\cos\beta,\quad Z = Mm'\cos\gamma$$
$$X' = -Mm\cos\alpha,\quad Y' = -Mm\cos\beta,\quad Z' = -Mm\cos\gamma$$

hieraus folgt

$$mxY = Mmm'x\cos\beta,\quad myX = Mmm'y\cos\alpha$$
$$m'x'Y' = -Mmm'x'\cos\beta,\quad m'y'X' = -Mmm'y'\cos\alpha,$$

also in Beziehung auf die zwei Körper m und m' wird

$$\Sigma m(xY - yX) = Mmm'[(x - x')\cos\beta - (y - y')\cos\alpha]$$

$$\text{aber } \cos\alpha = \frac{x' - x}{p},\quad \cos\beta = \frac{y' - y}{p}$$

Digitized by Google

wodurch $\Sigma m(xY-yX)$ in Null übergeht, d. i. die Gegenwirkung der Körper des Systems verschwindet aus dem endlichen Integrale $\Sigma m(xY-yX)$.

Sei nun F die Kraft, welche das System der Körper zum Anfangspunkte der Koordinaten hintreibt, und r der Radiusvektor oder die Entfernung eines Körpers m des Systems vom Anfangspunkte, so hat man $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, und die den Axen parallelen Seitenkräfte der Kraft F sind

$$X=-\frac{Fx}{r}, \quad Y=-\frac{Fy}{r}, \quad Z=-\frac{Fz}{r}$$

hieraus erhält man für den Körper m den Ausdruck $xY-yX=0$, und dasselbe gilt von jedem andern Körper des Systems; es ist also in Beziehung auf die beschleunigenden Kräfte F, F', F'' ..., welche das System nach dem Anfangspunkte hin treiben

$$\Sigma m(xY-yX)=0, \ \Sigma m(zX-xZ)=0, \ \Sigma m(yZ-zY)=0,$$

und hierdurch verwandeln sich die Gleichungen 11) in

$$12) \quad \Sigma m(xdy-ydx)=cdt, \ \Sigma m(zdx-xdz)=c'dt, \ \Sigma m(ydz-zdy)=c''dt.$$

Der Ausdruck $xdy-ydx=cdt$ bedeutet nach (618) den doppelten Flächeninhalt des vom Radiusvektor in der Zeit dt beschriebenen Raumes, wenn die Bewegung des Körpers in der Ebene xy vor sich geht, im vorliegenden Falle aber stellt dieser Ausdruck das Doppelte der um den Anfangspunkt der Koordinaten in der Zeit dt durch die Projektion des Radiusvektors von m auf der Ebene der xy beschriebenen Fläche, und auf gleiche Weise bedeuten die Ausdrücke

$$zdx-xdz=c'dt, \ ydz-zdy=c''dt$$

das Doppelte der während eben dieser Zeit von den Projektionen dieses Radiusvektors auf den Ebenen der xy und yz beschriebenen Flächen. Die Gleichung 12) sagt also aus, daß die Summe der von den Projektionen der an einzelne Körper geführten Radienvektoren auf jede der koordinirten Ebenen beschriebenen Flä-

Digitized by Google

chen, multiplizirt in die Massen dieser Körper der Zeit proportional wachse.

741. Anmerkung. Dieses Theorem, wovon das erste Kepler'sche Gesetz (617) nur ein spezieller Fall ist, führt den Namen des Prinzips der Erhaltung der Flächen.

742. Folgesatz. Wirkt auf das System der Körper bloß die gegenseitige Anziehung ihrer Massen, so ist $F = 0$, und es läßt sich der Anfangspunkt der Koordinaten beliebig wählen, und das eben angeführte Prinzip der Flächen gilt für alle Ebenen, die man durch den zum Anfangspunkte der Koordinaten genommenen Punkt ziehen kann.

743. Folgesatz 2. Die durch die Projektionen der Radienvektoren der Körper m, m', m'' ... auf jede der koordinirten Ebenen beschriebenen Flächen sind offenbar die Projektion der von eben diesen Radienvektoren im Raum beschriebenen Flächen auf diese Ebenen. Diese Projektionen ändern ihren Werth nach der Richtung der Koordinatenebenen (A. 1584), und es läßt sich nach (A. 1587) eine Ebene bestimmen, auf welche diese Projektionen beziehungsweise mit den Massen m, m', m'' ... multiplizirt, eine größte Summe liefern.

744. Erklärung. Eine Ebene von der Eigenschaft, daß die Summe der Produkte aus den Projektionen der von den Radienvektoren eines Systems von Körpern beschriebenen Flächen in die Massen derselben multiplizirt ein Maximum wird, heißt eine Hauptprojektionsebene.

745. Aufgabe. Für ein beliebiges System bewegter Körper, auf welches außer ihren gegenseitigen Anziehungen keine anderweitige Kraft wirkt, die Lage der Hauptprojektionsebene zu finden.

Auflösung. Heißen η, η', η'' die Winkel dieser Ebene mit den koordinirten Ebenen, so hat man, wenn c, c', c'' die Konstanten der Gleichung 12) bedeuten, und Kürze halber $L^2 = c^2 + c'^2 + c''^2$ gesetzt wird,

$$13) \quad \cos\eta = \frac{c}{L}, \quad \cos\eta' = \frac{c'}{L}, \quad \cos\eta'' = \frac{c''}{L}$$

Digitized by Google

Beweis. Sei L die Summe der Projektionen der auf dieser Ebene von der Projektion der Radienvektoren der verschiedenen Körper des Systems beschriebenen Flächen, wenn jede derselben mit der Masse des betreffenden Körpers multiplizirt wird, so hat man nach (A. 1581)

$$\Sigma m(xdy-ydx)=L\cos\eta,\ \Sigma m(zdx-xdz)=L\cos\eta',$$
$$\Sigma m(ydz-zdy)=L\cos\eta'',$$

daher wegen der Gleichungen 12)

14) $$L\cos\eta=cdt,\ L\cos\eta'=c'dt,\ L\cos\eta''=c''dt$$

die Summe der Quadrate dieser drei Gleichungen liefert

$$L^2=(c^2+c'^2+c''^2)dt^2$$

während aus den Gleichungen 14)

$$\cos\eta=\frac{cdt}{L}=\frac{c}{\sqrt{(c^2+c'^2+c''^2)}}$$

und eben so $\cos\eta'$, $\cos\eta''$ wie oben sich ergeben.

746. **Folgesatz.** Nimmt man die durch die Gleichungen 13) bestimmte unveränderliche Ebene zu einer der koordinirten Ebenen, z. B. zur Ebene xy an, so sind die Winkel η', η'' rechte Winkel, also $\cos\eta'=0$, $\cos\eta''=0$, wozu erfordert wird, daß c' und c'' verschwinden. Die Größen $\frac{1}{2}c'$, $\frac{1}{2}c''$ multiplizirt in die Zeit t stellen aber die Summen der von den Projektionen der Radienvektoren der verschiedenen Körper des Systems auf die Ebenen der xz und yz beschriebenen Flächen, multiplizirt in die korrespondirenden Massen der Körper dar. Die Hauptprojektionsebene besitzt also die besondere Eigenschaft, daß diese Summe für jede auf sie senkrechte Ebene Null ist, weil die Richtung der Axen der x und y beliebig angenommen werden kann.

747. **Anmerkung.** Die Entdeckung der Hauptprojektionsebene, welche auch eine unveränderliche Ebene heißt, verdankt man *Laplace*, und sie ist in der Theorie des Weltsystems von höchster Wichtigkeit, weil man für alle Jahrhunderte ihre Lage leicht wieder findet, und so eine feste Ebene hat, auf welche die Lagen der Himmelskörper bezogen werden können.

Digitized by Google

748. Aufgabe. Für ein System fester Körper, dessen Massen und Beschleunigungen gegeben sind, die Summe der lebendigen Kräfte zu bestimmen.

Auflösung. Heißt v die Geschwindigkeit der Masse m, v' die der Masse m' u. s. f., also mv^2, $m'v'^2$, $m''v''^2$ ... die lebendigen Kräfte einzelner Körper des Systems, so hat man

$$15)\quad \Sigma mv^2 = c + 2\Sigma\int m(X dx + Y dy + Z dz),$$

wo X, Y, Z die Resultirenden der nach der Richtung der Axen zerlegten bewegenden Kräfte, und c eine willkührliche Konstante bedeuten.

Beweis. Wir bemerken vorerst, daß wenn zu den auf irgend einen Körper wirkenden Kräften P, P', P'' ... die Rückwirkungen auf diesen Körper von den andern Theilen des Systems als auf ihn wirkende Kräfte hinzugefügt werden, das System als ein freies System betrachtet, und von den gegenseitigen Anziehungen dessen Theile abstrahirt werden könne. Seien also mX, mY, mZ die Seitenkräfte sämmtlicher auf die Masse m wirkenden Kräfte, ebenso $m'X'$, $X'Y'$, $m'Z'$ diese Kräfte für m' u. s. f., so hat man zur Bestimmung der Bewegungen der Körper dieses Systems nach den Gleichungen 1), 2), 3)

$$16)\quad \begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = mX,\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = mY,\ m\dfrac{d^2z}{dt^2} = mZ \\ m'\dfrac{d^2x'}{dt^2} = m'X',\ m'\dfrac{d^2y'}{dt^2} = m'Y',\ m'\dfrac{d^2z'}{dt^2} = m'Z' \text{ u. s. f.} \end{cases}$$

multiplizirt man die ersten drei Gleichungen nach der Ordnung mit $2dx$, $2dy$, $2dz$, die folgenden drei Gleichungen mit $2dx'$, $2dy'$, $2dz'$ u. s. f., so ergibt sich nach vollzogener Integration

$$m.\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = 2m\int(X dx + Y dy + Z dz)$$

$$m'.\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{dt^2} = 2m'\int(X' dx' + Y' dy' + Z' dz') \text{ u. s. f.}$$

Digitized by Google

oder vereinigt

$$\Sigma m \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = c+2\Sigma fm(Xdx+Ydy+Zdz),$$

wo c die Konstante der Integration vorstellt.

Nun ist nach (A. 1618) $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}$, hierdurch erhält man

$$\Sigma m\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = \Sigma m.\frac{ds^2}{dt^2} = \Sigma mv^2,$$

mithin $$\Sigma mv^2=c+2\Sigma fm(Xdx+Ydy+Zdz).$$

749. Folgesatz. Wenn auf das System keine beschleunigende Kraft wirkt, und die gegenseitige Anziehung der verschiedenen Körper des Systems auf einander allein die Bewegung hervorbringt, so sind nach (738) die drei Größen ΣmX, ΣmY, ΣmZ null, und daher die Summe der lebendigen Kräfte oder die totale lebendige Kraft des Systems konstant.

750. Folgesatz 2. Die Zunahme der lebendigen Kraft des Systems beim Uebergange von einem Punkt zu einem andern ist von den durch diese verschiedenen Körper beschriebenen Kurven unabhängig, und so oft das System dieselbe Lage wieder erhält, ist diese Zunahme selbst null, und die totale lebendige Kraft wird wieder dieselbe.

751. Erklärung. Man nennt diese Eigenschaft der Bewegung eines Systems von Körpern, vermöge deren die lebendige Kraft ohne Ende periodisch wiederkehrt, das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kräfte. Sie ist es, welche uns den dermaligen Stand und die Fortdauer unseres Sonnensystems verbürgt, sobald nur die Massen einzelner Planeten keine Aenderung erleiden.

752. Lehrsatz. So oft die Seitenkräfte X, Y, Z von Kräften herrühren, welche nach festen Mittelpunkten gerichtet und ihre Intensität durch Funktionen ihrer Abstände von diesen Mittelpunkten dargestellt sind, ist die Funktion $\Sigma m(Xdx+Ydy+Zdz)$ ein vollständiges Differentiale.

Beweis. Sei p der Abstand zweier Körper m, m', deren

Lage im Raume durch die gleichzeitigen Koordinaten x, y, z und x', y', z' bestimmt ist, so hat man (A. 1548)

$$\text{I.} \quad p^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2$$

sei P eine gegebene Funktion von p, welche die gegenseitigen Wirkungen zweier Elemente der Massen m und m' auf einander darstellt, und deren Richtung die Verbindungslinie beider Punkte ist, so wird $m'P$ die beschleunigende Kraft auf m durch die Wirkung von m', und mP die beschleunigende Kraft auf m' durch die Wirkung von m. Die drei Seitenkräfte nach den Axen der x, y, z, in welche diese Kräfte zerlegt werden können, erhält man so: durch Differentiirung der Gleichung I. folgt
$pdp=-(x'-x)dx-(y'-y)dy-(z'-z)dz$, demnach

$$\text{II.} \quad \left(\frac{dp}{dx}\right)=-\frac{x'-x}{p}, \quad \left(\frac{dp}{dy}\right)=-\frac{y'-y}{p}, \quad \left(\frac{dp}{dz}\right)=-\frac{z'-z}{p}$$

heißen α, β, γ die Winkel, welche die Gerade p mit den Axen einschließt, so ist nach (A. 1549)

$$\cos\alpha=\frac{x'-x}{p}, \quad \cos\beta=\frac{y'-y}{p}, \quad \cos\gamma=\frac{z'-z}{p}$$

hierdurch wird

$$\text{III.} \quad \left(\frac{dp}{dx}\right)=-\cos\alpha, \quad \left(\frac{dp}{dy}\right)=-\cos\beta, \quad \left(\frac{dp}{dz}\right)=-\cos\gamma,$$

und es zerfällt die Kraft $m'P$ in die Seitenkräfte

$$\text{IV.} \quad -m'P\left(\frac{dp}{dx}\right), \quad -m'P\left(\frac{dp}{dy}\right), \quad -m'P\left(\frac{dp}{dz}\right)$$

und eben so die Kraft mP in die Seitenkräfte

$$\text{V.} \quad -mP\left(\frac{dp}{dx'}\right), \quad -mP\left(\frac{dp}{dy'}\right), \quad -mP\left(\frac{dp}{dz'}\right)$$

Multiplizirt man die drei Ausdrücke IV. beziehungsweise mit mdx, mdy, mdz, und die Ausdrücke V. mit $m'dx'$, $m'dy'$, $m'dz'$, so folgt

Digitized by Google

$m(Xdx+Ydy+Zdz) = m'(X'dx'+Y'dy'+Z'dz') = -mm'Pdp.$
Betrachtet man also nur die gegenseitige Wirkung von m und m' auf einander, so ist

$$\Sigma m(Xdx+Ydy+Zdz) = -mm'Pdp$$

ein vollständiges Differentiale, weil P eine Funktion von p ist.

753. *Folgesatz.* Heißt nun P die Funktion $\varphi(x, y, z, x' y', z' \ldots)$, so folgt aus 15)

$$17)\quad \Sigma mv^2 = c+2\varphi(x, y, z, x', y', z' \ldots)$$

und diese Gleichung findet für die Bewegung jedes Systems von Körpern Statt, auf welches nur die gegenseitigen Wirkungen dieser Körper, und andere nach festen Mittelpunkten gerichtete Anziehungen wirken, wohin dann fast alle Kräfte der Natur gehören.

754. *Folgesatz 2.* Wird bloß die Bewegung eines Körpers betrachtet, so fällt aus 17) das Summenzeichen Σ weg, und man kann $m=1$ setzen, wodurch

$$v^2 = c+2\varphi(x, y, z) \text{ zum Vorschein kommt.}$$

Um die Konstante c zu eliminiren, seien a, b, c, k die anfänglichen Werthe von x, y, z, v: so hat man

$$k^2 = c+2\varphi(a, b, c),$$

und wenn man diese Gleichung von der vorhergehenden abzieht,

$$18)\quad v^2 = k^2+2\varphi(x, y, z)-2\varphi(a, b, c),$$

woraus zu ersehen ist, daß der Zuwachs des Quadrates an Geschwindigkeit des Körpers, wenn er aus einer Lage in die andere kommt, wie auch die krumme Linie, die er beschreibt, beschaffen sein mag, nur von den Koordinaten a, b, c, x, y, z der zwei äußersten Punkte abhängt, übereinstimmend mit (635), welcher nur ein besonderer Fall hiervon ist.

755. *Lehrsatz.* Wenn ein Körper durch Kräfte getrieben wird, welche nach einem und demselben Mittelpunkte gerichtet sind, und eine Funktion des jedesmaligen Abstandes von diesem Mittelpunkte vorstellen, so beschreibt er eine ebene Kurve, und legt den

Digitized by Google

Raum zwischen zwei gegebenen Punkten A, B seiner Bahn in der kürzesten Zeit zurück.

Beweis. Wendet man die Gleichungen 12) auf den Fall eines einzigen in Bewegung begriffenen Körpers an, so geben sie

$$xdy - ydx = cdt,\quad zdx - xdz = c'dt,\quad ydz - zdy = c''dt.$$

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man sie durch z, y, x multiplizirt hat, so erhält man

$$cz + c'y + c''x = 0,$$

welches die Gleichung einer Ebene ist, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten hindurch geht, und gegen die koordinirten Ebenen unter den Winkeln η, η', η'' geneigt ist, welche nach den Gleichungen 13) bestimmt werden. Wir wollen nun die Gleichung 15) differentiiren, und zum Unterschiede die Differentiale der Größen x, y, z, s, welche auf die Veränderung des Ortes des bewegten Körpers Bezug haben, mit δx, δy, δz, δs bezeichnen, so erhält man nach Hinweglassung des Summenzeichens Σ und der Masse m

I. $v\delta v = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$, hierbei ist

$$X = \frac{d^2x}{dt^2},\quad Y = \frac{d^2y}{dt^2},\quad Z = \frac{d^2z}{dt^2},\ \text{demnach}$$

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt^2}$$

hierdurch verwandelt sich die Gleichung I. in

$$\text{II.}\quad vdt.\delta v = \frac{d^2x\delta x + d^2y\delta y + d^2z\delta z}{dt} = ds.\delta v.$$

Allein $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ gibt differentiirt

$$\delta ds = \frac{dx\delta dx}{ds} + \frac{dy\delta dy}{ds} + \frac{dz\delta dz}{ds}$$

woraus sich ergibt

$$\frac{ds\delta ds}{dt} = \frac{dx\delta dx}{dt} + \frac{dy\delta dy}{dt} + \frac{dz\delta dz}{dt}$$

nun ist nach (A. 1738) $\delta ds = d\delta s$, demnach

Digitized by Google

$$\text{III. } vd\delta s = d\left(\frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{dt}\right)$$

$$- \left(\frac{d^2x}{dt}\delta x + \frac{d^2y}{dt}\delta y + \frac{d^2z}{dt}dz\right)$$

Die Summe der Gleichungen II. und III. liefert wegen

$$ds.\delta u + vd\delta s = \delta vds$$

$$\delta vds = d\left(\frac{dx\delta x}{dt} + \frac{dy\delta y}{dt} + \frac{dz\delta z}{dt}\right)$$

oder integrirt

$$\text{IV. } \delta \int vds = \frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z$$

Nimmt man die Endpunkte der vom Körper beschriebenen Kurve als fest an, so sind die darauf sich beziehenden Werthe von δx, δy, δz Null, und man hat

$$\delta \int vds = 0,$$

folglich ist die Funktion $\int vds = \int v^2 dt$ ein Minimum.

756. Anmerkung. Hierin ist das Prinzip der kleinsten Wirkung bei der Bewegung eines Körpers begründet, und läßt sich folgendermaßen in Worte einkleiden: Die lebendige Kraft eines Körpers ist während der Zeit, in welcher derselbe von einer Lage in die andere übergeht, ein Minimum. Auch kann dieses Prinzip gleich den vorhergehenden, auf die Bewegung eines Systems von Körpern ausgedehnt werden, und man erhält eben so den Ausdruck $\Sigma \delta \int mvds = 0$.

2. Bestimmung der Bewegung eines Körpers.

757. Lehrsatz. Bei der Bewegung eines von beliebigen Kräften getriebenen Körpers gelten folgende sechs Gleichungen:

$$19) \int \frac{d^2x}{dt^2} . dm = \int X dm, \quad 20) \int \frac{d^2y}{dt^2} . dm = \int Y dm,$$

$$21) \int \frac{d^2z}{dt^2} dm = \int Z dm,$$

Digitized by Google

$$22)\quad \int\left(\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}\right)dm = \int(xY-yX)dm$$

$$23)\quad \int\left(\frac{zd^2x-xd^2z}{dt^2}\right)dm = \int(zX-xZ)dm$$

$$24)\quad \int\left(\frac{yd^2z-zd^2y}{dt^2}\right)dm = \int(yZ-zY)dm$$

wo X, Y, Z die den Axen parallelen Seitenkräfte bedeuten, und das Integralzeichen sich auf den materiellen Punkt dx bezieht, und auf die ganze Masse des Körpers ausgedehnt werden muß.

Beweis. Man erhält diese Gleichungen aus den in (735) angegebenen Gleichungen 1) bis 6), wenn man daselbst statt des Summenzeichens Σ, welches endliche Integrale angibt, das gewöhnliche Integralzeichen einführt, und hierbei die Masse des bewegten Körpers m mit der Masse dm seines materiellen Punktes vertauscht.

758. Anmerkung. Diese sechs Gleichungen bestimmen die Bewegung eines festen Körpers vollständig. Die drei letzteren derselben enthalten das Prinzip der Flächen (741). Hätte der Körper einen festen Punkt, so würden die Kräfte X, Y, Z null, und die Gleichungen 22), 23), 24) genügten zur Bestimmung seiner Rotation um diesen Punkt.

759. Lehrsatz. Bei der Bewegung eines festen Körpers ist die fortschreitende Bewegung seines Schwerpunktes gerade so, als ob die ganze Masse des Körpers in ihm vereinigt und die Kräfte unmittelbar an ihm angebracht wären.

Beweis. Nimmt man den Anfangspunkt der Koordinaten nicht willkührlich, sondern im Schwerpunkte des Körpers an, und man bezeichnet mit x, y, z die Koordinaten des Schwerpunktes hinsichtlich des vorigen Anfangspunktes, und mit x', y', z' die Koordinaten des materiellen Punktes dm in Beziehung auf den Schwerpunkt, so ist (A. 1537)

I. $x=x+x'$, $y=y+y'$, $z=z+z'$;

Digitized by Google

werden diese Werthe mit ihren Differentialen in die Gleichungen 19), 20), 21) substituirt, und bemerkt, daß wegen der Eigenthümlichkeit des Schwerpunktes

II. $\begin{cases} \int x'dm=0,\ \int y'dm=0,\ \int z'dm=0, \text{ also auch} \\ \int\frac{d^2x'}{dt^2}dm=0,\ \int\frac{d^2y'}{dt^2}dm=0,\ \int\frac{d^2z'}{dt^2}dm=0 \text{ sei, so erhält} \end{cases}$

man $\int\frac{d^2\xi}{dt^2}dm=\frac{md^2\xi}{dt^2}$, $\int\frac{d^2\eta}{dt^2}dm=\frac{md^2\eta}{dt^2}$, $\int\frac{d^2\zeta}{dt^2}dm=\frac{md^2\zeta}{dt^2}$

mithin die Gleichungen

25) $\frac{md^2\xi}{dt^2}=\int Xdm$, 26) $\frac{md^2\eta}{dt^2}=\int Ydm$, 27) $\frac{md^2\zeta}{dt^2}=\int Zdm$,

welche die Bewegung des Schwerpunktes bestimmen.

760. Lehrsatz. Während der Bewegung eines Körpers rotirt derselbe zugleich um seinen Schwerpunkt gerade so, als ob derselbe fest wäre.

Beweis. Substituirt man die Werthe von x, y, z aus I. (759) in die Gleichung 22), so ergibt sich

III. $$\int\frac{(\xi+x')(d^2\eta+d^2y')-(\eta+y')(d^2\xi+d^2x')}{dt^2}dm$$
$$=\int[(\xi+x')X-(\eta+y')X]dm.$$

Da aber die Werthe von ξ, η, ζ für alle Elemente des Körpers ungeändert bleiben, so ist

$$\int(\xi d^2\eta-\eta d^2\xi)dm=m(\xi d^2\eta-\eta d^2\xi). \text{ und}$$
$$\int(\xi Y-\eta X)dm=\xi\int Ydm-\eta\int Xdm,$$

hiermit reduzirt sich die Gleichung III. auf

IV. $$\int(x'd^2y-y'd^2x+\xi d^2y'-\eta d^2x')dm$$
$$=d^2\eta\int x'dm-d^2\xi\int y'dm+\xi\int d^2y'dm-\eta\int d^2x'dm.$$

Nun beziehen sich die veränderlichen Größen x', y', z' auf einen Anfangspunkt, welcher im Schwerpunkte des Körpers liegt, und somit sind alle Glieder rechts des Gleichheitszeichens

Digitized by Google

dieser Gleichung Null; man hat also

$$28)\quad \int\left(\frac{x'd^2y'-y'd^2x'}{dt^2}\right)dm=\int(x'Y-y'X)dm$$

und auf gleiche Weise erhält man aus 23) und 24)

$$29)\quad \int\left(\frac{z'd^2x'-x'd^2z'}{dt^2}\right)dm=\int(z'X-x'Z)dm$$

$$30)\quad \int\left(\frac{y'd^2z'-z'd^2y'}{dt^2}\right)dm=\int(y'Z-z'Y)dm,$$

welche drei Gleichungen die Drehung des Körpers um seinen Schwerpunkt genau so bestimmen, als ob derselbe der feste Anfangspunkt wäre, um welchen nach den Gleichungen 22), 23) und 24) eine Rotirung Statt hätte.

761. Folgesatz. Da die Gleichungen 25), 26), 27) in jedem Augenblicke die Lage des Schwerpunkts im Raume angeben, so kann man ihn als fest betrachten, um welchen der Körper nach den Bestimmungen der Gleichungen 28), 29), 30) zu rotiren gezwungen ist, und indem man seine Lage in Bezug auf diesen Punkt bestimmt, ergibt sich dieselbe auch im Raume in jedem Zeitmomente der Bewegung.

762. Folgesatz 2. Wie daher auch die bewegenden Kräfte eines Körpers beschaffen sein mögen, so kann man seine Bewegung immer in zwei andere zerlegen: eine fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes und eine um diesen Punkt rotirende. Auf diesem Wege vereinfacht sich die Bestimmung der verwickelten Bewegungen der Himmelskörper ungemein.

763. Erklärung. Wenn durch die Einwirkung von Kräften eine Drehung des Körpers um irgend eine Axe erfolgt, so kann die Umdrehungsaxe während der ganzen Zeit der Bewegung eine unveränderliche Lage erhalten, entweder weil sie eine freie Umdrehungsaxe ist (696), oder weil sie fest gehalten wird: oder aber es ändert sich ihre Lage in jedem Augenblicke der Bewegung, da dann die Umdrehung des Körpers nur um einen allen Lagen

Digitized by Google

derselben gemeinschaftlichen Punkt vor sich geht. Man nennt die Umdrehungsaxe des Körpers im ersten Falle eine unveränderliche, im zweiten Falle eine augenblickliche Umdrehungsaxe.

764. Erklärung. Dreht sich ein Körper um irgend eine Axe mit einer bekannten Winkelgeschwindigkeit, so kann diese Drehung auch als Wirkung dreier gleichzeitiger Drehungen des Körpers um eben so viele in irgend einem Punkte der Umdrehungsaxe unter rechten Winkeln sich schneidende Axen betrachtet werden. Man nennt die Winkelgeschwindigkeit dieser Drehungen die Seitendrehungen des Körpers.

765. Aufgabe. Aus den gegebenen Seitendrehungen eines Körpers um die drei Koordinatenaxen, die denselben Axen parallelen Geschwindigkeiten des materiellen Punktes zu bestimmen.

Auflösung. Heißen ω', ω'', ω''' die Seitendrehungen eines Körpers, und x, y, z die Koordinaten eines materiellen Punktes M (Fig. 184), so hat man für die den Axen der x, y, z parallelen Geschwindigkeiten des materiellen Punktes die Ausdrücke

$$31)\quad \omega''z-\omega'''y,\ \omega'''x-\omega'z,\ \omega'y-\omega''x.$$

Beweis. Fällt man aus dem Punkte M die Gerade MP senkrecht zur Ebene xy, und die Gerade MQ senkrecht auf die Axe OX, so ist, wenn man die Seitendrehung des Körpers um die Axe OX mit ω' bezeichnet, $\omega'.MQ$ die wirkliche Geschwindigkeit des Punktes M nach einer Richtung Mm, welche die Tangente des vom Punkte beschriebenen Kreisbogens Mm ist. Zerlegt man diese Geschwindigkeit Mm in die Seitengeschwindigkeiten Mr parallel zur Axe der y, und Mn parallel zur Axe der z, so erhält man

$$Mr=Mm\cos mMr=\omega'MQ.\sin MQP=-\omega'z, \text{ und}$$
$$Mn=Mm\sin mMr=\omega'.MQ.\cos MQP=\omega'y,$$

jene ist negativ, weil die Geschwindigkeit Mn den Punkt M im Sinne der Umdrehung Mm vom Anfangspunkte O zu entfernen, Mr hingegen denselben dem Anfangspunkte O, oder eigentlich der durch ihn gezogenen Ebene xy zu nähern strebt. Hiernach zer-

Digitized by Google

fällt die Geschwindigkeit Mm des materiellen Punktes in die den Axen der y und z parallelen Seitengeschwindigkeiten $-\omega' z$ und $\omega' y$. Auf gleiche Weise ergeben sich durch Vertauschung der Axen der x und y, die den Axen der x und z parallelen Seitengeschwindigkeiten der Seitendrehung ω'' um die Axe der y, beziehungsweise $\omega'' z$ und $-\omega'' x$, und die den Axen der x und y parallelen Seitengeschwindigkeiten der Seitendrehung ω''', beziehungsweise $-\omega''' y$ und $\omega''' x$. Stellt man nun die nach derselben Axe wirkenden Geschwindigkeiten mit ihren Zeichen zusammen, so erhält man zur Seitengeschwindigkeit nach der Axe der x den Werth $\omega'' z - \omega''' y$, nach der Axe der y aber $\omega''' x - \omega' z$, und nach der Axe der z die Seitengeschwindigkeit $\omega' y - \omega'' x$.

766. Aufgabe. Die Lage der augenblicklichen Umdrehungsaxe eines Körpers und dessen Winkelgeschwindigkeit zu finden.

Auflösung. Sind α, β, γ die Winkel, welche die Umdrehungsaxe zu irgend einer Zeit mit den Koordinatenaxen einschließt, so hat man die Winkelgeschwindigkeit

$$32)\quad \omega = \sqrt{(\omega'^2 + \omega''^2 + \omega'''^2)}, \text{ und}$$

$$33)\quad \cos\alpha = \frac{\omega'}{\omega},\quad \cos\beta = \frac{\omega''}{\omega},\quad \cos\gamma = \frac{\omega'''}{\omega}$$

Beweis. Es ist, wenn der Punkt M (Fig. 184) mit O verbunden wird, und OK die augenblickliche Umdrehungsaxe vorstellt, ferner $KOM = V$, $OM = r$, das Perpendikel $PM = r'$ gesetzt wird

$$p = r\sin V, \text{ also } r'^2 = r^2 - r^2\cos^2 V, \text{ und nach (667 I.)}$$

$$r\cos V = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

daher I. $r'^2\omega^2 = \omega^2(x^2+y^2+z^2) - \omega^2(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2$,

nun ist $r'\omega$ die wirkliche Geschwindigkeit des materiellen Punktes im Raume, dessen Seitengeschwindigkeiten nach (765) $\omega'' z - \omega''' y$, $\omega''' x - \omega' z$, und $\omega' y - \omega'' x$ sind; man hat sonach

$$\text{II.}\quad r'^2\omega^2 = (\omega'' z - \omega''' y)^2 + (\omega''' x - \omega' z)^2 + (\omega' y - \omega'' x)^2$$

Entwickelt man in beiden Gleichungen I., II. die Koefflzienten von xy und xz, so findet man, da diese Größen von x, y, z unabhängig sind,

Digitized by Google

$\omega^2\cos\alpha\cos\beta = \omega'\omega''$, und $\omega^2\cos\alpha\cos\gamma = \omega'\omega'''$;

daraus ergibt sich

$$\cos\alpha = \frac{\omega'}{\omega},\ \cos\beta = \frac{\omega''}{\omega},\ \cos\gamma = \frac{\omega'''}{\omega}$$

und die Summe der Quadrate dieser Gleichungen liefert

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{\omega'^2 + \omega''^2 + \omega'''^2}{\omega^2} = 1, \text{ oder}$$

$$\omega = \sqrt{(\omega'^2 + \omega''^2 + \omega'''^2)}.$$

767. Folgesatz. Man kann daher die Seitendrehungen eines Körpers um die Koordinatenaxen in eine einzige Winkelgeschwindigkeit um die Drehaxe zusammensetzen, und umgekehrt nach den Formeln 32) und 33) diese in jene zerlegen; man erhält

34) $\omega' = \omega\cos\alpha$, $\omega'' = \omega\cos\beta$, $\omega''' = \omega\cos\gamma$.

768. Folgesatz 2. Sind α', β', γ' die Winkel zwischen der Umdrehungsaxe und den Hauptaxen eines Körpers, p, q, r die Seitendrehungen rücksichtlich dieser Hauptaxen, so hat man analog

35) $p = \omega\cos\alpha'$, $q = \omega\cos\beta'$, $r = \omega\cos\gamma'$, und

36) $\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2 = \omega'^2 + \omega''^2 + \omega'''^2$,

d. i. die Summe der Quadrate der Seitendrehungen ist in jedem rechtwinkligen Koordinatensystem dem Quadrate der gleichzeitigen Winkelgeschwindigkeit gleich.

769. Aufgabe. Die Differentialgleichungen zur Bestimmung der Seitendrehungen eines Körpers um dessen Hauptaxen in einem gegebenen Zeitpunkte anzugeben.

Auflösung. Sind A, B, C die Hauptmomente der Trägheit, p, q, r die Seitendrehungen des rotirenden Körpers, und L', M', N' die statischen Momente desselben in Bezug auf die Hauptaxen, so hat man

$$37)\quad A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr = L',$$

Digitized by Google

$$38)\quad B\frac{dq}{dt} + (A-C)pr = M',$$

$$39)\quad C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq = N'.$$

Beweis. Wir denken uns durch den Umdrehungspunkt des Körpers drei Axen gezogen, welche den unveränderlichen Koordinatenaxen der x, y, z außerhalb des Körpers, auf welche dessen Ort in jedem Augenblicke seiner Bewegung bezogen wird, parallel laufen, und zugleich durch den nämlichen Punkt drei andere Axen der x', y', z' geführt, welche mit der Umdrehung des Körpers ihre Richtungen so ändern, daß die Lage eines materiellen Punktes im Innern des Körpers gegen die letztern Axen unverändert bleibt. Bezeichnet man die Summe der Momente des bewegten Körpers in Beziehung auf die Axen der x, y, z mit L, M, N, d. i. setzt man

$$40)\ \int(yZ-zY)dm=L,\ \int(zX-xZ)dm=M,\ \int(xY-yX)dm=N$$

so erhält man aus den Gleichungen 22), 23), 24)

$$I.\quad \int\left(\frac{yd^2z-zd^2y}{dt^2}\right)dm=L,\quad \int\left(\frac{zd^2x-xd^2z}{dt^2}\right)dm=M,$$

$$\int\left(\frac{xd^2y-yd^2x}{dt^2}\right)dm=N.$$

Nun ist nach (765), weil die den Axen der x, y, z parallelen Seitengeschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt}\ \text{sind},$$

$$II.\quad \frac{dx}{dt}=\omega''z-\omega'''y,\quad \frac{dy}{dt}=\omega'''x-\omega'z,\quad \frac{dz}{dt}=\omega'y-\omega''x$$

deren Differentiale

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\omega''\frac{dz}{dt}+z\frac{d\omega''}{dt}-\omega'''\frac{dy}{dt}-y\frac{d\omega'''}{dt}$$

$$=-(\omega''^2+\omega'''^2)x+\omega'\omega''y+\omega'\omega'''z+z\frac{d\omega''}{dt}-y\frac{d\omega'''}{dt}$$

Digitized by Google

Auf gleiche Weise folgt

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -(\omega'^2+\omega''^2)y+\omega''\omega'x+\omega''\omega'''z+x\frac{d\omega'''}{dt}-z\frac{d\omega'}{dt}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -(\omega'^2+\omega''^2)z+\omega'''\omega'x+\omega'''\omega''y+y\frac{d\omega'}{dt}-x\frac{d\omega''}{dt}$$

mit diesen Werthen erhält man aus I.

$$\text{III.}\quad \int\left(\frac{yd^2z-zd^2y}{dt^2}\right)dm = (\omega''^2-\omega'^2)\int yzdm+(\omega''\omega'-\frac{d\omega''}{dt})\int xydm$$
$$-(\omega''\omega'+\frac{d\omega'''}{dt})\int xzdm+\omega'''\omega''\int y^2dm-\omega''\omega'''\int z^2dm$$
$$+\frac{d\omega'}{dt}\int(y^2+z^2)dm = L.$$

Werden nun die Koordinatenaxen der x, y, z so gewählt, daß nach Verfluß einer Zeit t die Hauptaxen des Körpers mit ihnen zusammenfallen, dann ist für diesen Augenblick

$$\int xydm = 0,\ \int xzdm = 0,\ \int yzdm = 0,$$

und auch $\omega' = p$, $\omega'' = q$, $\omega''' = r$, $\frac{d\omega'}{dt} = \frac{dp}{dt}$

zugleich verwandeln sich die Größen L, M, N in die statischen Momente des Körpers in Beziehung auf die Hauptaxen, nämlich in L', M', N'. Man erhält also für diesen Augenblick aus III.

$$\text{IV.}\quad qr\int(y^2-z^2)dm+\frac{dp}{dt}\int(y^2+z^2)dm = L'.$$

Es ist aber dieser Ausdruck nur von der Bedingung abhängig, daß die Richtung der veränderlichen Hauptaxen mit den Koordinatenaxen der x, y, z zusammenfalle; derselbe ist mithin von der Zeit der Bewegung des Körpers und somit von den Winkeln, welche die Hauptaxen desselben mit den Axen der x, y, z einschließen, völlig unabhängig. Es besteht daher die Gleichung IV. für jeden Augenblick der Bewegung; da nun

$$\int(y^2+z^2)dm = A, \text{ und}$$
$$\int(y^2-z^2)dm = \int(x^2+y^2)dm-\int(x^2+z^2)dm = C-B \text{ ist,}$$

Digitized by Google

so erhält man aus IV. sogleich die Gleichung 37), und ganz eben so ergeben sich die Gleichungen 38) und 39).

Durch die Integration dieser drei Differentialgleichungen der ersten Ordnung findet man sofort die Seitendrehungen des Körpers p, q, r um dessen Hauptaxen.

770. Aufgabe. Aus den Seitendrehungen des Körpers in Bezug auf seine Hauptaxen, die Lage eines im Raume bewegten Körpers zu bestimmen.

Auflösung. Die Stellung des Körpers ist als gegeben zu betrachten, sobald die Winkel θ, ψ, φ oder der Neigungswinkel der Ebene $x'y'$ gegen die Ebene xy, und die Winkel zwischen der Durchschnittslinie beider Ebenen mit der Axe der x und x' bekannt sind. Diese Winkel ergeben sich aber durch Integration der Differentialgleichungen

$$p = \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi - \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi\sin\vartheta$$

$$q = -\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi - \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\theta,\quad r = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\cos\theta.$$

Beweis. Die gegebenen Seitendrehungen p, q, r sind gewisse Funktionen von θ, φ, ψ und $\frac{d\theta}{dt'}$ $\frac{d\varphi}{dt'}$ $\frac{d\psi}{dt}$.

Zerlegt man diese Funktionen nach der Richtung der Koordinatenaxen x, y, z, so zerfällt

$\frac{d\theta}{dt}$ in $\frac{d\theta}{dt}\cos\varphi$ nach x, $-\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi$ nach y, und in o nach z,

$\frac{d\varphi}{dt}$ in o nach x, o nach y, $\frac{d\varphi}{dt}$ nach z,

$\frac{d\psi}{dt}$ in $-\frac{d\psi}{dt}\sin\varphi\sin\theta$, $-\frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\theta$, $-\frac{d\psi}{dt}\cos\theta$.

Stellt man die Seitenkräfte, deren Richtungen in dieselbe Axe fallen, mit ihren Zeichen zusammen, so folgt

Digitized by Google

$$p=\frac{d\theta}{dt}\cos\varphi-\frac{d\psi}{dt}\sin\varphi\sin\theta,\quad q=-\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi-\frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\theta$$

$$r=\frac{d\varphi}{dt}-\frac{d\psi}{dt}\cos\theta,$$

und durch Integration dieser Differentialgleichungen der ersten Ordnung ergeben sich die Werthe von θ, φ, ψ.

771. Folgesatz. Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit $\cos\varphi$, die andere mit $\sin\varphi$, so gibt der Unterschied dieser Produkte

$$\frac{d\theta}{dt}=p\cos\varphi-q\sin\varphi,\quad \sin\theta\frac{d\psi}{dt}=-p\sin\varphi-q\cos\varphi,$$

$$\text{also}\quad \frac{d\varphi}{dt}=r-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(p\sin\varphi+q\cos\varphi).$$

772. Folgesatz 2. Ist θ sehr klein, so werden diese Ausdrücke

$$\frac{d\theta}{dt}=p\cos\varphi-q\sin\varphi,\quad \frac{d\psi}{dt}=-\frac{p}{\theta}\sin\varphi-\frac{q}{\theta}\cos\varphi$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=r-\frac{p}{\theta}\sin\varphi-\frac{q}{\theta}\cos\varphi.$$

773. Lehrsatz. Wenn der Körper um seinen Schwerpunkt rotirt, und die Beschleunigungen sämmtlich nach Richtungen wirken, welche durch den Schwerpunkt gehen, so lassen sich die drei Differentialgleichungen zur Bestimmung der Seitendrehungen eines Körpers (769) auf eine einzige Differentialgleichung mit einer veränderlichen Größe zurückführen.

Beweis. Da die Kräfte durch den Schwerpunkt gehen, so hat man $L'=0$, $M'=0$, $N'=0$, daher aus (769)

$$\text{I.}\quad A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=0,\quad B\frac{dq}{dt}+(A-C)pr=0,$$

$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=0,$$

Digitized by Google

multiplizirt man diese Gleichungen beziehungsweise mit p, q, r, und nimmt die Summe der Produkte, so ergibt sich

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0,$$

und integrirt II. $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = k^2$,

wo k^2 eine Konstante der Integration vorstellt. Multiplizirt man ferner dieselben Gleichungen I. mit Ap, Bq, Cr beziehungsweise, und addirt dieselben, so folgt

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0$$

daher integrirt wird

$$\text{III. } A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2,$$

wo k^2 abermals konstant ist.

Eliminirt man r^2 aus den Gleichungen II. und III., so erhält man

$$A(A-C)p^2 + B(B-C)q^2 = k^2 - Ck^2;$$

es ist demnach

$$q^2 = \frac{k^2-Ck^2-A(A-C)p^2}{B(B-C)}, \quad r^2 = \frac{k^2-Bk^2-A(A-B)p^2}{C(C-B)}$$

Hiermit verwandelt sich die erste der Gleichungen I. in

$$\frac{dp}{dt} + \sqrt{\frac{(A-C)(A-B)}{BC}}\left(p^2 - \frac{k^2-Ck^2}{A(A-B)}\right)\left(\frac{k^2-Bk^2}{A(A-B)} - p^2\right) = 0.$$

774. Folgesatz. Sind die zwei Hauptmomente A, B einander gleich, so werden die Gleichungen I.

$$A\frac{dp}{dt} + (C-A)qr = 0, \quad A\frac{dq}{dt} + (A-C)pr = 0, \quad C\frac{dr}{dt} = 0,$$

die letztere liefert $dr = 0$, oder r eine unveränderliche Größe; setzt man diese gleich n, und differentiirt die erste dieser Gleichungen, so erhält man

$$A\frac{d^2p}{dt^2} + n(C-A)\frac{dq}{dt} = 0;$$

Digitized by Google

durch Verbindung dieses Ausdruckes mit der zweiten Gleichung ergibt sich

$$\frac{d^2p}{dt^2} + \left(\frac{C-A}{A}\right)^2 n^2 p = 0, \text{ demnach (A. 1000)}$$

$$p = h\cos\left(\frac{C-A}{A}nt + k\right),\ q = h\sin\left(\frac{C-A}{A}nt + k\right)$$

wo h, k Konstanten der Integration vorstellen; hiermit wird die Winkelgeschwindigkeit ω um die augenblickliche Umdrehungsaxe

$$\omega = \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)} = \sqrt{(n^2 + h^2)}$$

ebenfalls unveränderlich.

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (770), und setzt Kürze halber $\frac{C-A}{A}n = n'$, so erhält man

$$\frac{d\theta}{dt}\cos\varphi - \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi\sin\theta = h\cos(n't+k)$$

$$-\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi - \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\theta = h\sin(n't+k),\ \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\cos\theta = n.$$

775. Folgesatz 2. Sind die drei Hauptmomente A, B, C einander gleich, so erhält man aus den Gleichungen 1. in (773)

$$\frac{dp}{dt} = 0,\quad \frac{dq}{dt} = 0,\quad \frac{dr}{dt} = 0,$$

demnach sind p, q, r unveränderliche Größen, und weil dann nach (675) alle durch den Anfangspunkt gezogene Axen zugleich Hauptaxen sind, so kann man die Hauptaxe der z mit der Drehaxe des Körpers zusammenfallen lassen, und es ergibt sich aus den Gleichungen (770)

$$0 = \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi - \frac{d\psi}{dt}\sin\varphi\sin\theta,$$

$$0 = -\frac{d\theta}{dt}\sin\varphi - \frac{d\psi}{dt}\cos\varphi\sin\theta,\ n = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{d\psi}{dt}\cos\theta;$$

multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit $\cos\varphi$, die andere mit $\sin\varphi$, so gibt der Unterschied der Produkte

Digitized by Google

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \text{ und eben so folgt } \frac{d\psi}{dt} = 0,$$

es sind also θ, ψ konstante Größen; hiermit wird das Integrale der dritten Gleichung

$$\varphi = nt + \text{const},$$

woraus erhellet, daß der Körper um eine Achse sich drehen müsse, deren Lage nicht nur im Körper, sondern auch im Raume fest ist.

776. Anmerkung. Die Wichtigkeit des Gegenstandes mag uns entschuldigen, wenn wir die vorgetragene Theorie der drehenden Bewegung eines Körpers in einer noch mehr analytischen Form darstellen, indem wir uns der Hoffnung hingeben, daß jene Leser, welche dieses Bruchstück aus *Lagrange*'s Werken begriffen haben, sich an das Studium dieser Werke selbst, welche an Allgemeinheit der Untersuchungen, Gründlichkeit, Klarheit und Eleganz der Darstellung fast Alles übertreffen, was je in der Mathematik ist geschrieben worden, mit dem hierzu erforderlichen Fleiße und Ausdauer wenden werden.

3. Anderweitige Darstellung der Axendrehung eines Körpers.

777. Erklärung. Bei der Bewegung eines von beliebigen Kräften getriebenen festen Körpers schreitet derselbe im Raume fort, und er dreht sich zugleich um eine in jedem Augenblicke veränderliche Umdrehungsaxe. Um diese zwei Arten der Bewegung durch Gleichungen auszudrücken, ist es nothwendig, den Körper auf zwei rechtwinklige Koordinatensysteme zu beziehen, deren eines durch einen festen Anfangspunkt im Raume geht, und ein festes Axensystem heißt, das andere hingegen durch einen Punkt im Körper gezogen ist, um welchen derselbe rotirt, mag dieser übrigens der Schwerpunkt selbst sein oder nicht, und welches mit der Stellung des bewegten Körpers seine Richtung so ändert, daß die Lage einzelner materiellen Punkte des Körpers gegen dasselbe während der ganzen Zeit der Bewegung unverändert bleibt. Man nennt es das bewegliche Axensystem.

778. Erklärung. Wir legen durch den Punkt im Innern des Körpers, um welchen die Drehung vor sich geht, ein drittes

Koordinatensystem, welches mit dem festen Axensystem parallel lauft, und bezeichnen mit x, y, z die Koordinaten eines materiellen Punktes in Beziehung auf dasselbe, dagegen mit x', y', z' die Koordinaten desselben materiellen Punktes in Beziehung auf das bewegliche Axensystem, so ändern jene ihre Werthe mit der Stellung des materiellen Punktes, und sind daher Funktionen der Zeit, diese hingegen sind für einen und denselben materiellen Punkt von der Zeit unabhängig, und es soll jenes Axensystem das Axensystem der x, y, z, dieses aber das Axensystem der x', y', z' heißen.

779. *Folgesatz.* Beim Uebergange von einem Axensystem zu dem andern hat man nach (671) die Gleichungen

I. $x=a_1x'+b_1y'+c_1z'$, $y=a_2x'+b_2y'+c_2z'$, $z=a_3x'+b_3y'+c_3z'$,

wo a_1, b_1, c_1 die Kosinus der Winkel der Axe der x mit den Axen der x', y', z', ferner a_2, b_2, c_2 die Kosinus der Winkel der Axe der y und a_3, b_3, c_3 die Kosinus der Winkel der Axe der z mit denselben Axen der x', y', z' bedeuten. Bezeichnet man diese Winkel beziehungsweise mit

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3,$$

so hat man (A. 1538)

$$\text{II.}\quad \begin{cases} a_1=\cos\alpha_1, & b_1=\cos\beta_1, & c_1=\cos\gamma_1, \\ a_2=\cos\alpha_2, & b_2=\cos\beta_2, & c_2=\cos\gamma_2, \\ a_3=\cos\alpha_3, & b_3=\cos\beta_3, & c_3=\cos\gamma_3, \end{cases}$$

und es gelten zwischen diesen neun Koeffizienten nach (A. 1539) die Bedingungsgleichungen:

$$\text{III.}\quad \begin{cases} a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 \\ b_1^2+b_2^2+b_3^2=1 \\ c_1^2+c_2^2+c_3^2=1 \end{cases} \qquad \text{IV.}\quad \begin{cases} a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \\ a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0 \\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0 \end{cases}$$

Umgekehrt bestimmen sich die Koordinaten x', y', z' als Funktionen der Koordinaten x, y, z nach den Gleichungen:

V. $x'=a_1x+a_2y+a_3z$, $y'=b_1x+b_2y+b_3z$, $z'=c_1x+c_2y+c_3z$,

Digitized by Google

welche nach (A. 1541) die Bedingungen erfüllen

$$\text{VI.}\quad \begin{cases} a_1^2+b_1^2+c_1^2=1 \\ a_2^2+b_2^2+c_2^2=1 \\ a_3^2+b_3^2+c_3^2=1 \end{cases} \qquad \text{VII.}\quad \begin{cases} a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=0 \\ a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0 \end{cases}$$

780. Folgesatz 2. Da der materielle Punkt seine Stellung gegen die Axen der x', y', z' nicht ändert, indem sich diese zugleich mit dem Körper drehen, so erhellet, daß bei der Bestimmung der Seitengeschwindigkeiten des bewegten Punktes aus den Gleichungen I. nur die Größen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 als veränderlich zu betrachten sind. Differentiirt man also diese Gleichungen, so findet man die den Axen parallelen Geschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt} = x'\frac{da_1}{dt} + y'\frac{db_1}{dt} + z'\frac{dc_1}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = x'\frac{da_2}{dt} + y'\frac{db_2}{dt} + z'\frac{dc_2}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = x'\frac{da_3}{dt} + y'\frac{db_3}{dt} + z'\frac{dc_3}{dt}$$

781. Folgesatz 3. Eben so ergibt sich durch Differentiirung der Gleichungen III. und VI.

$$\text{I.}\quad \begin{cases} a_1da_1+a_2da_2+a_3da_3=0 \\ b_1db_1+b_2db_2+b_3db_3=0 \\ c_1dc_1+c_2dc_2+c_3dc_3=0 \end{cases} \qquad \text{II.}\quad \begin{cases} a_1da_1+b_1db_1+c_1dc_1=0 \\ a_2da_2+b_2db_2+c_2dc_2=0 \\ a_3da_3+b_3db_3+c_3dc_3=0 \end{cases}$$

Differentiirt man aber die Gleichungen IV., und setzt die Ergebnisse, welche Funktionen der Zeit sind, Kürze halber gleich rdt, qdt, pdt, so erhält man

$$\text{III.}\quad \begin{cases} a_1db_1+a_2db_2+a_3db_3 = -(b_1da_1+b_2da_2+b_3da_3)=rdt \\ c_1da_1+c_2da_2+c_3da_3 = -(a_1dc_1+a_2dc_2+a_3dc_3)=qdt \\ b_1dc_1+b_2dc_2+b_3dc_3 = -(c_1db_1+c_2db_2+c_3db_3)=pdt \end{cases}$$

782. Lehrsatz. Zwischen den neun Größen a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 gelten die Relationen

Digitized by Google

$$a_1(a_3c_2-a_2c_3)+a_2(a_1c_3-a_3c_1)+a_3(a_2c_1-a_1c_2)=0$$
$$b_1(a_2b_3-a_3b_2)+b_2(a_3b_1-a_1b_3)+b_3(a_1b_2-a_2b_1)=0$$
$$c_1(b_2c_3-b_3c_2)+c_2(b_3c_1-b_1c_3)+c_3(b_1c_2-b_2c_1)=0$$

Beweis. Führt man die angegebenen Multiplikationen aus, so hebt sich die Summe dieser Produkte gegenseitig auf.

783. **Folgesatz 1.** Hält man diese Ausdrücke gegen die Gleichungen IV., so erhellet, daß die eingeklammerten Größen durch einzelne Größen so dargestellt werden können:

$$b_1=a_3c_2-a_2c_3, \quad b_2=a_1c_3-a_3c_1, \quad b_3=a_2c_1-a_1c_2$$
$$c_1=a_2b_3-a_3b_2, \quad c_2=a_3b_1-a_1b_3, \quad c_3=a_1b_2-a_2b_1$$
$$a_1=b_2c_3-b_3c_2, \quad a_2=b_3c_1-b_1c_3, \quad a_3=b_1c_2-b_2c_1.$$

784. **Folgesatz 2.** Substituirt man aber diese Werthe in die Gleichungen III., so ergibt sich sofort:

$$(a_3c_2-a_2c_3)^2+(a_1c_3-a_3c_1)^2+(a_2c_1-a_1c_2)^2=1$$
$$(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2=1$$
$$(b_2c_3-b_3c_2)^2+(b_3c_1-b_1c_3)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2=1$$

und auch $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)=1.$

785. **Lehrsatz.** Zwischen den Koordinaten beider Axensysteme findet die Gleichung Statt:

$$ydz-zdy=(a_2da_3-a_3da_2)x'^2+(b_2db_3-b_3db_2)y'^2+(c_2dc_3-c_3dc_2)z'^2$$
$$+(a_2db_3-a_3db_2+b_2da_3-b_3da_2)x'y'+$$
$$(c_2da_3-a_3dc_2+a_3dc_2-c_3da_2)x'z'$$
$$+(c_2db_3-b_3dc_2+b_2dc_3-c_3db_2)y'z',$$

welche Ausdrücke sich auch für die Werthe von

$$zdx-xdz \text{ und } xdy-ydx$$

dadurch bilden lassen, daß man die Zeiger der Buchstaben um eine Stelle weiter rücken, und hierbei auf den Zeiger 3 sofort den Zeiger 1 folgen läßt.

Beweis. Man hat aus den Gleichungen I.

$y=a_2x'+b_2y'+c_2z'$, und nach (780)
$dz=x'da_3+y'db_3+z'dc_3$, deren Produkt sofort gibt

Digitized by Google

$$ydz = a_2da_3x'^2 + b_2db_3y'^2 + c_3dc_3z'^2 + (a_2db_3 + b_2da_3)x'y' + (c_2da_3 + a_3dc_2)x'z' + (c_2db_3 - b_2dc_3)y'z'.$$

Eben so erhält man

$$zdy = a_3da_2x'^2 + b_3db_2y'^2 + c_3dc_2z'^2 + (a_3db_2 + b_3da_2)x'y' + (a_3dc_2 + c_3da_2)x'z' + (b_3dc_2 + c_2db_3)y'z';$$

der Unterschied beider Ausdrücke liefert nun den für $ydz - zdy$ oben angegebenen Werth. Auf gleiche Weise ergeben sich die Werthe von $zdx - xdz$ und $xdy - ydx$.

786. Die Gleichungen der Rotationsbewegung eines Körpers zu finden.

Auflösung. Bezeichnet man die Summe der Momente der Kräfte, welche auf jedes Element des Körpers wirken, und sich auf die Axen der x, y, z beziehen, mit L, M, N, ferner die Größen, welche die drei Trägheitsmomente des Körpers hinsichtlich der Axen der x', y', z' bestimmen, nämlich

$$\int(y'^2 + z'^2)dm = A,\ \int(x'^2 + z'^2)dm = B,\ \int(x'^2 + y'^2)dm = C,$$
$$\int y'z'dm = F,\ \int x'z'dm = G,\ \int x'y'dm = H,$$

endlich Kürze halber die Ausdrücke

$$Ap - Gr - Hq = P,\ Bq - Fr - Hp = Q,\ Cr - Fq - Gp = R,$$

so hat man zu Gleichungen der Rotationsbewegung dieses Körpers

$$41)\quad \frac{dP}{dt} - rQ + qR = a_1L + a_2M + a_3N$$

$$42)\quad \frac{dQ}{dt} + rP - pR = b_1L + b_2M + b_3N$$

$$43)\quad \frac{dR}{dt} - qP + pQ = c_1L + c_2M + c_3N$$

Beweis. Integrirt man die Rotationsgleichungen eines Körpers 22), 23), 24), nachdem sie mit dt multiplizirt worden, und bezeichnet die Summe der Momente der Kräfte, welche auf einzelne materielle Punkte des Körpers wirken, mit L, M, N, wo also

Digitized by Google

$L=\int(yZ-zY)dm$, $M=\int(zX-xZ)dm$, $N=\int(xY-yX)dm$ ist, so erhält man

$$44)\ \int\left(\frac{ydz-zdy}{dt}\right)dm=\int Ldt,\quad 45)\ \int\left(\frac{zdx-xdz}{dt}\right)dm=\int Mdt$$

$$46)\ \int\left(\frac{xdy-ydx}{dt}\right)dm=\int Ndt$$

nun ist aus (785)

$$\int\left(\frac{ydz-zdy}{dt}\right)dm=\int\left(\frac{a_2da_3-a_3da_2}{dt}\right)x'^2dm$$
$$+\int\left(\frac{b_2db_3-b_3db_2}{dt}\right)y'^2dm+\int\left(\frac{c_2dc_3-c_3dc_2}{dt}\right)z'^2dm$$
$$+\int\left(\frac{a_2db_3-a_3db_2+b_2da_3-b_3da_2}{dt}\right)x'y'dm$$
$$+\int\left(\frac{c_2da_3-a_3dc_2+a_2dc_3-c_3da_2}{dt}\right)x'z'dm$$
$$+\int\left(\frac{c_2db_3-b_3dc_2+b_2dc_3-c_3db_2}{dt}\right)y'z'dm$$

Substituirt man in dieser Gleichung für a_2, a_3, b_2, b_3, und ihre Differentiale die Werthe aus (783), so wird mit Rücksicht auf die Bedeutung der Größen p, q, r (781) nach gehörigen Reduktionen

$a_1(Ap-Gr-Hq)+b_1(Bq-Fr-Hp)+c_1(Cr-Fq-Gp)=\int Ldt$,

oder bei der angegebenen Bezeichnung

$$a_1P+b_1Q+c_1R=\int Ldt$$

Durch eine ähnliche Rechnung findet man

$$a_2P+b_2Q+c_2R=\int Mdt,\quad a_3P+b_3Q+c_3R=\int Ndt.$$

Um nun die neun Größen a_1, b_1, c_1, a_2 u. s. f. aus diesen Gleichungen fortzubringen, differentiire man dieselben und addire sie, nachdem man die erste mit a_1, die zweite mit a_2, die dritte mit a_3 multiplizirt hat. Man erhält auf diese Weise die Gleichung 41).

Digitized by Google

Man multiplizire ferner eben diese Differentialgleichungen einmal mit b_1, b_2, b_3, ein anderesmal mit c_1, c_2, c_3 beziehungsweise: so liefert die Summe dieser Produkte wegen den Bedingungsgleichungen (III. in 779) sofort die Gleichungen 42) u. 43).

787. Anmerkung. Die eben entwickelten drei Gleichungen, welche sich aus einer einfachen Transformation der Gleichungen 22), 23), 24) ergeben, bestimmen die Rotationsbewegungen des Körpers vollständig. Integrirt man sie, so erhält man die Werthe von p, q, r der Seitendrehungen des Körpers, und setzt man diese in die Gleichungen III. (781), so gibt eine abermalige Integration mit den sechs Bedingungsgleichungen (780) die Werthe der neun veränderlichen Größen a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 ... u. s. f. Man kennt so für jeden Augenblick die Richtung der beweglichen Axen der x', z', z', welche fest im Innern des Körpers sich befinden, mithin auch die Lage des bewegten Körpers selbst.

788. Folgesatz. Noch eine einfachere Form erhalten die Rotationsgleichungen, und sie lassen sich zugleich in vielen Fällen leichter integriren, wenn man die Axen der x', y', z' so wählt, daß sie Hauptaxen des Körpers werden, für welche

$$F=\int y'z'dm=0, \quad G=\int x'z'dm=0, \quad H=\int x'y'dm=0$$

wird, dann erhält man

$$P=Ap, \quad Q=Bq, \quad R=Cr,$$

und die drei Gleichungen 41), 42), 43) gehen über in

$$47) \quad \frac{Adp}{dt} + (C - B)qr = a_1L + a_2M + a_3N$$

$$48) \quad \frac{Bdq}{dt} + (A - C)pr = b_1L + b_2M + b_3N$$

$$49) \quad \frac{Cdr}{dt} + (B - A)pq = c_1L + c_2M + c_3N,$$

wo L, M, N die Summe der Momente der auf jedes Element wirkenden Kräfte in Bezug auf die Axen der x, y, z bedeuten.

Nach (A. 1584) lassen sich diese Momente auf die Axen der x', y', z' beziehen, indem man die drei Größen L, M, N mit

Digitized by Google

dem Kosinus der Winkel multiplizirt, welche die neuen Axen beziehungsweise mit den vorigen einschließen; setzt man also

$$L' = a_1 L + a_2 M + a_3 N,\quad M' = b_1 L + b_2 M + b_3 N,$$
$$N' = c_1 L + c_2 M + c_3 N,$$

so verwandeln sich die Gleichungen 47) bis 49) in

$$A dp + (C - B) qr dt = L' dt$$
$$B dq + (A - C) pr dt = M' dt$$
$$C dr + (B - A) pq dt = N' dt$$

übereinstimmend mit (766).

789. Aufgabe. Die Größen p, q, r mittelst der Winkel φ, ψ, θ darzustellen.

Auflösung. Es ist $\sin\varphi \sin\theta d\psi - \cos\varphi d\theta = p dt$

$$\cos\varphi \sin\theta d\psi + \sin\varphi d\theta = q dt,\quad d\varphi - \cos\theta d\psi = r dt.$$

Beweis. Setzt man zur Abkürzung $\cos\theta = \theta$, $\sin\theta = \theta'$, $\cos\psi = \psi$, $\sin\psi = \psi'$, $\cos\varphi = \varphi$, $\sin\varphi = \varphi'$, wo also die nicht akzentuirten Buchstaben θ, ψ, φ die Kosinus, und die mit Akzenten versehenen θ', ψ', φ' die Sinus dieser Winkel bezeichnen, die Differentiale der Bögen aber an dem vorgesetzten d kennbar werden, so hat man nach (671)

$$a_1 = \theta\psi'\varphi' + \psi\varphi,\quad b_1 = \theta\psi'\varphi - \psi\varphi',\quad c_1 = \theta'\psi',$$
$$a_2 = \theta\psi\varphi' - \psi'\varphi\quad b_2 = \theta\psi\varphi + \psi'\varphi',\quad c_2 = \theta'\psi,$$
$$a_3 = -\theta'\varphi',\quad b_3 = -\theta'\varphi,\quad c_3 = \theta.$$

Man differentiire die Größen b_1, b_2, b_3 vollständig, so erhält man

$$db_1 = -\theta'\psi'\varphi d\theta + (\theta\varphi\psi + \psi'\varphi')d\psi - (\theta\psi'\varphi' + \psi\varphi)d\varphi$$
$$db_2 = -\theta'\psi\varphi d\theta - (\theta\varphi\psi' - \psi\varphi')d\psi - (\theta\psi\varphi' - \psi'\varphi)d\varphi$$
$$db_3 = -\theta\varphi d\theta + \theta'\varphi' d\varphi.$$

Multiplizirt man die erste dieser Gleichungen mit $\theta'\psi' = c_1$, die zweite mit $\theta'\psi = c_2$, die dritte mit $\theta = c_3$, und nimmt die Summe dieser Produkte, so erhält man

$$p dt = c_1 db_1 + c_2 db_2 + c_3 dc_3 = -q d\theta(\theta^2 + \theta'^2\psi'^2 + \theta'^2\psi^2)$$
$$+ d\varphi(\theta\theta'\varphi' - \theta\theta'\psi'^2\varphi' - \theta'\psi'\psi\varphi - \theta\theta'\psi^2\varphi' + \theta'\psi'\varphi\psi)$$
$$+ d\psi(\theta\theta'\varphi\psi' + \theta'\varphi'^2\varphi' - \theta\theta'\psi'\psi - \theta'\varphi'\psi^2)$$
$$= \theta'\varphi' d\psi - \varphi d\theta$$

und eben so findet man $q dt$ und $r dt$.

Digitized by Google

790. Aufgabe. Die Gleichungen der augenblicklichen Umdrehungsaxe zu finden.

Auflösung. Heißen x', y', z', die Koordinaten eines Punktes in der augenblicklichen Umdrehungsaxe und p, q, r die Seitendrehungen des Körpers um dessen Hauptaxe; so hat man die Gleichungen

$$py'=qx',\ rx'=pz',\ qz'=ry'$$

Beweis. Die Punkte des rotirenden Körpers, welche nach einander in die Richtung der augenblicklichen Umdrehungsaxe gelangen, müssen während der Zeit dt in Ruhe verbleiben, daher ihre Seitengeschwindigkeiten

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}$$

sämmtlich Null werden. Nun sind nach (780) ihre Werthe

$$\frac{dx}{dt}=\frac{x'da_1}{dt}+\frac{y'db_1}{dt}+\frac{r'dc_1}{dt},\ \text{u. s. f.}$$

setzt man also $x'da_1+y'db_1+z'dc_1=o$ ferner

$$x'da_2+y'db_2+z'dc_2=o,\quad x'da_3+y'db_3+z'dc_3=o$$

und multiplizirt die erste Gleichung mit c_1, die zweite mit c_2, die dritte mit c_3; so gibt die Summe dieser Produkte $py'-qx'=o$.

Ganz eben so erhält man, die erste der drei Gleichungen mit b_1, die andere mit b_2, die dritte mit b_3 multiplizirend, zur Summe dieser Produkte $rx'-pz'=o$, und endlich, wenn man die erste mit a_1, die zweite mit a_2 die dritte mit a_3 multiplizirt, und diese Produkte addirt, ergibt sich $qz'-ry'=o$.

Diese drei Gleichungen, unter denen die eine stets aus den beiden anderen folgt, sind aber die Gleichungen einer durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie: alle Punkte dieser Geraden sind also während einer Zeit dt in Ruhe, und der Körper rotirt während eben dieser Zeit um dieselbe, wie um eine feste Axe.

791. Folgesatz. Heißen α', β', γ' die Winkel der augenblicklichen Umdrehungsaxe mit den Axen der x', y', z'; so ist nach (A. 1617.)

$$\cos\alpha'=\frac{dx'}{\sqrt{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)}},\ \cos\beta'=\frac{dy'}{\sqrt{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)}}\ \text{u. s. f.}$$

es ist aber aus den Gleichungen (790)

Digitized by Google

$$\frac{dx'}{dz'}=\frac{p}{r},\quad \frac{dy'}{dz'}=\frac{q}{r};\ \text{somit}$$

$$\cos\alpha'=\frac{dx'}{dz'}:\sqrt{\left(1+\frac{dx'^2}{dz'^2}+\frac{dy'^2}{dz'^2}\right)}=\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$$

$$\cos\beta'=\frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}},\quad \cos\gamma'=\frac{r}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}$$

792. Lehrsatz. Die lebendige Kraft eines bewegten Körpers hat den Werth $T=Ap^2+Bq^2+Cr^2$

Beweis. Man hat

$$T=\int v^2dm=\int\frac{ds^2}{dt^2}\cdot dm=\int\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right)dm$$

substituirt man hierin für

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}$$

ihre Werthe (780), so wird

$$T=\int(x'da_1+y'db_1+r'dc_1)^2dm+\int(x'da_2+y'db_2+z'dc_2)^2dm$$
$$+\int(x_1da_3+y_1db_3+z'dc_3)^2dm,\ \text{und nach einer leichten Reduktion}$$
$$T=(da_1^2+da_2^2+da_3^2)\int x'^2dm+(db_1^2+db_2^2+db_3^2)\int y'^2dm$$
$$+(dc_1^2+dc_2^2+dc_3^2)\int z'^2dm.$$

Es ist aber wenn man die Gleichungen *III* (781) quadrirt

$$(p^2+q^2)dt^2=dc_1^2(a_1^2+b_1^2)+dc_2^2(a_2^2+b_2^2)+dc_3^2(a_3^2+b_3^2)$$
$$+2dc_1dc_2(a_1a_2+b_1b_2)+2dc_1dc_3(a_1a_3+b_1b_3)$$
$$+2dc_2dc_3(a_2a_3+b_2b_3)$$
$$=(1-c_1^2)dc_1^2+(1-c_2^2)dc_2^2+(1-c_3^2)dc_3^2$$
$$-2c_1c_2dc_1dc_2-2c_1c_3dc_2dc_3-2c_2c_3dc_2dc_3$$
$$=dc_1^2+dc_2^2+dc_3^2-(c_1dc_1+c_2dc_2+c_3dc_3)^2,\ \text{d. i.}$$
$$(p^2+q^2)dt^2=dc_1^2+dc_2^2+dc_3^2$$

auf gleiche Weise ergibt sich

$$(p^2+r^2)dt^2=db_1^2+db_2^2+db_3^2,\quad (q^2+r^2)dt^2=da_1^2+da_2^2+da_3^2$$

durch Substitution dieser Werthe im Ausdrucke für T folgt sogleich

Digitized by Google

$$T=(q^2+r^2)\int x'^2dm+(q^2+r^2)\int y'^2dm+(p^2+q^2)\int z'^2dm$$
$$=p^2\int(y'^2+z'^2)dm+q^2\int(x'^2+z'^2)dm+r^2\int(x'^2+y'^2)dm$$
$$=Ap^2+Bq^2+Cr^2$$

wo A, B, C die Hauptmomente des Körpers bedeuten.

793. Anmerkung. Hierher gehörende Werke ſind noch: *Leonhardi Euleri Mechanica. Petropoli* 1749, 4. *Ejusdem theoria motus corporum solidorum, Rostochii* 1765 4. *Gauss C. F. theoria motus corporum coelestium. Hamburgi* 1809. 4.

Digitized by Google

Viertes Buch.
Hydrostatik.

I. Gleichgewicht flüssiger Körper überhaupt.

794. Erklärung. Ein flüssiger Körper ist ein Aggregat von materiellen Punkten, die ohne Widerstand der kleinsten Kraft weichen, welche sie zur Bewegung antreibt. Man nennt diese charakteristische Eigenschaft flüssiger Körper, durch welche sie von starren oder festen Körpern unterschieden werden, die Verschiebbarkeit ihrer Theilchen.

795. Folgesatz. Während feste Körper unter dem Einfluße der auf sie wirkenden Kräfte nach der Verbindungsweise ihrer Theilchen mehr oder weniger bewegt werden, ist die Verschiebbarkeit der Theilchen bei flüssigen Körpern die Ursache, daß sie schon den geringsten Kräften, welche für uns wahrnehmbar sind, nachgeben, sobald sie nicht durch feste Wände eines Gefäßes, in welchem sie aufbewahrt werden, oder durch den Widerstand anderer Flüssigkeiten, welche nicht ausweichen können, daran gehindert werden.

796. Folgesatz 2. Eine unmittelbare Folge dieser Verschiebbarkeit ist die unveränderte Fortpflanzung des Druckes, den ein flüssiges Theilchen von einer einwirkenden Kraft erfährt, nicht nur in der Richtung des Druckes selbst, sondern auch nach allen Seiten, d. i. an alle ringsum gelegenen benachbarte flüssige Theilchen. Ist also die Flüssigkeit in einem Gefäße mit festen Wänden gesperrt, und es wirkt eine Kraft p auf diejenige flüssige Masse ein, welche in der Fläche f enthalten ist, so pflanzt sich dieser Druck p un-

Digitized by Google

verändert durch die ganze Flüssigkeit fort, indem jede Fläche der Wand, deren Größe f ist, einen Druck gleich p auszuhalten hat. Heißt also F die Fläche der Seitenwand eines Gefäßes, in welchem die Flüssigkeit allseitig gesperrt ist, und ist $F=nf$, so wird auch der Druck P, den diese Wand erleidet, nämlich $P=np$; woraus sogleich folgt, daß

$$F : f = P : p$$

oder daß der auf eine Seitenwand fortgepflanzte Druck stets der Ausdehnung der Wand proportional sei.

797. Erklärung. Die Lehre, von den Gesetzen des Gleichgewichts tropfbarer Flüssigkeiten (31) heißt die Hydrostatik, von den Gesetzen des Gleichgewichts elastischer Flüssigkeiten, Aërostatik. Diese bildet nur einen besondern Theil jener.

798. Aufgabe. Eine beliebige Anzahl Kräfte, deren Größen und Richtungen gegeben sind, wirke auf eine flüssige Masse, den Druck zu bestimmen, welchen unter dem Einfluße dieser Kräfte ein materieller Punkt der flüssigen Masse erfährt.

Auflösung. Sei p der gesuchte Druck, welchen ein materieller Punkt dessen Lage durch die Koordination x, y, z gegeben ist, zu erleiden hat: X, Y, Z seien die Resultirenden sämmtlicher nach der Richtung der Koordinatenaxen zerlegten Kräfte, und ϱ die Dichtigkeit der flüssigen Masse; so hat man

$$dp = \varrho(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Beweis. Wie immer die kleinsten Theilchen flüssiger Körper gestaltet sein mögen, stets kann man einen materiellen Punkt oder ein Element derselben als ein Parallelopiped von den Abmessungen dx, dy, dz betrachten, deren beide ersten dx und dy horizontal, die letztere dz vertikal, und den drei durch den Anfangspunkt unter rechten Winkeln gezogenen Koordinatenaxen gleichlaufend angenommen werden, wenn man sich vorstellt, daß die flüssige Masse durch drei Reihen einander unendlich nahe geführten Ebenen, die den koordinirten Ebenen beziehungsweise parallel laufen, geschnitten wird. Heißt also dm die Masse eines dieser Elemente, so hat man

$$dm = \varrho dx.dy.dz.$$

Digitized by Google

Es seien X, Y, Z die Resultirenden, der nach der Richtung der Koordinatenaxen zerlegten Kräfte, also Xdm, Ydm, Zdm die bewegenden Kräfte, welche auf das im Punkte, dessen Koordinaten x, y, z sind, gestellte Element einwirken. Das in Rede stehende Parallelopiped wird von sechs Rechtecken als Seitenflächen begrenzt, welche paarweise einander gegenüber stehen. Zwei dieser Seitenflächen haben zu Abmessungen die Seiten dx, dy und sind horizontal, die vier andern beziehungsweise mit den Abmessungen dx, dz und dy, dz sind vertikal. Betrachten wir zuvörderst den Druck der Flüssigkeit auf die übereinander gestellten horizontalen Seitenflächen: sei p der Druck auf die Flächeneinheit der oberen horizontalen Seitenfläche, und p' der Druck auf die Flächeneinheit der ihr gegenüberstehenden unteren horizontalen Seitenfläche; so ist $pdxdy$ der Druck auf jene, und $p'dxdy$ der Druck auf diese, sonach $(p-p')dxdy$ die Resultirende beider Drückungen nach einer zur Axe der z parallelen Richtung. Im Allgemeinen ist p eine Funktion der Größen x, y, z, und es geht für die untere Seitenfläche p in $p+\left(\frac{dp}{dz}\right)dz$ über, wenn sich die Koordinate z allein um ihr Differentiale ändert, was bei der untern horizontalen Seitenfläche der Fall ist: hierdurch wird die Resultirende beider Drückungen $-\left(\frac{dp}{dz}\right)dxdydz$. Man hat also für den Zustand des Gleichgewichts

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)dxdydz=Zdm=Z\varrho dxdydz$$

woraus, wegen dem noch unbestimmten Vorzeichen der Größe links, sogleich folgt

$$1)\quad \left(\frac{dp}{dz}\right)=Z\varrho$$

und eben so findet man, in Beziehung der vier vertikalen Seitenflächen des Elements, wenn q, r den Druck auf die Flächeneinheit derselben bedeuten

$$\left(\frac{dq}{dy}\right)=Y\varrho,\ \left(\frac{dr}{dx}\right)=X\varrho$$

es ist aber (796) $dp=dq=dr$, hiedurch wird

$$2)\ \left(\frac{dp}{dz}\right)=Z\varrho,\ \left(\frac{dp}{dy}\right)=Y\varrho,\ \left(\frac{dp}{dx}\right)=X\varrho$$

Dieses sind die allgemeinen Gleichungen des Gleichgewichts einer flüssigen Masse, worauf beliebige beschleunigende Kräfte wirken, mag diese Masse gleichartig sein oder nicht, tropfbar oder elastisch flüssig sein.

Multiplizirt man die erste dieser 3 Gleichungen mit dz die zweite mit dy, die dritte mit dx, so gibt die Summe dieser Produkte wegen (A. 789)

$$3)\ dp=\varrho(Xdx+Ydy+Zdz)$$

799. **Folgesatz.** Das erste Glied dieser Gleichung ist ein vollständiges Differentiale, es muß also auch ihr zweites Glied ein solches werden, wenn überhaupt die Gleichung 3) bestehen soll. Durch Differentiirung der Gleichungen 2) erhält man aber nach (A. 791)

$$\left(\frac{d^2p}{dydz}\right)=\left(\frac{dZ\varrho}{dy}\right)=\left(\frac{dY\varrho}{dz}\right) \text{ und } \left(\frac{d^2p}{dxdy}\right)=\left(\frac{dY\varrho}{dx}\right)=\left(\frac{dX\varrho}{dy}\right)$$

demnach sind

$$4)\ \left(\frac{dX\varrho}{dy}\right)=\left(\frac{dY\varrho}{dx}\right),\ \left(\frac{dZ\varrho}{dx}\right)=\left(\frac{dX\varrho}{dz}\right),\ \left(\frac{dY\varrho}{dz}\right)=\left(\frac{dZ\varrho}{dy}\right)$$

die Bedingungsgleichungen, damit das zweite Glied der Gleichung 3) ein vollständiges Differentiale werde, und mithin integrabel sei.

800. **Folgesatz 2.** Für tropfbare gleichartige Flüssigkeiten ist ϱ konstant und man erhält aus der Gleichung 3)

$$5)\ p=\varrho f(Xdx+Ydy+Zdz)$$

bei elastischen Flüssigkeiten ist aber ϱ selbst eine Funktion der drei veränderlichen Größen x, y, z, demnach

$$6)\ p=f\varrho(Xdx+Ydy+Zdz).$$

801. **Folgesatz 3.** Wenn bei dem Gleichgewichte sämmtlicher auf eine flüssige Masse einwirkenden Kräfte, dieselbe eine freie Oberfläche bildet, mithin es keiner festen Wände eines Gefäßes bedarf, um die Flüssigkeit auf dieser Oberfläche in Ruhe zu erhalten; so ist der Druck p für alle Punkte dieser Oberfläche Null, wodurch aus der Gleichung 3) die einfachere

Digitized by Google

7) $Xdx+Ydy+Zdz=o$ oder 8) $\int(Xdx+Ydy+Zdz)=C$ folgt.

802. **Lehrsatz.** Die Richtung der Resultirenden aller auf die flüssige Masse wirkenden Kräfte ist in jedem Punkte ihrer Oberfläche eine Normale derselben.

Beweis. Seien x, y, z die Koordinaten eines Punktes der Oberfläche der Flüssigkeit, und X, Y, Z die den Axen parallelen Seitenkräfte der auf den Punkt wirkenden Resultirenden: seien ferner a, b, c die Koordinaten eines anderen Punktes in der Richtung der Resultirenden dieser Kräfte, demnach der Abstand beider Punkte von einander oder

$$I.\quad p=\sqrt{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]}$$

durch Differentirung dieses Ausdruckes folgt:

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=\frac{x-a}{p},\quad \left(\frac{dp}{dy}\right)=\frac{y-b}{p},\quad \left(\frac{dp}{dz}\right)=\frac{z-c}{p}$$

oder, wenn man die Winkel der Geraden p mit den drei Axen durch die Buchstaben α, β, γ bezeichnet

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)=\cos\alpha,\quad \left(\frac{dp}{dy}\right)=\cos\beta,\quad \left(\frac{dp}{dz}\right)=\cos\gamma.$$

Andererseits ist, wenn die Resultirende R heißt

$$X=R\cos\alpha,\quad Y=R\cos\beta,\quad Z=R\cos\gamma,\quad \text{mithin}$$

$$X=R\left(\frac{dp}{dx}\right),\quad Y=R\left(\frac{dp}{dy}\right),\quad Z=R\left(\frac{dp}{dz}\right)$$

multiplizirt man diese Gleichungen nach der Ordnung mit dx, dy, dz; so erhält man zur Summe der Produkte

$$II.\quad Xdx+Ydy+Zdz=R\left[\left(\frac{dp}{dx}\right)dx+\left(\frac{dp}{dy}\right)dy+\left(\frac{dp}{dz}\right)dz\right]$$
$$=Rdp$$

aber das erste Glied dieser Gleichung ist nach (801) Null, somit folgt $Rdp=o$, d. i. man hat im Ausdrucke $I.\ dp=o$, oder die Entfernung der in der Richtung der Resultirenden eines Punktes der Oberfläche betrachteten zwei Punkte ist immer ein Maximum oder ein Minimum, welche Eigenschaft stets die Normale einer mit der Oberfläche der Flüssigkeit zusammenfallenden krummen Fläche charakterisirt.

Digitized by Google

803. **Folgesatz.** Setzt man $Xdx+Ydy+Zdz=d\varphi$, wo φ eine Funktion der veränderlichen Größen x, y, z ist, so erhält man aus der Gleichung 3) für Punkte im Innern der Flüssigkeit

$$9)\quad dp=\varrho d\varphi,$$

welcher Gleichung dadurch Genüge geschieht, daß man ϱ als eine Funktion von φ betrachtet. Die Gleichung der freien Oberfläche der Flüssigkeit ist dann $\varphi=\text{const.}$ und Druck und Dichtigkeit werden in dieser flüssigen Maße von Schichte zu Schichte auf eine gleiche Weise sich ändern.

804. **Folgesatz 2.** Wenn also eine flüssige Masse von veränderlicher Dichtigkeit und freier Oberfläche ins Gleichgewicht kommen soll; so müssen sich die Schichten von gleicher Dichtigkeit, um die Schichten von nächst größerer Dichtigkeit so lagern, daß 1. die Dichtigkeit in jeder Schichte der flüssigen Masse dieselbe bleibt, und 2. daß die Resultirende der auf die äußere Fläche einzelner Schichten wirkenden beschleunigenden Kräfte überall mit der Normale der Fläche übereinfällt.

805. **Lehrsatz.** Wenn die bewegenden Kräfte der flüssigen Masse sämmtlich gegen einen festen Mittelpunkt gerichtet sind, so ist ihre freie Oberfläche kugelförmig.

Beweis. Sei in einem bestimmten Punkte der freien Oberfläche einer flüssigen Masse R die bewegende Kraft, und x, y, z die Koordinaten dieses Punktes in Beziehung auf drei durch den festen Mittelpunkt gezogene sich unter rechten Winkeln schneidende Axen, ferner seien X, Y, Z die den Axen parallelen Seitenkräfte der Kraft R, und α, β, γ die Winkel zwischen der Verbindungslinie r des Punktes mit dem festen Mittelpunkte und den Koordinatenaxen; so hat man nach (A. 1425) $x=r\cos\alpha$, $y=r\cos\beta$, $z=r\cos\gamma$, also

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\ \cos\beta=\frac{y}{r},\ \cos\gamma=\frac{z}{r},\ \text{und daher}$$

$$X=-\frac{Rx}{r},\ Y=-\frac{Ry}{r},\ Z=-\frac{Rz}{r}$$

Hieraus erhält man

$$Xdx+Ydy+Zdz=-\frac{R}{r}(xdx+ydy+zdz)$$

oder wegen der Gleichung 7)

Digitized by Google

$$xdx+ydy+zdz=o,$$

welches integrirt $\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)=C$ die Gleichung einer Kugel deren Halbmesser $\sqrt{2C}$ ist, liefert.

806. Folgesatz. Die Oberfläche des Meeres, deren jedes Theilchen von der Schwere nach Richtungen getrieben wird, die im Mittelpunkte der Erde zusammenlaufen, ist daher kugelförmig. Hierin liegt auch der Grund, daß die ursprünglich flüssigen Planeten so wie auch unsere Erde, eine Kugelgestalt erhielten.

807. Folgesatz 2. Hat die flüssige Masse schon eine Umdrehungsgeschwindigkeit ω, z. B. um die Axe der z, und es ist r der Abstand eines Elements dm dieser Masse von der Rotationsaxe, so ist ωr dessen Geschwindigkeit, und $\omega^2 r$ die daraus hervorgehende Centrifugalkraft. Diese Kraft muß den auf dm wirkenden Kräften hinzugefügt werden. Es wird also für die in (803) durch φ bezeichnete Funktion

$$10)\quad d\varphi=Xdx+Ydy+Zdz+\omega^2 rdr=o$$

als Differentialgleichung der freien Oberfläche eines flüssigen rotirenden Körpers, und man sieht, daß auch jetzt noch Gleichgewicht möglich sei, sobald die in (803) aufgestellten Bedingungen erfüllt sind.

808. Folgesatz 3. War also eine ruhende flüssige Masse, deren sämmtliche Theilchen von Kräften getrieben werden, und deren Richtungen in einem festen Punkte zusammenlaufen, im Gleichgewichte, wenn ihre freie Oberfläche kugelförmig begrenzt ist; (805); so muß die Centrifugalkraft bei einer rotirenden flüssigen Kugel die am Aequator gelegenen Theilchen von der Umdrehungsaxe entfernen, und die flüssige Masse nimmt im Zustande des Gleichgewichts die Gestalt eines abgeplatteten Sphäroids an.

809. Anmerkung. Das also sind die Gesetze, welche die Bildung der Sonne, der Erde und der Planeten bestimmen konnten, wenn man annimmt, daß diese ursprünglich flüssig waren, und daß ihre Theilchen bei ihrem Erhärten sich so lagerten, wie sie es zu Folge der gegenseitigen Wirkungen, und der aus der Rotation des Körpers entstandenen Centrifugalkraft thun mußten.

Digitized by Google

II. Gleichgewicht schwerer tropfbarer Flüssigkeiten.

1. Druck der Flüssigkeit auf die Wände eines Gefäßes.

810. Erklärung. Jede tropfbare Flüssigkeit wollen wir unter dem Namen Wasser begreifen: die ruhende Oberfläche des in einem Gefäße enthaltenen Wassers nennt man den Wasserspiegel. Wird das mit Wasser angefüllte Gefäß auf eine horizontale Ebene aufgestellt, so heißt die von der Ebene berührte Wand der Boden, alle anderen Theile der Oberfläche des Gefäßes dessen Seitenwände. Die vertikale Entfernung des Wasserspiegels vom Boden des Gefäßes heißt der Wasserstand oder die Druckhöhe.

811. Erklärung. Das Gewicht eines Körpers ohne Rücksicht auf sein Volum, heißt das absolute Gewicht desselben: das Gewicht eines Körpers unter dem zur Einheit angenommenen Volum, z. B. das Gewicht eines Kubikfußes, Kubikzolles u. s. f. oder das Verhältniß des Gewichtes eines Körpers zum Gewichte destillirten Wassers unter gleichem Volum heißt dessen eigenthümliches oder spezifisches Gewicht.

812. Anmerkung. Das spezifische Gewicht eines Körpers ist desto größer, je größer seine Dichtigkeit ist; das absolute Gewicht desselben wird also von der Dichtigkeit und dem Volum des Körpers abhängen. Allein auch die in verschiedenen Entfernungen der Erde Statt findenden ungleichen Beschleunigungen der Schwere, ferner die Temperatur der Körper, haben auf das spezifische Gewicht einen Einfluß. Für die Ausübung hat man hinreichend genau, das Gewicht eines Wiener Kubikfußes destillirten Wassers gleich 56.4 Wiener Pfunde, das Gewicht eines preußischen Kubikfußes gleich 66 preußischer Pfunde, und das Gewicht eines Kubikmeters Wasser gleich 1000 Kilogramme. Bezeichnet man also mit γ das Gewicht der kubischen Einheit Wassers; so ist $\gamma = 56.4$ Wiener Pf., $\gamma = 66$ Preuß. Pf. und $\gamma = 1000$ Kilogramme.

813. Lehrsatz. Der Druck des Wassers auf den Boden eines Gefäßes ist gleich dem Gewichte eines Wasserprisma, dessen Basis der Boden des Gefäßes, dessen Höhe aber der Wasserstand desselben ist.

Beweis. Bei schweren Flüssigkeiten, wenn man die Richtung der Schwere zur Axe der z nimmt, hat man in der Gleichung 3)

$$dp=\varrho(Xdx+Ydy+Zdz)$$

$X=o$, $Y=o$, $Z=g$, mithin

$$1)\quad dp=g\varrho dz$$

bei tropfbaren Flüssigkeiten ist überdieß ϱ konstant, und es wird

$$2)\quad p=g\varrho z$$

wo die Konstante der Integration Null ist, wenn der Druck an der Oberfläche der Flüssigkeit, wo $z=o$ ist, verschwindet. Diese einfache Formel lehret uns, daß der Druck einer tropfbaren Flüssigkeit für alle Punkte der flüssigen Masse, welche gleich tief unter dem Wasserspiegel liegen, derselbe sei, daß er ferner sich mit dieser Tiefe vergrößert, und somit auf dem Boden des Gefäßes am größten wird. Bezeichnet man durch h den Wasserstand; so ist der Druck auf die Flächeneinheit des Bodens $p=\varrho gh$ und wenn b den Inhalt des Bodens in solchen Einheiten vorstellt, und der Gesammtdruck des Wassers auf den ganzen Boden mit P bezeichnet wird, so erhält man

$$3)\quad P=\varrho gbh$$

oder weil $\varrho g=\gamma$ (813) ist,

$$4)\quad P=\gamma bh$$

814. **Folgesatz.** Der Druck auf den Boden eines Gefäßes hängt nicht eigentlich von dem Gewichte der Wassermasse, als vielmehr von der Größe des Bodens und dem Wasserstande der Flüssigkeit ab. Man kann daher mit einer verhältnißmäßig kleinen Wassermasse einen ungeheueren Druck erzeugen, wenn dieselbe auf einer großen Fläche ausgebreitet, dabei einen hohen Wasserstand erhält.

815. **Anmerkung.** Hierauf beruhet die **Bramah'sche Wasserpresse**, um Gegenstände vom großen Umfange, wie Wolle, Hopfen, Baumwolle, Häute, Papier auf einen kleinen Umfang zusammenzupressen, und somit zur Versendung geschickter zu machen. Sie besteht im Wesentlichen aus zwei Cylindern von ungleichen Durchmessern A, B (Fig. 186) deren erstere der **Injektionsstiefel**, der andere **Druckstiefel** heißt, welche mit wasserdicht passenden Kolben versehen sind, und durch eine Röhre CD mit einander kommuniziren. In dem ersteren befindet sich bei F ein Kegelventil, welches den Zutritt des Wassers aus dem Behälter G in den Stiefel gestattet, den Rücktritt

Digitized by Google

desselben aber verhindert: eben so hat die Röhre bei E ein Kegelventil, um die Bewegung des Wassers aus dem ersten Stiefel in den zweiten zu leiten oder abzusperren. Der Kolben P des Druckstiefels ist mit der Preßplatte QR verbunden, die innerhalb eines gußeisernen Rahmens $MMNN$ auf und ab beweglich ist, zwischen ihr und dem Querstücke MM werden die zu pressenden Waaren S, S, S zwischen ebene gußeiserne Platten gelegt. Der Kolben I des Injektionsstiefels wird vermittelst des Hebels KL bewegt, der seinen Stützpunkt in O hat, und seine aufrechte Stellung dem Ringe bei T verdankt. Bei G befindet sich ein Seigerblech um blos dem reinen Wasser im Behälter den Zutritt in den Stiefel zu gestatten.

Der Hergang des Zusammenpressens ist nun folgender: Bevor noch die zu pressende Waare aufgelegt wird, wird der Kolben P entfernt, und der Stiefel B beim geschlossenen Hahne E bis zu einer angemessenen Höhe mit Wasser gefüllt, der Kolben sammt dem Preßbrete aufgesetzt, und die Waare zwischen den Platten untergebracht: ferner enthält der Behälter G Wasser, welches aus einem später zu erörternden Grunde mit jedem Kolbenhube in den Stiefel A aufsteigt. Wird nun der Hahn E geöffnet, und der Kolben I niedergedrückt, so kann das Wasser nicht in den Behälter zurücktreten, indem das Kegelventil F sich nur aufwärts öffnet, sondern es muß durch die Röhre CD in den Stiefel B fahren; hierauf wird der Hahn E geschlossen, der Kolben I aufwärts bewegt, und bei geöffnetem Hahne abermals herab getrieben, wodurch wieder neues Wasser in den Stiefel B gedrängt wird: hiedurch wird aber der Kolben P allmälig zum Steigen genöthigt, und die Waare S immer mehr zusammengepreßt.

816. Aufgabe. Den Druck zu bestimmen, mit welchem die Kraft eines Menschen beim Zusammenpressen thätig ist.

Auflösung. Sei P die physische Kraft des Menschen, $N:n$ das Verhältniß der Hebelsarme KO, IO des einarmigen Hebels KOL, $d:D$ das Verhältniß der Durchmesser im Injektionsstiefel und Druckstiefel, Q der bewirkte Druck, so hat man ohne Rücksicht auf Reibung

$$Q=\frac{NPD^2}{nd^2}.$$

Digitized by Google

Beweis. Heißt x der Widerstand im Punkte I, womit der Kolben der Bewegung des Hebels entgegenwirkt, so ist das Moment der Kraft NP gleich dem Momente der Last nx, also $x=NP:n$. Dieser Widerstand x ist nun als eine Kraft am Kolben des Injektionsstiefels anzusehen, welche am Kolben des Druckstiefels einen Druck Q erzeugt. Sobald alles Wasser aus dem Injektionsstiefel in den Druckstiefel getreten ist, wird der Kolben des letzteren um einen Raum getrieben, welcher den Querschnitten beider Stiefel proportional ist: die Erhebung des Kolbens P ist demnach $d^2:D^2$; man hat daher

$$Q=\frac{xD^2}{d^2}=\frac{NPD^2}{nd^2}$$

Ist z. B. $P=80$ Pfunden, $D=12d$, $N=10n$, so folgt
$Q=10.80.144=115200$ Pfunden.

817. Aufgabe. Den Druck auf die Seitenwand eines mit Wasser angefüllten Gefäßes zu bestimmen.

Auflösung. Dieser Druck ist dem Gewichte eines Wasserprisma gleich, dessen Grundfläche die Seitenwand bildet, und dessen Höhe gleich ist dem Abstande des Wasserspiegels vom Schwerpunkte der Seitenwand.

Beweis. Es wird hier vorausgesetzt, daß die Seitenwand des Gefäßes, auf welche der Druck des Wassers gesucht wird, eine wie immer gegen den Wasserspiegel geneigte und von einer beliebigen krummen Linie begrenzte ebene Figur habe. Sei $ABCDE$ (Fig. 187) der vertikale Querschnitt eines bis AB mit Wasser erfüllten Gefäßes, $DC=S$ der Inhalt der Seitenwand, welche verlängert den Wasserspiegel unter einem Winkel $AFC=\alpha$ schneidet, man denke sich dieselbe durch eine große Anzahl, in gleichen unendlich kleinen Abständen dk von einander, horizontal geführter Ebenen in sehr kleine Streifen abgetheilt, und bezeichne die Flächeninhalte derselben nach einander mit $\sigma, \sigma', \sigma'', \sigma''', \ldots$ ihre Vertiefungen unter dem Wasserspiegel mit $k, k', k'', k''', \ldots$; so ist der Druck des Wassers auf den ersten Streifen der Seitenwand, in vertikaler Richtung, weil $\sigma\cos\alpha=pC$ ist, gleich $\gamma k\sigma\cos\alpha$, mehr dem Gewichte des im Prisma pCM enthaltenen Wassers, welches $\frac{1}{2}\gamma\sigma\cos\alpha.dk$ beträgt, aber wegen dem Faktor dk

verschwindet. Eben so hat man für die nächstfolgenden Streifen der Seitenwand, die vertikalen Drückungen beziehungsweise $\gamma k'\sigma'\cos\alpha$, $\gamma k''\sigma''\cos\alpha$, u. s. f. deren Summe oder der Gesammtdruck des Wassers auf die Seitenwand $\gamma\cos\alpha\,(k\sigma+k'\sigma'+k''\sigma''+\ldots)$ $=\gamma\cos\alpha\Sigma k\sigma$ wird. Hieraus entsteht ein Druck auf die Seitenwand nach der Richtung der Normale MN gleich $\gamma\Sigma k\sigma$. Betrachtet man den Inhalt σ eines Streifens als eine Kraft, welche im Abstande k wirkt, und nimmt den Wasserspiegel zur Momentenebene, so ist $\Sigma k\sigma=Sk_1$(71), wenn k_1 den Abstand des Schwerpunktes G der Seitenwand S vom Wasserspiegel vorstellt: hiemit erhält man den Wasserdruck auf die Seitenwand gleich γSk_1.

818. Folgesatz. In einem Parallelopiped, dessen Grundfläche die Abmessungen a, b hat, und dessen Höhe h ist, wird der Abstand des Schwerpunktes einer Seitenfläche vom Wasserspiegel $\frac{1}{2}h$, demnach der Wasserdruck auf die Seitenflächen beziehungsweise $\frac{1}{2}ah^2\gamma$, und $\frac{1}{2}bh^2\gamma$, während der Druck auf den Boden γabh wird. Ist $a=b$, so wird jener $\frac{1}{2}ah^2\gamma$, dieser γah^2, demnach der Wasserdruck auf die Seitenfläche nur halb so groß als der Druck auf den Boden.

819. Aufgabe. Die Seitenwand eines mit Wasser erfüllten Gefäßes sei ein Trapez, den Wasserdruck auf dieselbe zu bestimmen.

Auflösung. Heißen die Abmessungen des Trapezes, und zwar die beiden parallelen horizontalen Seiten a, b, ihr Abstand von einander c und α der Neigungswinkel der Seitenwand gegen den Wasserspiegel so ist der verlangte Druck

$$Q=\tfrac{1}{6}\gamma c^2(2a+b)\sin\alpha$$

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 188) die trapezförmige Seitenwand eines bis an AB erfüllten Gefäßes, man setze $AB=a$, $CD=b$, $EF=c$, so ist der Inhalt derselben $\frac{1}{2}(a+b)c$, und der Abstand EG ihres Schwerpunktes nach (46)

$$EG=\frac{c(2a+b)}{3(a+b)}$$

hieraus erhält man die vertikale Druckhöhe des Schwerpunktes, oder

$$GH=EG\sin\alpha=\frac{c(2a+b)\sin\alpha}{3(a+b)}$$

Digitized by Google

wird dieses mit $\frac{1}{2}(a+b)c\gamma$ multiplizirt, so ergibt sich der gesuchte Wasserdruck auf diese Seitenwand wie oben.

820. **Folgesatz.** Ist $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, und $a=b$, $c=h$, so folgt bei einem rechtwinkligen Parallelopiped $Q=\frac{1}{2}a\gamma h^2$ übereinstimmend mit (818). Ist aber $b=o$, $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, $c=h$, so erhält man bei einer Seitenwand, welche ein Dreieck mit abwärts gekehrter Spitze ist $Q=\frac{1}{3}a\gamma h^2$: ist hingegen $a=o$, $\alpha=\frac{1}{2}\pi$, $c=h$, so ergibt sich für ein Dreieck, dessen Spitze im Wasserspiegel liegt, $Q=\frac{1}{6}b\gamma h^2$.

821. **Aufgabe.** Wenn die Seitenwand eine Parabel ist, deren Scheitel im Wasserspiegel liegt, und deren Axe in einer vertikalen Ebene durch den Scheitel unter einem Winkel α gegen den Wasserspiegel geneigt ist, den Wasserdruck zu bestimmen.

Auflösung. Sind a, b die Koordinaten für den Endpunkt des parabolischen Bogens, so hat man $Q=\frac{2}{5}a^2b\gamma\sin\alpha$.

Beweis. Der Schwerpunkt der parabolischen Seitenwand liegt in einem Abstande $x=\frac{3}{5}a$ (113) vom Scheitel, die Druckhöhe des Schwerpunktes ist daher $\frac{3}{5}a\sin\alpha$: der Inhalt der von der Axe und dem parabolischen Bogen eingeschlossenen Fläche ist aber $\frac{2}{3}ab$; somit $Q=\frac{2}{3}ab\gamma.\frac{3}{5}a\sin\alpha=\frac{2}{5}a^2b\gamma\sin\alpha$.

822. **Lehrsatz.** Der Druck auf eine von der Ellipse begrenzte Seitenwand, deren große Axe vertikal und deren Scheitel im Wasserspiegel liegt, ist das Gewicht eines Wassercylinders, dessen kreisförmige Grundfläche die halbe große Axe zum Halbmesser hat, und dessen Höhe der halben kleinen Axe der Ellipse gleich ist.

Beweis. Sind a, b, die beiden Halbaxen der vertikalen Ellipse, so ist πab der Inhalt, und a der Abstand ihres Schwerpunktes vom Wasserspiegel; somit $Q=\pi a^2b\gamma$.

823. **Aufgabe.** Den Wasserdruck auf die krumme Oberfläche eines geraden parallel gestutzten Kreiskegels zu bestimmen.

Auflösung. Sind R, r die Halbmesser der beiden parallelen Grundflächen des Kegels, h dessen Höhe und zugleich der Wasserstand, so hat man den Druck auf die krumme Oberfläche

$$Q=\tfrac{1}{3}h\gamma(2R+r)\pi\sqrt{[(R-r)^2+h^2]}.$$

Digitized by Google

Beweis. Sei (Fig. 189) $ABKkab$ ein abgestutzter gerader Kegel, $Cc=h$ dessen Axe, $Aa=Bb=s$ dessen Seite, und $AC=R$, $ac=r$ die Halbmesser der kreisförmigen Grundflächen. Man schneide den Kegel durch zwei Ebenen $CBbc$, $CAac$ die einen sehr kleinen Winkel $ACB=\psi$ einschließen, so entsteht an der Oberfläche des Kegels eine krumme Fläche $ABba$ die desto mehr einem Trapeze sich nähert, je kleiner der Neigungswinkel ψ der beiden schneidenden Ebenen selbst ist. Der Wasserdruck auf dieses Trapez $ABba$ findet sich so: es ist $AB=R\psi$, $ab=r\psi$, also der Inhalt des Trapezes $\frac{1}{2}(R+r)s\psi$, der Abstand seines Schwerpunktes von der Seite AB gleich $\frac{1}{3}\frac{s(2R+r)}{R+r}$; multiplizirt man diesen Ausdruck mit $h:s$, so ergibt sich der Abstand des Schwerpunktes vom Wasserspiegel $\frac{\frac{1}{3}h(2R+r)}{R+r}$: hieraus folgt der Wasserdruck auf das Trapez $ABba=\frac{1}{6}hs\gamma(2R+r)\psi$. Läßt man hier ψ in 2π übergehen, und bemerkt, daß $s=\sqrt{[(R-r)^2+h^2]}$ sei, so erhält man $Q=\frac{1}{3}h\gamma(2R+r)\pi\sqrt{[(R-r)^2+h^2]}$.

824. **Folgesatz.** Ist hier $R=r$, so wird der Druck auf eine cylindrische Fläche $Q=h^2r\gamma\pi$, d. i. dem Gewichte eines Wasserprisma gleich, dessen kreisförmige Grundfläche h zum Halbmesser hätte und dessen Höhe r wäre. Setzt man aber $r=o$, so geht der abgestutzte Kegel in einen vollen über, und man erhält $Q=\frac{2}{3}Rh\gamma\pi\sqrt{(R^2+h^2)}$ als Wasserdruck auf die krumme Oberfläche eines Kreiskegels.

825. **Aufgabe.** Wenn sich in einem Gefäße von beliebiger Gestalt Flüssigkeiten von verschiedener Dichtigkeit über einander befinden, den Gesammtdruck auf den Boden zu bestimmen.

Auflösung. Sei b der Boden des Gefäßes, h, h', h'', ... die Höhen der Schichten, welche von den ungleichartigen Flüssigkeiten, deren Gewichte für die kubische Einheit γ, γ', γ'', ... beziehungsweise sind, eingenommen werden; so ist der Gesammtdruck

$$P=b(\gamma h+\gamma' h'+\gamma'' h''+\ldots)$$

Beweis. Wenn sich in einem Gefäße Flüssigkeiten von verschiedener Dichtigkeit befinden, die gegen einander keine chemische Verwandschaft besitzen, als Wasser, Oel, Quecksilber, Aether u. s. f., so

Digitized by Google

können sie nur (804) ins Gleichgewicht kommen, wenn erstens die sie von einander scheidenden Flächen, eben und horizontal sind, und zweitens wenn sie so sich über einander lagern, daß sie vom Boden an gegen die Oberfläche nach den abnehmenden Dichtigkeiten fortschreiten, mithin die Flüssigkeit von der größten Dichtigkeit unmittelbar über dem Boden zu stehen kommt, dagegen die leichteste Flüssigkeit obenauf schwimmt. Sei nun $ABCD$ (Fig. 190) das Gefäß, $BC=b$ der Boden desselben, EF, $E'F'$, $E''F''$ u. s. f. die horizontalen Ebenen, die in den Abständen $GH=h$, $HH'=h'$, $H'H''=h''$ u. s. f. die ungleichartigen Flüssigkeiten von einander scheiden, und es seien nach der Ordnung die Gewichte der kubischen Einheit dieser Flüssigkeiten γ, γ', γ'' . . . Der Druck der unmittelbar auf dem Boden des Gefäßes ruhenden Flüssigkeit ist γbh: sei $EF=x$ die Fläche der Scheidewand, so ist der Druck der nächst folgenden Flüssigkeit auf die Fläche EF gleich $\gamma' xh'$; dieser Druck pflanzt sich aber durch die Masse der ersteren ungeändert fort, und bewirkt auf den Boden einen Druck y, welcher sich nach (796) durch die Proportion ergibt $\gamma' xh' : y = x : b$ woraus $y=\gamma' bh'$ folgt. Auf ähnliche Weise findet man den Druck der darüber stehenden Flüssigkeit auf den Boden des Gefäßes gleich $\gamma'' bh''$ u. s. f. Die Summe dieser Pressungen, welche der Boden des Gefäßes erleidet ist demnach

$$b(\gamma h + \gamma' h' + \gamma'' h'' + \gamma''' h''' + \ldots)$$

826. Erklärung. Kommunizirende Röhren heißen zwei Röhren von beliebigen gleichen oder verschiedenen Durchmessern, die mit einander in Verbindung stehen.

827. Lehrsatz. In kommunizirenden Röhren sind zwei Flüssigkeiten von verschiedenen Dichtigkeiten im Gleichgewichte, wenn ihre Höhen in den beiden Schenkeln sich umgekehrt verhalten, wie ihre Dichtigkeiten.

Beweis. Seien γ, γ' die Gewichte der kubischen Einheit der beiden Flüssigkeiten, welche abgesondert in den kommunizirenden Röhren sich befinden, h, h' seien ihre Höhen, und es bezeichne s die horizontale Trennungsfläche derselben; so folgt der Druck der einen Flüssigkeit auf die gemeinschaftliche Trennungsfläche gleich γsh, und der Druck der anderen Flüssigkeit auf dieselbe gleich $\gamma' sh'$; mithin ist im Zustande des Gleichgewichts

Digitized by Google

$$\gamma s h = \gamma' s h', \text{ oder } \gamma h = \gamma' h', \text{ woraus}$$
$$h : h' = \gamma' : \gamma \text{ folgt.}$$

828. **Folgesatz.** Sind die Flüssigkeiten in den beiden Schenkeln der Röhre gleichartig, oder $\gamma = \gamma'$, so folgt auch $h = h'$ d. i. in kommunizirenden Röhren steht das Wasser in beiden Schenkeln gleich hoch.

2. Mittelpunkt des Druckes.

829. **Erklärung.** Man nennt in einer Seitenwand den **Mittelpunkt des Druckes** denjenigen Punkt, durch welchen die Resultirende des Druckes auf die ganze Seitenwand hindurch geht. Wird dieser Punkt gestützt, so kann auch bei einer übrigens beweglichen Seitenwand der Ausfluß der Flüssigkeit aus dem Gefäße verhindert werden.

830. **Folgesatz.** Der Mittelpunkt des Druckes im Boden eines Gefäßes fällt mit dem Schwerpunkte der Figur, welche der Boden besitzt, überein: weil hier alle Theile des Bodens derselben Druckhöhe ausgesetzt sind. Bei der Seitenwand hingegen wird die Stellung des Mittelpunktes des Druckes von der Lage ihres Schwerpunktes unterschieden sein.

831. **Aufgabe.** Die allgemeinen Formeln für den Mittelpunkt des Druckes einer Seitenwand, deren Lage und Gestalt gegeben sind, zu finden.

Auflösung. Nimmt man den obersten Punkt der Seitenwand zum Anfangspunkte, und die Durchschnittslinie der Seitenwand mit einer durch den Anfangspunkt geführten vertikalen Ebene zur Abszissenaxe; so hat man die Koordinaten x, y den Mittelpunkt des Druckes aus den Gleichungen

$$x = \frac{\int x(h + x\sin\alpha) y\,dx}{\int (h + x\sin\alpha) y\,dx}, \quad y = \frac{\int (h + x\sin\alpha) y^2\,dx}{2\int (h + x\sin\alpha) y\,dx}$$

in welchen x, y die Koordinaten eines Punktes der Kurve, welche die Seitenwand einschließt, h die Vertiefung des obersten Punktes der Seitenwand unter dem Wasserspiegel, und α den Neigungswinkel der Abszissenaxe gegen den Wasserspiegel bedeuten.

Digitized by Google

Beweis. Sei AMB (Fig. 191) die Kurve, welche die Seitenwand bildet, A ihr oberster Punkt, und eine durch A gezogene vertikale Ebene schneide die Seitenwand nach der Geraden AB, welche zur Abszissenaxe gewählt wird: um die Formeln nicht ohne Noth zu komplizieren, wollen wir voraussetzen, daß der Neigungswinkel der Axe AB gegen den Wasserspiegel, zugleich die Neigung der Ebene der Seitenwand gegen denselben vorstelle. Sei CD der Wasserspiegel, und M ein Punkt der Kurve, für welchen die rechtwinkligen Koordinaten $AP=x$, $PM=y$ sind, und wenn PN horizontal gezogen und die Axe AB bis zum Zusammentreffen mit dem Wasserspiegel verlängert wird, sei $APN=CFA=\alpha$, der Neigungswinkel der Axe gegen den Wasserspiegel. Der Druck, den das Element $PMmp$ der Seitenwand von dem darüber befindlichen Wasser erleidet ist $EK\times ydx\,.\,\gamma$, wo γ das Gewicht die Kubikeinheit des Wassers vorstellt: allein $EK=AE+AK=h+x\sin\alpha$, wenn man die Vertiefung AE des obersten Punktes A der Seitenwand mit h bezeichnet: hiedurch wird die Summe der Pressungen auf sämmtliche Elemente der Seitenwand AMB gleich

$$\gamma\int(h+x\sin\alpha)y\,dx.$$

Das Moment des Druckes, den das Element $PMmp$ auszuhalten hat, hinsichtlich einer auf AB senkrechten Axe AY ist gleich $\gamma x(h+x\sin\alpha)y\,dx$, und die Summe der Momente für sämmtliche Elemente der Seitenwand in Beziehung auf dieselbe Axe ist $\gamma\int x(h+x\sin\alpha)y\,dx$, während das Moment des im Mittelpunkte des Druckes G vereinigten Totaldruckes, $AG=\mathfrak{x}$ setzend, den Werth $\mathfrak{x}\gamma\int(h+x\sin\alpha)y\,dx$ erhält. Man hat also

$$1.\quad \mathfrak{x}\gamma\int(h+x\sin\alpha)y\,dx=\gamma\int x(h+x\sin\alpha)y\,dx$$

und eben so erhält man

$$2.\quad \mathfrak{y}\gamma\int(h+x\sin\alpha)y\,dx=\tfrac{1}{2}\gamma\int(h+x\sin\alpha)y^2dx$$

woraus die obigen für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ angegebenen Ausdrücke unmittelbar folgen.

832. **Folgesatz.** Reicht der Punkt A bis an den Wasserspiegel CD, dann ist $h=o$, und man erhält einfacher

$$\mathfrak{x}=\frac{\int x^2y\,dx}{\int xy\,dx},\quad \mathfrak{y}=\frac{\int xy^2dx}{2\int xy\,dx}$$

Digitized by Google

welche Ausdrücke unabhängig von dem Neigungswinkel der Seitenwand gegen den Wasserspiegel sind.

Ist aber $\alpha = {}^1/_2\pi$, so wird

$$x = \frac{\int x(h+x)y\,dx}{\int (h+x)y\,dx},\quad y = \frac{\int (h+x)y^2\,dx}{2\int (h+x)y\,dx}$$

833. Folgesatz 2. Zur Bestimmung der Lage des Mittelpunktes des Druckes einer Seitenwand sind daher drei Integrationen erforderlich. Im Falle jedoch, wo die Abszissenaxe, welche immer die Durchschnittslinie der Seitenwand mit einer durch ihren obersten Punkt geführten vertikalen Ebene ist, dieselbe in zwei kongruente Hälften schneidet, wird der Mittelpunkt des Druckes stets auf der Abscissenaxe gelegen sein, da dann $y = o$ wird, und zwei Integrationen hinreichen, um dessen Lage in der Seitenwand zu bestimmen.

834. Aufgabe. Wenn die Seitenwand ein Trapez mit horizontalen einander parallelen Seiten ist, welches durch eine durch seinen Schwerpunkt gezogene vertikale Ebene in zwei kongruente Hälften getheilt wird, den Mittelpunkt des Druckes zu finden.

Auflösung. Sind a, b die beiden parallelen Seiten des Trapezes, c ihr Abstand von einander, h der Wasserstand über der obern Seite a, und α der Neigungswinkel des Trapezes gegen den Wasserspiegel, so hat man

$$x = \frac{2hc(a+2b) + c^2 \sin\alpha (a+3b)}{6h(a+b) + 2c\sin\alpha (a+2b)}$$

Beweis. Sei die Seitenwand $ABCD$ (Fig. 192) ein Trapez von den Abmessungen $AB = a$, $CD = b$, welche horizontal und einander parallel sind, man verlängere die nicht parallelen Seiten AD BC bis zu ihrem Zusammentreffen in O, und es sei OK das aus dem Punkte O auf AB gefüllte Perpendikel, welches der Geraden CD im Punkte L begegnet, es ist sonach $KL = c$ der Abstand der beiden parallelen Seiten von einander. Nimmt man $KP = x$, $PM = y$, so verhält sich $AB : Mm = KO : OP$, oder $KO = t$ gesetzt

$$a : y = t : t - x,$$ dieß gibt

$$a(t-x) = ty,\ \text{also}\ y = \frac{a(t-x)}{t}$$

Digitized by Google

für $x=c$, wird aber $y=b$: dieß gibt

$$t=\frac{ac}{a-b}, \text{ mithin } y=\frac{ac-x(a-b)}{c}$$

Substituirt man diesen Werth für y in (831), so erhält man

$$\chi=\frac{\int x(h+x\sin\alpha)[ac-x(a-b)]dx}{\int(h+x\sin\alpha)[ac-x(a-b)]dx}$$

oder $$\chi=\frac{h\int[ac-x(a-b)].xdx+\sin\alpha\int[ac-x(a-b)].x^2dx}{h\int[ac-x(a-b)]dx+\sin\alpha\int[ac-x(a-b)].xdx}$$

woraus, wenn die Integration vollzogen und $x=c$ gesetzt wird, der oben angegebene Werth für χ sich ergibt.

835. **Folgesatz.** Ist $\alpha=o$, oder fällt die Seitenwand mit dem Boden des Gefäßes zusammen, so folgt

$$\chi=\tfrac{1}{3}h\,.\,\frac{a+2b}{a+b}$$

d. i. der Mittelpunkt des Druckes liegt in dem Schwerpunkte des Bodens, übereinstimmend mit (830).

836. **Folgesatz 2.** Ist aber $h=o$, oder reicht die Gerade AB an den Wasserspiegel, so ergibt sich

$$\chi=\frac{c(a+3b)}{2(a+2b)}.$$

Ist nebstdem $a=b$, wodurch das Trapez in ein Rechteck übergeht, erhält man

$$\chi=\tfrac{2}{3}c$$

ist hingegen $b=o$, wodurch das Trapez zu einem gleichschenklichten Dreieck wird, dessen Spitze nach unten gekehrt ist, so wird

$$\chi=\tfrac{1}{2}c,$$

ist endlich $a=o$, so folgt für ein mit der Spitze nach oben gerichtetes gleichschenklichte Dreieck

$$\chi=\tfrac{3}{4}c.$$

837. **Aufgabe.** Die Seitenwand eines Gefäßes sei von dem Bogen einer Ellipse ihrer großen Axe, welche vertikal angenommen wird, und der horizotalen Ordinate begrenzt, man frägt nach der Lage des Mittelpunktes des Druckes wenn der Scheitel der Ellipse bis an den Wasserspiegel reicht.

Digitized by Google

Auflösung. Heißen a, b die beiden Halbaren, so hat man für eine Abszisse vom Scheitel x, und $Q=2ax-x^2$

$$x=\frac{(6x^3-2ax^2-5a^2x-15a^3)\sqrt{Q}+15a^2 arcsinv(x:a)}{(8x^2-4ax-12a^2)\sqrt{Q}+12a^3 arcsinv(x:a)}$$

$$y=\frac{b(8ax^3-3x^4)}{4a(2x^2-ax-3a^2)\sqrt{Q}+12a^4 arcsinv(x:a)}$$

Beweis. Die Formeln (832) $x=\frac{\int x^2y\,dx}{\int xy\,dx}$, $y=\frac{\int xy^2\,dx}{2\int xy\,dx}$ geben, wenn man statt y dessen Werth aus der Scheitelgleichung der Ellipse substituirt

$$\int xy^2\,dx=\frac{b^2}{a^2}\int x(2ax-x^2)\,dx=\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{2ax^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)$$

$$\int xy\,dx=\frac{b}{a}\int x\,dx\sqrt{(2ax-x^2)},\ \int x^2y\,dx=\frac{b}{a}\int x^2\,dx\sqrt{(2ax-x^2)}$$

Es ist aber für $Q=2ax-x^2$ nach Int. 151) und 152)

$$\int x\,dx\sqrt{Q}=\left(\frac{x^2}{3}-\frac{ax}{6}-\frac{a^2}{2}\right)\sqrt{Q}+{}^1/_2a^3 arcsinv\frac{x}{a}$$

$$\int x^2\,dx\sqrt{Q}=\left(\frac{x^3}{4}-\frac{ax^2}{12}-\frac{5a^2x}{24}-\frac{5a^3}{8}\right)\sqrt{Q}+\frac{5}{8}a^4 arcsinv\frac{x}{a}$$

Substituirt man diese Werthe im Ausdrucke für x und y, und bringt Alles auf einen gemeinschaftlichen Nenner, so erhält man sofort die oben angegebenen Formeln.

838. Folgesatz. Für $x=a$ d. i. für einen elliptischen Quadranten erhält man hieraus

$$x=\frac{(-32+15\pi)a}{-16+12\pi},\ y=\frac{5b}{-8+6\pi}$$

für $x=2a$ hingegen, oder eine halbe Ellipse, folgt

$$x=\frac{5}{4}a,\ y=\frac{4b}{3\pi}$$

839. Anmerkung. Setzt man $a=b$, so ergibt sich die Lage des Mittelpunktes des Druckes für eine vom Kreise begrenzte Seitenwand. Zur ferneren Uebung mögen hier noch folgende Aufgaben nebst ihren Auflösungen einen Platz finden.

Digitized by Google

1. Ist die begrenzte Seitenwand ein Rechteck von der Höhe h und im Wasserspiegel gelegenen Grundlinie b, so wird $x=\frac{2}{3}h$, $y=\frac{1}{2}b$.

2. Für ein rechtwinkliges Dreieck mit einer horizontalen Kathete b und lothrechten Kathete h, ist $x=\frac{3}{4}h$; $y=\frac{3}{8}b$, wenn die Spitze im Wasserspiegel liegt: dagegen ist $x=\frac{1}{2}h$, $y=\frac{1}{4}b$ wenn die Kathete b im Wasserspiegel sich befindet.

3. Für eine Parabel mit einer lothrechten Höhe h und horizontaler Ordinate b ist $x=\frac{5}{7}h$, $y=\frac{5}{12}b$, wenn der Scheitel im Wasserspiegel liegt, und $x=\frac{4}{7}h$, $y=\frac{5}{16}b$, wenn die Ordinate an den Wasserspiegel reicht.

3. Aufgaben über die Anwendung dieser Lehre.

840 Erklärung. Man unterscheidet beträchtliche Wassermassen in stehende Gewässer, Seen, Teiche, und fließende Gewässer, Bäche, Flüsse, Ströme, Kanäle. Um das Wasser als bewegende Kraft zu benützen, werden diese Gewässer auf einer Seite mit einem Damme oder Wehre geschlossen, in welchen sich ein Einschnitt, wo das Wasser abfließt, befindet. Zu diesem Ende wird in dem Einschnitte auf einer gehörigen Fundirung ein fester Einbau von Holz oder Steinen gemacht. Wenn die Oeffnung, durch welche das Wasser abgelassen wird, mittelst einer oder zwei Thüren geschlossen wird, welche sich um eine vertikale Axe drehen, so heißt der Einbau eine Schleuße (Fig. 193), wenn aber in der Oeffnung ein Rechteck aus Bohlen oder Bretern angebracht wird, das sich in den Falzen zweier Säulen oder Pfosten auf und ab bewegen, und in jeder verlangten Lage feststellen läßt, so heißt der Einbau eine Arche, das in den Nuthen bewegliche Rechteck eine Schütze, und falls die Schütze klein und aus einem einzigen Brete gefertiget wird, ein Schutzbret. (Fig. 194). Die Breite der Schütze ist der horizontale Abstand von einem Schützenbaum zum andern.

841. Erklärung. Man unterscheidet bei einer jeden Schleuße das Oberwasser, welches vor der Schleuße steht, und höher ist, als das Unterwasser unterhalb derselben. Der Abfall vom Oberwasserspiegel bis zum Spiegel des Unterwassers heißt das Gefälle. Zu den wesentlichen Theilen einer Schleuße gehören: die Schleußen-

Digitized by Google

wände, der Schleußenboden und die Schleußenthore. Der Schleußenboden zerfällt in den wagerechten Oberboden, den Abfallboden und den wagerechten Unterboden. Alle diejenigen Theile, welche unter dem Schleußenboden zu stehen kommen, mit Inbegriff dieses Bodens bilden das Grundwerk der Schleuße. Liegen zwei oder mehrere Schleußen dergestalt hinter einander, daß die unteren Ränder der Schleußenthore in derselben horizontalen Ebene mit den obern Rändern der folgenden Schleußenthore sich befinden, so heißen solche gekuppelte Schleußen, der zwischen je zwei derselben enthaltene Raum aber die Schleußenkammer.

842. Erklärung. Die Schleußenthore werden durch einen eisernen Riegel geschlossen: wird dieser beseitiget, so öffnen sich dieselben schon durch den Druck des Oberwassers, da dann die Schleußenkammer bei geschlossenen Thoren der folgenden Schleuße sich mit Wasser füllt. Dagegen geschieht das Aufziehen der gewöhnlichen Schützen z. B. beim Fluder einer Mühle, schon durch die Kraft eines Menschen, oder durch Anwendung eines einfachen Hebebaumes. Nur bei sehr hohen Wasserständen wird die hölzerne Schütze mit einer starken oben gezähnten eisernen Stange versehen, in welche ein Getriebe eingreift, welches durch ein Spillen- oder Tretrad bewegt wird. (Fig. 195.)

843. Aufgabe. Aus der Breite der Schütze, und der Höhe des Wasserstandes die erforderliche Dicke der Pfosten, aus welchen die Schütze zusammengefügt wird, zu bestimmen.

Auflösung. Heißt b die Breite der Schütze, h der Wasserstand, und x die Dicke der Pfosten; so hat man $x=0.024b\sqrt{h}$.

Beweis. Die vertikale Schütze stellt uns eine bewegliche Seitenwand eines Wasserbehälters vor, deren Breite b, Höhe h ist, auf welche sonach das Wasser einen Druck $\frac{1}{2}bh^2\gamma$ (818) ausübt; da aber der untere Theil der Schütze bei gleicher Höhe mit dem mittleren Theile einen doppelt so großen Druck zu erleiden hat, als dieser; so müßte man die Pfosten ihrer Dicke nach, von unten nach oben abnehmen lassen, welches wohl nicht angeht: man betrachtet daher die Sache so, als ob alle Theile der Schütze demjenigen Drucke unterworfen wären, welchen ihr unterer Theil auszuhalten hat, wodurch sich der Gesammtdruck der Schütze verdoppelt, oder zu $bh^2\gamma$

Digitized by Google

anwächst. Da nun diese Last auf die ganze Fläche der Schütze gleichförmig vertheilt ist, so ist hier in Hinsicht auf die Biegung der Pfosten derselbe Fall, als wenn blos $^5/_8$ dieser Last in ihrer Mitte angebracht wäre (257), dies gibt für die Größe der Last $^5/_8 bh^2\gamma$. Nach (262) ist aber, wenn eine Biegung von $^1/_4$ Zoll auf eine Klafter gestattet ist, das Tragungsvermögen eines vierkantigen Balkens $Q=\tau bh^3 : l$, wo beim Eichenholz $\tau=17608$ und im vorliegenden Falle statt b, h, l beziehungsweise h, x, b zu setzen kommt; man hat also das Tragungsvermögen der Schütze $Q=17608hx^3 : b$, und man kann setzen, um die Biegung der Pfosten zu beseitigen $Q=17608hx^3 : b^2$, ein Ausdruck der noch mit 144 zu multipliziren kommt, wenn die Abmessungen h, b nicht auf Zolle sondern auf Fuße sich beziehen. Man hat daher

$$^5/_8 bh^2\gamma = \frac{17608\times 144hx^3}{b^2}, \text{ woraus } x^3 = \frac{5b^3h\gamma}{8\times 17608\times 144} \text{ folgt.}$$

Die Berechnung des numerischen Koefizienten geschieht bequem mittelst Logarithmen so:

log.$^5/_8$=0.79588—1	log.17608=4.24571
log.56.4=1.75128	log.144=2.15836
Summe=1.54716	Summe=6.40407

log.17608×144=6.40407

Unterschied =0.14399—5=1.14309—6

der dritte Theil hievon beträgt 0.38103—2, und zu diesem Logarithmus gehört die Zahl 0.024045. Man hat also $x=0.024b\sqrt[3]{h}$.

844. Aufgabe. Ein Schleußenboden ist auf einen Pfahlrost befestigt, angenommen das Oberwasser habe sich unter den Schleußenboden gearbeitet, welche Gewalt wird es zur Heraushebung der Pfähle ausüben.

Auflösung. Stehen die Pfähle des Grundwerkes einer Schleuße a Fuß aus einander, und heißt H die Druckhöhe des Oberwassers, h die des Unterwassers, so wird jeder Pfahl mit einer Gewalt $Q=a^2(H-h)\gamma$ emporgehoben.

Beweis. Da die Pfähle um a Fuß aus einander stehen, so ist a^2 der Inhalt desjenigen Theiles vom Schleußenboden, welcher auf einem Pfahle gestützt wird, und weil $H-h$ die Druckhöhe des einwirkenden Wassers ist, so wird $Q=a^2(H-h)\gamma$ die Kraft bedeu-

Digitized by Google

ten, mit welcher der mit dem Schleußenboden fest verbundene Pfahl gehoben wird.

845. Aufgabe. Eine Schleußenkammer so weit mit Wasser anzufüllen, daß beide Schleußenthore gleichen Druck erleiden.

Auflösung. Stellt (Fig. 193) den vertikalen Längendurchschnitt einer Schleußenkammer vor, und es sind BC, NF die beiden Schleußenthore, AB der Oberwasserspiegel, CD der Unterwasserspiegel, MN der zu bestimmende Wasserspiegel in der Kammer, so sei $BG=a$, $GE=b$, $FC=c$, und $MG=x$; so findet man

$$x=-{}^1/_2 b+{}^1/_2\sqrt{(2a^2+2c^2-b^2)}.$$

Beweis. Man hat $NF=b+x$, und wenn B die Breite eines jeden Thores bedeutet, so ist der Druck gegen das Oberthor gleich $aB.{}^1/_2 a\gamma - xB.{}^1/_2 x\gamma = {}^1/_2 B\gamma(a^2-x^2)$, der Druck gegen das Unterthor gleich $(b+x)B.{}^1/_2(b+x)\gamma - cB.{}^1/_2 c\gamma = {}^1/_2 B\gamma[(b+x)^2-c^2]$.

Hienach ist die Bedingungsgleichung

$$a^2-x^2=(b+x)^2-c^2, \text{ und hieraus}$$
$$x={}^1/_2(-b+\sqrt{(2a^2+2c^2-b^2)}).$$

846. Aufgabe. Eine Schleußenmauer habe auf der Wasserseite eine Böschung von m Fuß, auf der Landseite hingegen eine von n Fuß, man frägt nach ihrer Dicke, um vom Druck des Wassers weder fortgeschoben noch umgeworfen zu werden.

Auflösung. Ist h die Höhe der Schleußenmauer, g das Gewicht eines Kubikfußes derselben, so ist gegen den Schub die erforderliche Dicke x

$$x=\frac{\gamma-\mu[(n+m)g+m\gamma]}{2\mu g}h \text{ und gegen das Umstürzen der Mauer}$$

$$x=\frac{h}{2g}[-(2n+m)g-m\gamma+\sqrt{\frac{[(4n^2-m^2)g^2+(4-2m^2)g\gamma+3m^2\gamma^2]}{3}}$$

Beweis. Der horizontale Wasserdruck für die Länge von einem Fuß beträgt ${}^1/_2\gamma h^2$, das Gewicht der Mauer aber

$$g({}^1/_2 nh^2+hx+{}^1/_2 mh^2)$$

der lothrechte Druck des Wassers ist endlich ${}^1/_2 mh^2\gamma$, folglich muß im Zustande des Gleichgewichts, wenn μ den Reibungskoeffizienten bedeutet ${}^1/_2\gamma h^2=\mu[{}^1/_2 nh^2 g+hxg+{}^1/_2 mh^2 g+{}^1/_2 mh^2\gamma]$ sein, woraus x wie oben folgt.

Ferner hat man das Moment des Wasserdrucks gleich ${}^1/_6 h^3\gamma$, das des Gewichts der Mauer

Digitized by Google

$$^1/_2nh^2.^2/_3nhg+h.xg(nh+^1/_2x)+^1/_2gmh^2(nh+x+^1/_3mh),$$

und das Moment des lothrechten Druckes des Wassers

$$^1/_2mh^2\gamma(nh+x+^2/_3mh),$$

folglich muß für das Gleichgewicht

$$^1/_6h^3\gamma=^1/_3n^2h^2g+nh^2gx+^1/_2hgx^2+^1/_2mnh^3g+^1/_2mh^2gx$$
$$+^1/_6m^2h^3g+^1/_2mnh^3\gamma+^1/_2mh^2\gamma x+^1/_3m^2h^3\gamma \text{ sein.}$$

Wird diese Gleichung nach x geordnet, so folgt

$$x^2+\frac{h}{g}((2n+m)g+m\gamma).x+^2/_3n^2h+mnh^2+^1/_3m^2h^2$$
$$+h^2\gamma(mn+^2/_3m^2-^1/_2):g$$

woraus sich bei gehöriger Reduktion x wie oben ergibt.

847. **Folgesatz.** Ist die Mauer ein rechtwinkliges Parallelopiped also $m=n=o$, so wird gegen den Schub

$$x=\frac{\gamma h}{2\mu g}, \text{ und gegen das Umwerfen } x=h\sqrt{\frac{\gamma}{3g}}.$$

848. **Erklärung.** Die Fortleitung des Wassers von einem höher gelegenen Orte an einen andern tiefer liegenden wird durch ein System wasserdicht mit einander verbundenen Röhren von Gußeisen, Blei oder Holz bewirkt. Eine solche Anordnung heißt eine **Wasserleitung.** (Fig. 196). Die gewöhnliche Konstruktion gußeiserner Röhren ist in der Fig. 197 verzeichnet: dieselbe besteht nämlich aus einem Röhrenstücke von 4 bis 6 Fuß Länge und einem angegossenen sogenannten Stutzel von größerem Durchmesser, in welchen das nächste Röhrenstück eingeschoben, und durch Hanf mit heißem Pech übergossen und in den übrigen Zwischenräumen rings herum eingedrückt, verkeilt und wasserdicht verbunden wird. Die Verbindung mehrerer derlei Röhren ersieht man aus (Fig. 198.)

849. **Lehrsatz.** Die Stärken gleichartiger Röhren verhalten sich wie die Produkte ihrer lichten Halbmesser in die Druckhöhen des Wassers.

Beweis. Ein mit dem Halbmesser $AC=r$ (Fig. 199) beschriebener Kreis stelle uns den Querdurchschnitt einer Wasserleitungsröhre vor, sei H die vertikale Erhöhung des Behälters, aus welchem diesem Querschnitte Wasser zugeführt wird, welches auf alle Punkte der Peripherie senkrecht drücken wird, und es kann in Folge dieses Gesammt-

Digitized by Google

druckes die Röhre berſten, wenn ſie nicht eine hinreichende Feſtigkeit beſitzt, welche eben in der Dicke ihrer Wände beſteht. Dieſes Zerſpringen der Röhre erfolgt aber unter gleichen Umſtänden immer an zwei Stellen, die einen Bogen einſchließen, welcher den größten Druck erleidet, die nämlich Endpunkte eines Durchmeſſers vom Kreiſe ſind: ſeien A und B dieſe Stellen, man nehme den Durchmeſſer AB zur Abſziſſenare, und den Mittelpunkt des Kreiſes zum Anfangspunkte. Sei R die Kraft, welche auf das Element $Mm=ds$ der Kreisperipherie nach der Richtung MN drückt; ſo iſt $R=H\gamma ds$, wenn γ das Gewicht eines Wiener Kubikfußes Waſſer bedeutet: man bezeichne den Winkel ACM mit α, und zerlege die Kraft R in zwei Seitenkräfte, deren eine dem Durchmeſſer AB parallel, die andere darauf ſenkrecht wäre; ſo geht die erſtere $R\cos\alpha$ verloren, während die letztere $R\sin\alpha$ das Zerreißen der Röhre allein bewirkt. Zieht man an den Punkt M die Tangente MD und bezeichnet den Winkel MDC, den dieſe Berührende mit der Abſziſſenare bildet mit v, ſo iſt $v=90^0-\alpha$, alſo $\sin\alpha=\cos v=dx:ds$ (A. 1232); hiernach erhält man die Kraft, welche der Waſſerdruck auf das Element $Mm=ds$ ausübt, gleich $R\sin\alpha=Rdx:ds=H\gamma dx$: wird dieſer Ausdruck integrirt und von $x=-r$ bis $x=r$ genommen; ſo ergibt ſich der Geſammtdruck des Waſſers auf die Röhre $Q=4Hyr$. Iſt aber bei einer anderen Röhre H' die Druckhöhe, r' der Halbmeſſer; ſo folgt eben ſo der Druck $Q'=4H'\gamma r'$, dies gibt

$$Q:Q'=Hr:H'r'$$

und dieſen Drückungen Q, Q' müſſen natürlich die Stärken gleichartiger Röhren angemeſſen ſein.

850. **Folgeſatz.** Sei f die Fläche, welche einen Druck P für die Dauer auszuhalten vermag, und x die Dicke der Röhre aus gleicher Materie, die einem Waſſerdrucke H ausgeſetzt iſt; ſo folgt weil die zu zerreißende Fläche $2x$ iſt $f:P=2x:4H\gamma r$: dieß gibt

$$x=\frac{2fH\gamma r}{P}=\frac{f\gamma Hd}{P}$$

wenn $2r=d$ geſetzt wird.

851. **Anmerkung.** Da ein W. Quadratzoll Gußeiſen beiläufig von 162 Ctr. zerriſſen wird, mithin den dritten Theil dieſes Gewichtes

Digitized by Google

oder 5400 Pfunde für die Dauer tragen kann; so setze man $f=1:144$ $P=5400$, und bringe den in Fußen ausgedrückten Durchmesser d der Röhre auf Zolle, so erhält man für x in W. Linien

$$x=\frac{56.4Hd}{5400.12}=\frac{Hd}{1149}$$

wo H in Fußen, d in Zollen angegeben ist. Da aber das Gußeisen bei der gewöhnlichen einmaligen Schmelzung nicht immer hinlänglich rein ausfällt, da nebstdem die Röhren in Sand geformt bei wiederholtem Gebrauche derselben Formtruhen, wegen Versetzung des Kernes, nicht immer die gleiche Dicke erhalten, so kann man die Stärke gußeiserner Röhren auf $x=0.001\times Hd$ vergrößern, wobei zu bemerken ist, daß ihre Stärke wegen den angeführten Mängeln des Gußes wenigstens mit 4 Linien anzunehmen ist, im Falle sie auch die Formel geringer angibt. Uebrigens versteht sich von selbst, daß eine jede Röhre vor ihrem Gebrauche auf den drei- bis vierfachen Druck geprüft werden muß, um sich zu überzeugen, ob keine Fehler im Guße vorhanden sind.

Da nach Musschenbröck Blei im Querschnitte eines W. Quadratzolles von 3326 W. Pfund zerrissen wird, also einen Druck von 831 Pfund für die Dauer zu tragen im Stande sein wird, so erhält man für x in Linien, d in Zollen, H in Fußen

$$x=\frac{Hd}{176}$$ wofür man ohne Bedenken $x=\frac{Hd}{150}$

annehmen kann. Gerstner nimmt die Stärke dieser zwei Gattungen von Röhren offenbar zu groß an, und vermehrt ohne Noth die Anlagskosten einer Röhrenleitung; er setzt beziehungsweise für jene

$$x=\frac{Hd}{659}+4.56,\text{ für diese }x=\frac{Hd}{92}+2.05$$

852. Aufgabe. Aus der Länge der Röhrenleitung der Dicke und dem Durchmesser der Röhren, das Gewicht des erforderlichen Materiales zu berechnen.

Auflösung. Heißt l die Länge einer einzelnen Röhre, d ihr Durchmesser im Lichten, l' die Länge des Stutzels, $L=nl$ die Länge der ganzen Röhrenleitung und x die erforderliche Dicke, so ist das Gewicht des Gußeisens für die Wasserleitung

$$G=\tfrac{1}{4}\varsigma\pi x[l(d+x)+l'(d+0.5+3x)].$$

Digitized by Google

Beweis. Der Querschnitt der Röhre ist ein Kreisring, dessen Durchmesser $d+2x$ und d sind, es ist also

$$^1/_4\pi[(d+2x)^2-d^2]=\pi x(d+x)$$

dessen Inhalt, wird dieser mit l multiplizirt, so ergibt sich $\pi x(d+x)l$ zum Inhalt der Röhre. Weil ferner der Stutzel für die Verstopfung mit Hanf ringsum einen Spielraum über die Röhre von 3 Linien hat, so ist der Querschnitt des Stutzels ein Kreisring mit den Durchmessern $d+0.5+4x$ und $d+0.5+2x$, daher dessen Inhalt gleich $\pi x(d+0.5+3x)$, und der Inhalt des röhrenförmigen Stutzels $\pi x(d+0.5+3x)l'$. Da nun ein Kubikzoll Gußeisen $^1/_4$ W. Pfund wiegt, so ergibt sich das Gewicht einer einzelnen Röhre sammt dem Stutzel

$$^1/_4\pi x[l(d+x)+l'(d+0.5+3x)]$$

und dieses $n$mal genommen liefert das erforderliche Gewicht des Gußeisens für die Röhrenleitung von der Länge L.

853. Anmerkung. Mehrere Aufgaben über diesen Gegenstand findet man in

D. C. L. Lehmus Lehrbuch der angewandten Mathematik. Band III. Berlin 1822, ferner in dessen Lehrbuch der reinen und angewandten Mathematik. Band III. Berlin 1827, und in den schon (33) angeführten Werken von Eytelwein und *Navier*.

III. Gleichgewicht der in Flüssigkeiten eingetauchten Körper.

854. Lehrsatz. Wird ein fester Körper in Wasser eingesenkt, so verliert er so viel an seinem Gewichte, als das Wasser unter dem Inhalte des eingetauchten Körpers wiegt.

Beweis. Sei AMB (Fig. 200) ein Körper von beliebiger Gestalt, welcher in eine Flüssigkeit eingesenkt ist, deren Wasserspiegel zur Ebene xy angenommen wird, und wobei die Axe der z vertikal abwärts läuft: es sei s die Fläche eines Elements M der Oberfläche desselben, dessen Lage im Inneren der Flüssigkeit mittelst der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z bestimmt wird, und p der auf die Flächeneinheit bezogene Druck der Flüssigkeit auf die Fläche des Elements, der für alle Punkte, welche gleich tief unter der Oberfläche der Flüssigkeit liegen,

Digitized by Google

ungeändert bleibt; so ist ps der Druck, welchen das Element s nach der Richtung der Normale seiner Oberfläche erleidet. Bezeichnet man mit α, β, γ die Winkel der Normale des Punktes M mit den Axen des x, y, z; so sind

$$ps\cos\alpha,\ ps\cos\beta,\ ps\cos\gamma$$

die nach diesen Axen gerichteten Seitenkräfte jenes Druckes ps: projizirt man nun das Element s auf die drei koordonirten Ebenen, und bezeichnet die Projektionen auf die vertikalen Ebenen yz und xz mit a und b, und die Projektion auf die horizontale Ebene xy mit c; so ist nach (A. 1582)

$$a = s\cos\alpha,\ b = s\cos\beta,\ c = s\cos\gamma,$$

multiplizirt man diese Gleichungen mit p, so folgt

$$pa = ps\cos\alpha,\ pb = ps\cos\beta,\ pc = ps\cos\gamma:$$

woraus hervorgeht, daß die Produkte pa, pb, pc die Seitenpressungen des Druckes vorstellen, welche das Element s nach der Richtung der Normale zu erleiden hat.

Bekanntlich wird die Projektion einer Fläche auf irgend eine Ebene dadurch gebildet, daß man von jedem Punkte der Fläche Perpendikel auf die Ebene fällt, und dadurch einen Cylinder erzeugt, dessen beide im Allgemeinen nicht parallele, Grundflächen einerseits die Projektion andererseits die projizirte Fläche sind. Denkt man sich nun den Cylinder, welcher die Fläche des Elements s und dessen Projektion a zu Grundflächen hat, durch die Masse des Körpers verlängert, so begrenzt er auf der Gegenseite des Körpers auf seiner Oberfläche ein Element s', welches mit dem Elemente s die Projection a gemeinschaftlich besitzt. Da aber beide Elemente s und s' der Oberfläche des Körpers gleich tief unter dem Wasserspiegel sich befinden; so wird der zur Axe der x parallele Druck auf das Element s' gleichfalls pa sein, und daher sich mit dem gleich großen Drucke auf das Element s aufheben. Und eben so erhellet, daß der Druck in der Richtung, welche der Axe der y parallel ist, auf die an den Gegenseiten des Körpers gelegenen Elementen s und s'', welche dieselbe Projektion b auf die Ebene xz besitzen, sich gegenseitig aufhebt. Da dieselben Schlüsse sich über alle Elemente der Oberfläche des Körpers anstellen lassen, so ist klar, daß die horizontalen Seitenpressungen, welche auf die Elemente der Oberfläche des eingetauch-

Digitized by Google

Körpers ausgeübt werden, sich in jeder horizontalen Schichte des Körpers und also auch auf der ganzen Oberfläche aufheben.

Verlängert man die Geraden, welche die horizontale Projektion c des Elements s begrenzen, durch die Masse des Körpers abwärts, so schließen sie daselbst ein Element s''' ein, dessen Projection auf die Ebene xy gleichfalls c ist: allein die auf die Einheit der Oberfläche bezogenen Pressungen sind bei denselben ungleich, und wenn man sie durch p und p_1 bezeichnet, so wird der Theil des Körpers, der durch diese zwei Elemente begrenzt wird und dessen Länge MN ist, von unten nach oben vertikal durch eine Kraft p_1c-pc getrieben: ist nun γ das Gewicht der kubischen Einheit der Flüssigkeit und l die Länge von MN, so hat man $p_1-p=\gamma l$, und der vertikale Druck γlc wird das Gewicht des Volumens lc des Wassers sein, dessen Raum dieser Theil des Körpers einnimmt. Zerlegt man den Körper in vertikale unendlich dünne Streifen, so wird jeder derselben von unten nach oben durch eine Kraft getrieben, welche dem Gewichte einer Wassersäule gleich kommt, deren Basis der Querschnitt des Streifens und deren Höhe dem Abstande der beiden ihn begrenzenden Flächenelemente ist. Demnach ist auch die Summe der vertikalen Pressungen von unten nach oben auf die Oberfläche des Körpers dem Gewichte des Wassers unter dem Inhalte des eingetauchten Körpers gleich.

855. **Folgesatz.** Wäre der Körper nicht ganz in die Flüssigkeit getaucht, so könnte man bei der Berechnung des Druckes, den er erfährt, von dem über dem Wasserspiegel liegenden Theile des Körpers abstrahiren, der Punkt M gehörte dann zu dem Schnitte des Körpers mit der erweiterten Ebene des Wasserspiegels, und wenn man $p=o$ setzte, so würde die Resultirende der vertikalen Pressungen noch immer dem Gewichte des Wassers unter dem Volum des eingetauchten Theiles gleich werden.

856. **Erklärung.** Die Kraft, welche einen in Wasser eingetauchten Körper aufwärts treibt, nennt man den **Auftrieb**: der Angriffspunkt dieser Kraft ist der Schwerpunkt des unter dem eingetauchten Theile enthaltenen Volum des Körpers. Man sagt ein Körper **schwimmt**, wenn der Körper bloß theilweise im Wasser einsinkt. Wird der Wasserspiegel durch die Masse des schwimmenden Körpers erwei-

Digitized by Google

tert, so heißt die Durchschnittsebene die Schwimmebene des Körpers: wird hierbei der Körper durch eine äußere Kraft ein wenig gedreht, so ändert sich die Schwimmebene des Körpers, und die Durchschnittslinie beider Schwimmebenen heißt die Schwimmaxe desselben.

857. Folgesatz. Der Schwerpunkt des Körpers und der Schwerpunkt des von demselben verdrängten Wassers fallen nur dann überein, wenn der Körper gleichartig ist, und ganz im Wasser einsinkt: in jedem anderen Falle liegen beide Schwerpunkte aus einander.

858. Folgesatz 2. Soll ein fester schwimmender Körper mit dem umgebenden Wasser in Ruhe sein, so muß der Schwerpunkt des ganzen Körpers und der des verdrängten Wassers in einer vertikalen Linie sich befinden.

859. Anmerkung. Auf der Eigenschaft der in Wasser eingesenkten Körper, daß sie so viel an Gewicht verlieren, als das Gewicht des durch den eingetauchten Theil verdrängten Wassers beträgt, gründet sich das Verfahren, große Lasten mittelst Schiffe aus dem Grunde des Meeres zu erheben, gesunkene Brückenbögen zu erhöhen, oder ihre Schlußsteine auszuheben. Im ersten Falle füllt man ein Schiff, so viel es angeht, ohne daß es versinkt, mit Wasser und läßt den zu hebenden Gegenstand von Tauchern vermittelst Ketten an das Schiff befestigen: entleert man dann dieses vom Wasser, so wird es sofort mit einer Kraft $56.4\ K-Q$ in die Höhe steigen, wenn K den Kubikinhalt des im Wasser befindlichen Schiffsraumes und Q die Last des zu hebenden Gegenstandes bezeichnet: hiedurch wird derselbe aus dem Grundbette gehoben, welches die Hauptsache ist, da es dann keine Schwierigkeiten hat vermittelst Flaschenzüge und Winden ihn an die Oberfläche des Wassers zu heben. Im zweiten Falle, stellt man das Schiff unter den gesunkenen Brückenbogen, errichtet darauf ein Gerüste bis dicht an den Brückenbogen, füllt das Schiff soweit mit Wasser, daß es nicht versinkt, erhöhet die Gerüste bis es abermals an den Brückenbogen reicht; so muß beim Ausschöpfen des Wassers der Bogen allmälig gehoben werden. Die Kraft nämlich, welche den Brückenbogen aufwärts treibt, ist der Unterschied zwischen den Auftrieben des beinahe vollen und des fast unbelasteten Schiffes, und kann allerdings nach der Größe des Schiffskieles zu einem ansehnlichen Werthe gesteigert werden. Natürlich wird, um des Guten nicht zu viel zu thun, mit dem Ausschöpfen

Digitized by Google

des Wassers inne gehalten, sobald der gesunkene Brückenbogen seine ursprüngliche Gestalt wieder erlangt hat.

860. Aufgabe. Ein Floß wird mit einer gegebenen Last beladen, man sucht die Tiefe seines Einsinkens im Wasser.

Auflösung. Heißen A, B die Abmessungen der oberen Oeffnung und a, b die Abmessungen der Schwimmebene des unbelasteten Floßes, h ihren vertikalen Abstand von einander, Q die Ladung und x die Größe des Einsinkens d. i. der Abstand der beiden Schwimmebenen beim belasteten und nicht belasteten Floße; so findet man x durch Auflösung der kubischen Gleichung

$$x^3+\frac{[a(B-b)+b(A-a)]3hx^2}{2(A-a)(B-b)}+\frac{3abh^2x}{(A-a)(B-b)}-\frac{3h^2Q}{\gamma(A-a)(B-b)}=o$$

Beweis. Sei $ACdb$ (Fig 201) ein Floß, wie sie hier zu Lande gewöhnlich sind, AC sei der obere offene Theil desselben, ac die Schwimmebene des unbelasteten Floßes, und nachdem es eine Ladung Q erhalten hat, sinke es bis zur Schwimmebene $A'C'$. Man setze die Länge des Floßes $AB=A$, die Breite $BC=B$, ferner $ab=a$, $bc=b$, den vertikalen Abstand beider Ebenen AC, ac gleich h, und den Inhalt des zwischen ihnen enthaltenen Floßkörpers $=V$, so ist nach (A. 1710)

$$V=\tfrac{1}{6}h[b(A+2a)+B(2A+a)].$$

Sind nun die Abmessungen für die Schwimmebene $A'C'$, nämlich $A'B'=\alpha$, $B'C'=\beta$, x der Abstand beider Schwimmebenen $A'C'$ und ac, und v der Inhalt des Floßkörpers zwischen ihnen, so hat man analog, wenn man statt A,B,h beziehungsweise α, β, x setzt,

$$v=\tfrac{1}{6}x[b(\alpha+2a)+\beta(2\alpha+a)].$$

Schneidet man das Floß mit einer vertikalen Ebene Mn quer durch desselben Breite, und fällt vom Punkte m aus, das Perpendikel mH, so wird $M'H'$ der Durchschnitt der oberen Schwimmebene mit der Ebene Mn sein, und man hat in den ähnlichen Dreiecken mHM, $mH'M'$ die Proportion

Digitized by Google

$$\begin{matrix} mH \\ h \end{matrix} : \begin{matrix} mH' \\ x \end{matrix} = \begin{matrix} MH \\ \frac{1}{2}(B-b) \end{matrix} : \begin{matrix} M'H_1 \\ \frac{1}{2}(\beta-b) \end{matrix}, \text{ oder}$$

$$h : x = B-b : \beta-b,$$

eben so ergibt sich, wenn man das Floß mit einer vertikalen Ebene nach dessen Länge schneidet

$$h : x = A-a : \alpha-a$$

aus diesen Proportionen erhält man

$$\beta = \frac{x(B-b)}{h} + b, \quad \alpha = \frac{x(A-a)}{h} + a$$

hiemit wird

$$\alpha + 2a = \frac{x(A-a)}{h} + 3a, \quad b(\alpha+2a) = \frac{bx(A-a)}{h} + 3ab$$

$$2\alpha + a = \frac{2x(A-a)}{h} + 3a, \text{ und}$$

$$\beta(2\alpha+a) = \frac{2x^2(A-a)(B-b)}{h^2} + \frac{[2b(A-a)+3a(B-b)]}{h} + 3ab$$

Bei Substitution dieser Werthe erhält man

$$v = \frac{x^3(A-a)(B-b)}{3h^2} + x^2\frac{[b(A-a)+a(B-b)]}{2b} + abx$$

heißt nun Q die Ladung, so hat man $\gamma v = Q$; setzt man diesen Werth statt v, und ordnet die Gleichung nach x, so erhält man sofort die oben angegebene kubische Gleichung. Sei z. B. $A=24'$, $B=9'$, $a=20'$, $b=7'$, $h=3'$, $Q=17425$ Pfunde, so ergibt sich die Gleichung

$$x^3 + \frac{153x^2}{4} + \frac{945x}{2} - 1042.72 = o,$$

aus welcher man $x=1'.9=22''.8$ findet.

861. *Folgesatz.* Wenn in einem besonderen Falle $a : A = b : B$ ist, oder wenn die beiden Ebenen AC und ac ähnliche Rechtecke vorstellen, so hat man

Digitized by Google

$$B=\frac{Ab}{a},\quad B-b=\frac{b(A-a)}{a}$$

und hiemit verwandelt sich die Gleichung für x in

$$x^3+\frac{3ahx^2}{A-a}+\frac{3a^2h^2x}{(A-a)^2}-\frac{3ah^2Q}{\gamma(A-a)^2b}=o,$$

welche sich nach (A. 523) ganz allgemein auflösen läßt, man findet

$$x=-\frac{ah}{A-a}+\sqrt[3]{\left[\frac{a^3h^3}{(A-a)^3}+\frac{3ah^2Q}{\gamma(A-a)^2b}\right]}$$

Ist aber in (860) bloß $B=b$, oder sind die Querschnitte nach der Breite des Floßes Rechtecke, so findet man, indem zuvor Alles mit $B-b$ multiplizirt, und dann $B=b$ gesetzt wird, die quadratische Gleichung

$$x^2+\frac{2ahx}{A-a}-\frac{2hP}{\gamma b(A-a)}=o,$$

welche $x=-\frac{ah}{A-a}+\sqrt{\left[\left(\frac{ah}{A-a}\right)^2+\frac{2hP}{\gamma b(A-a)}\right]}$ liefert.

862. Anmerkung. In der Anwendung kann man sich die Auflösung der kubischen Gleichung (860) ersparen, wenn man bei einem Floße von gegebenen Abmessungen, für die Werthe von x die zwischen $0'.5$ und $2'.5$ gelegen sind, die Ladung $Q=\gamma v$ nach der Formel

$$Q=\frac{\gamma x^3(A-a)(B-b)}{3h^2}+\gamma x^2\,\frac{[b(A-a)+a(B-b)]}{2h}+\gamma abx$$

zum voraus berechnet, und sodann an einer am Floße senkrecht befestigten Skale, die den verschiedenen Werthen von x zugehörigen Ladungen Q bemerkt, wodurch sich in vorkommenden Fällen das Abwägen der Ladung eben dieses Floßes umgehen läßt: nur muß Sorge getragen werden, daß die Ladung auf der ganzen Fläche des Floßes, oder doch ringsum seiner Mitte gleichförmig vertheilt wird, welches man daran erkennt, daß die am Floße befestigte Skala ihre vertikale Stellung beibehält. Bei den Abmessungen im obigen Beispiele erhält man die Gleichung

Digitized by Google

$$16.71x^3+639.2x^2+7896x=Q.$$

Frägt man z. B. bei welcher Ladung das Floß um 1 Fuß sinkt, so ist hier $x=1$, und man findet
$Q=16.7+639.2+7896=8552$ Pfunde, und eben so ergibt sich für $x=2$, $Q=133.7+2556.8+15792=18482.5$ Pfunde.

Ist die Skale von Hundertel zu Hundertel Fuß abgetheilt, so wird die Rechnung einzelner Glieder durch Logarithmen bequem geführt; hier hat man die Logarithmen der konstanten Koeffizienten, nämlich

log. 16.71=1.22301, log. 639.2=280564, log. 7896=3.89741.

Sei z. B. die Ladung zu bestimmen, welche das Floß um 2′.47 einsenkt; so hat man $x=2.47$, log. $x=0.39270$, log. $x^2=0.78539$ log. $x^3=1.17809$; mithin

1.22301	2.80564	3.89741
1.17809	0.78539	0.39270
2.40110	3.59103	4.29011

und diesen Logarithmen entsprechen die Zahlen 251.8, 3899.7, 19503.5 deren Summe $Q=23655$ Pfunde gibt.

863. Erklärung. Eine solche Skale, welche zu beiden Seiten des Schiffes so angebracht ist, daß der Punkt, bis zu welchem das Schiff einsinkt, das Gewicht der jedesmal vorhandenen Ladung angibt, heißt eine Schiffsaiche. Sie ist auf vielen Flüssen, wo eine wohlgeordnete Schiffahrt Statt findet, z. B. auf dem Rhein, gesetzlich eingeführt, weil man, im Falle einerlei Güter z. B. Getreide die Ladung des Schiffes ausmachen, den sich nach dem Gewichte der Güter richtenden Zoll ohne Aufenthalt bestimmen kann.

864. Erklärung. Schiffe, welche zur Verführung der Güter und Waaren auf den Flüssen verwendet werden, nennt man Lastschiffe. Da die Flüsse stellenweise sehr seicht sind, so werden solche Lastschiffe gewöhnlich so flach gebaut, daß sie nicht über 18 Zolle im Wasser einsinken, bei welchen man daher dasjenige auf der Breite ersetzt, was ihnen an Tiefe abgeht. Die auf der Moldau, Elbe und dem Rhein gebräuchliche Form dieser Schiffe ist (Fig. 202) im Längendurchschnitte und (Fig. 203) im Grundrisse abgebildet. Sie besteht aus einem

Digitized by Google

länglichten Parallelopiped $BCED$ (Fig. 202) das sich zu beiden Seiten in spitzige einander gleiche Schnäbel ABC, DEF endiget.

865. Aufgabe. Die Tragfähigkeit eines Lastschiffes vom gegebenen Gewichte und bekannten Abmessungen zu bestimmen.

Auflösung. Ist in (Fig. 202) die Länge des mittleren Körpers $BD=l$, dessen Breite $B'G=b$, Höhe $BC=h$, die Länge des Schnabels $AB=a$, und P das Gewicht des Floßes; so hat man dessen größte Belastung $Q=bh\gamma(^2/_3a+l)-P$.

Beweis. Es sei $KC=x$ die Tiefe, bis zu welchem das Schiff bei einer Ladung P eingesunken ist: der Kubikinhalt des eingetauchten Theiles besteht aus dem Prismen dessen Querdurchschnitt $KCEK'$ ist und zwei dreiseitigen Prisma mit nicht parallelen Grundflächen, deren Querschnitt das Dreieck MKC bildet, und deren drei Kanten β, b, b sind, wenn $M'N=\beta$ gesetzt wird; man hat daher den Kubikinhalt des ersteren $= lbx$, und den der beiden anderen $2\frac{(\beta+2b)}{3}\cdot\frac{x(a-\alpha)}{2}$, wenn $MK=\alpha$ ist. Es ist aber in den Dreiecken ABC, $A'B'G$, $a:h=a-\alpha:x$, und $\beta:b=\alpha:a$ hieraus folgt

$$\alpha=a\left(1-\frac{x}{h}\right),\ \beta=b\left(1-\frac{x}{h}\right),\ \text{somit}\ a-\alpha=\frac{ax}{h},\ \text{und}$$

$$\frac{\beta+2b}{3}=b\left(1-\frac{x}{3h}\right);$$

man erhält für den Kubikinhalt des eingetauchten Theiles den Ausdruck

$$bx\left[\left(1-\frac{x}{3h}\right)\frac{ax}{h}+l\right]$$

wird dieses mit γ multiplizirt, so folgt

$$Q=bx\gamma\left[\left(1-\frac{x}{3h}\right)\frac{ax}{h}+l\right]-P,\ \text{und für}\ x=h\ \text{wird}\ Q\ \text{wie oben.}$$

866. Folgesatz. Schreibt man hier überall $^1/_{12}x$ statt x und $^1/_{12}h$ statt h, so ergibt sich, wenn x und h in Zollen, a, b und l in Fußen ausgedrückt wird, die Gleichung

Digitized by Google

$$P+Q=b\gamma\left(\frac{ax^2}{12h}-\frac{ax^3}{36h^2}+\frac{lx}{12}\right)$$

und hieraus folgt die Tiefe x der Einsenkung in Zollen bei einer gegebenen Belastung Q durch Auflösung der kubischen Gleichung

$$x^3-3hx^2-\frac{3lh^2x}{a}+\frac{36h^2(P+Q)}{ab\gamma}=o$$

Ist z. B. $P=12592$, $Q=20466$, $a=12'$, $b=12'$, $l=48'$, $h=48''$; so findet man $x=11''.57$.

867. Anmerkung. Hat man die Tiefe der Einsenkung des unbelasteten Schiffes, in welchem nur die zu seiner Leitung erforderlichen Geräthschaften und Menschen befindlich sind, beobachtet, so muß der Nullpunkt der Skale an diesen Punkt versetzt werden. Ist dann y die Erhöhung des Nullpunktes in Zollen über den Boden des Schiffes, so hat man dessen Gewicht

$$P=b\gamma\left(\frac{ay^2}{12h}-\frac{ay^3}{36h^2}+\frac{ly}{12}\right)$$

Weiset nun bei einer Ladung Q die Skale auf x Zoll, so folgt

$$Q=b\gamma\left[\frac{a(x+y)^2}{12h}-\frac{a(x+y)^3}{36h^2}+\frac{l(x+y)}{12}\right]-P$$

Im eben angeführten Beispiele ist $y=4''.57$, $x=7''$, woraus sich P und Q wie dort ergeben, und zwar mittelst der speziellen Gleichung: $Q=1.14922(x+y)^2-8.99086(x+y)^3+3.43252(x+y)-P$ wo die numerischen Koeffizienten durch ihre Logarithmen ersetzt erscheinen.

868. Aufgabe. Ein halbes hohles Ellipsoid von gegebenen Abmessungen werde in Wasser so gesenkt, daß eine ihrer drei Hauptaxen vertikal wird, man frägt nach der Tiefe des Einsinkens, wenn dessen Dicke und Dichtigkeit bekannt sind.

Auflösung. Heißen a, b, c die drei Halbaxen des Ellipsoides, und c diejenige, welche beim Schwimmen des Ellipsoides vertikal ist, sind ferner a', b', c' die Halbaxen der inneren Fläche desselben, so findet man den Abstand u der Schwimmebene von der Ebene xy nach der Gleichung:

Digitized by Google

$$u^3-3c^2u-2c^3(r-1)+\frac{2rc^2a'b'c'}{ab}=o,$$

wo γ' das Gewicht eines W. Kubikfußes des festen Stoffes vorstellt, aus welchem das Ellipsoid gebildet wurde und $r=\gamma':\gamma$ bedeutet.

Beweis. Sei u der Abstand der erweiterten Schwimmebene von der Ebene xy, sei ferner Z irgend ein horizontaler Querschnitt des Ellipsoids, welcher in der Entfernung z von der Schwimmebene geführt ist, also $\int Zdz$ der Inhalt desjenigen Stückes dieses Ellipsoides, der zwischen Z und der Ebene xy liegt; wird dieses Integral von $z=o$ bis $z=u$ genommen, so erhält man den Inhalt des Ellipsoides zwischen der Schwimmebene und der Ebene xy, und dieses von dem Inhalte des halben Ellipsoides oder von $^2/_3abc$ abgezogen, gibt den Inhalt I des eingetauchten Theiles. Man hat also $I=^2/_3\pi abc-\int Zdz$: allein es ist

$$Z=\frac{\pi ab}{c^2}(c^2-z^2),\text{ also }\int Zdz=\frac{\pi ab}{3c^2}(3c^2u-u^3),\text{ hiedurch wird}$$

$$I=^2/_3\pi abc-\frac{\pi ab}{3c^2}(3c^2u-u^3).$$

Sind nun a', b', c' die Halbaxen des inneren hohlen Ellipsoides und γ' das Gewicht eines Kubikfußes desselben, so ist das Gewicht des zwischen beiden elliptoidischen Flächen enthaltenen Körpers

$$^2/_3\pi\gamma'(abc-a'b'c');$$

man hat sonach die Gleichung

$$^2/_3\pi\gamma'abc-\frac{\pi ab\gamma}{3c^2}(3c^2u-u^3)=^2/_3\pi\gamma'\,(abc-a'b'c'),$$

welche sofort durch $^2/_3\pi ab:c^2$ abgekürzt gibt

$$u^3-3c^2u-2c^3(r-1)+2r\frac{c^2a'b'c'}{ab}=o$$

869. **Folgesatz.** Wird aber das halbe Ellipsoid noch mit einer Ladung Q belastet, so ist dann, wenn der Abstand der Schwimmebene mit v bezeichnet wird

$$v^3-3c^2v-2c^3(r-1)+\frac{2rc^2a'b'c'}{ab}+\frac{Q}{ab}=o$$

Digitized by Google

Der Unterschied beider Gleichungen gibt

$$v^3-u^3-3c^2(v-u)+(Q:ab)=o \text{ oder}$$
$$v^3-3c^2v-u(u^2-3c^2)+(Q:ab)=o$$

870. Folgesatz. 2. Ist das halbe Ellipsoid massiv, dann hat man $a'=b'=c'=o$, $Q=o$, und man erhält den Abstand der Schwimmebene aus der Gleichung

$$u^3-3c^2u-2c^3(r-1)=o.$$

Ist nebstdem $r=1$, so wird $u^3-3c^2=o$, oder $u=-c\sqrt{3}$ eine Gleichung, welche anzeigt, daß das Ellipsoid ganz einsinkt, und die Ebene xy um die Größe $c\sqrt{3}$ tiefer als der Wasserspiegel liegt. Ist aber $r=o$, so hat die Gleichung $u^3-3c^2u+2c^3=o$, offenbar eine Wurzel $u=c$, d. h. das Ellipsoid wird ganz außer dem Wasser stehen.

IV. Das Metacentrum.

871. Erklärung. Wenn ein schwimmender Körper mit dem ihn umgebenden Wasser in Ruhe sich befindet, so heißt dann der durch die Masse des Körpers erweiterte Wasserspiegel eine Lage des Gleichgewichts.

872. Folgesatz. Da bei einem homogenen Kreiscylinder dessen Axe horizontal liegt, sowohl der Schwerpunkt des Körpers als auch der Schwerpunkt des verdrängten Wassers eine unveränderliche Lage erhalten, mit welcher Seite seiner krummen Oberfläche er auch einsinkt; so folgt daß es unzählige Lagen des Gleichgewichts bei einem homogenen Kreiscylinder gibt, sobald dessen Axe horizontal ist.

873. Erklärung. Unter Stabilität eines schwimmenden ruhenden Körpers, versteht man das Bestreben desselben, in diese Lage des Gleichgewichts wieder zurückzukehren, wenn er durch irgend eine äußere Kraft sehr wenig aus dieser Lage versetzt worden ist; und eine mit dieser Eigenschaft begabte Lage heißt stabil, im Gegentheile aber, wenn bei der geringsten Versetzung eines Körpers aus einer Lage des Gleichgewichts, sobald er sich selbst überlassen wird, der Körper nicht mehr in dieselbe zurückkehrt, so heißt eine solche Lage labil.

Digitized by Google

874. **Erklärung.** Zieht man bei einer Lage des Gleichgewichts eines schwimmenden Körpers eine lothrechte Gerade durch den Schwerpunkt des Körpers, und bei seiner sehr wenig geänderten Stellung eine Vertikale durch den Schwerpunkt des verdrängten Wassers; so schneiden sich beide lothrechte Geraden in einem Punkte, welcher das **Metacentrum** heißt.

875. **Lehrsatz.** Ein Körper hat nur dann eine stabile Lage, wenn sein Schwerpunkt unter dem Metacentrum befindlich ist.

Beweis. Sei ADB (Fig. 204) ein Körper von beliebiger Gestalt, AB eine Lage des Gleichgewichts, CD die durch den Schwerpunkt G gezogene Vertikale, in welcher auch der Schwerpunkt F des verdrängten Wassers gelegen ist (858). Sei erstlich der Schwerpunkt des Körpers tiefer als der des verdrängten Wassers: ist nun der Körper so gestaltet, daß das Volum des eingetauchten Theiles ADB von einer durch die Axe CD geführten Ebene halbirt wird, so ist dies nicht mehr der Fall, wenn man den Körper aus dieser Lage so versetzt, daß nun $A'B'$ (Fig. 205) die Schwimmebene und also $A'DB'$ der im Wasser eingetauchte Theil wird, und es fällt der Schwerpunkt des verdrängten Wassers aus dem Punkte F in den Punkt F', während der Schwerpunkt G des Körpers seine vorige Lage behält. Verbindet man G mit F', und zieht durch F' die lothrechte $F'M$, so ist diese die Richtung des Auftriebs und der Punkt M das Metacentrum des Körpers, welches also oberhalb des Schwerpunktes G zu stehen kommt. An dem Hebel GF' wirken nun zwei gleiche Kräfte in den Punkten G und F' nach vertikalen Richtungen, und zwar in G abwärts in F' aufwärts, in Folge deren der Hebel sich um einen Punkt E drehen, und also der Punkt F' sich allmälig seiner vorigen Lage F nähern wird; somit war die anfängliche Lage des Gleichgewichts eine stabile Lage. Sei zweitens im Punkte F (Fig. 204) der Schwerpunkt des Körpers, in G jener des verdrängten Wassers. Kommt der letztere in der neuen Lage des Körpers nach G', und man zieht $G'm$ lothrecht, so ist m das Metacentrum, welches jetzt unterhalb des Schwerpunktes F fällt, und es wirken nun an dem Hebel $G'F$ gleiche Kräfte, in G' nach oben, in F nach unten, welche eine Drehung des Hebels

Digitized by Google

um den Mittelpunkt e bewirken, und also der Körper nicht in die erste Lage zurückkehrt, sondern sich nur noch weiter von derselben entfernt.

876. Anmerkung. Unter den verschiedenen Körpern, welche auf der Oberfläche des Wassers schwimmen, sind Schiffe und andere Fahrzeuge, deren man sich auf Seen, Flüssen und Kanälen zum Handel bedient, die bedeutendsten. Es ist von Wichtigkeit die Stabilität solcher Fahrzeuge und die Stellungen zu bestimmen, die sie annehmen, wenn sie frei auf dem Wasser schwimmen. Man belastet diese Fahrzeuge so, daß ihr Schwerpunkt die tiefste Lage erhält, wodurch nothwendig ihr Metacentrum über den Schwerpunkt zu liegen kommt und das Fahrzeug für alle kleinen Schwankungen des Schiffes, welche durch die Bewegung der Meereswellen erzeugt werden, stabil und gegen das Umschlagen gesichert wird.

877. Lehrsatz. Die Anzahl aller Lagen des Gleichgewichts eines schwimmenden Körpers ist immer eine gerade Zahl, und es folgt stets auf eine stabile Lage des Körpers unmittelbar eine labile Lage desselben, und auf diese jene.

Beweis. Man lasse den Körper um eine bewegliche Axe drehen, die immer mit einer festen horizontalen Linie parallel bleiben muß, so daß er auf diese Art durch alle Lagen des Gleichgewichts gehe, bei denen diese Axe die Schwimmaxe (856) vorstellt. War nun die erste Lage des Körpers eine stabile, so wird er bei erfolgter Drehung, so lange er derselben noch sehr nahe ist, eine Neigung weisen sich in dieselbe zurück zu begeben; dieses Bestreben nimmt aber mit der Größe der Umdrehung immer ab, und endlich gibt es eine Entfernung, von der ersten Lage an gerechnet, wo dieß Bestreben in die erste Lage zurückzukehren, Null ist, und wo er sich derselben weder nähern, noch von ihr weiter entfernen kann, diese ist also eine zweite Lage des Gleichgewichts, bei welcher der Körper diesseits derselben, sich der ersteren nähern, und von der zweiten entfernen würde, jenseits derselben aber bestrebt sich der Körper von der ersten und zweiten zu entfernen, folglich ist die zweite Lage des Gleichgewichts eine labile. Ist der Körper über die zweite hinaus,

Digitized by Google

so nimmt das Bestreben sich von ihr zu entfernen, mit der Größe der Umdrehung zu, und nähert sich sonach einer dritten Lage, in welche er diesseits und jenseits derselben von freien Stücken sich zurückbegeben wird, und die daher abermals als eine stabile Lage sich ausweiset. Und so erhellet, daß die folgende vierte Lage eine labile, dann die fünfte Lage eine stabile u. s. f. sein wird. Sobald also der Körper zu seiner anfänglichen Lage zurückgekehrt ist, indem er durch alle möglichen Lagen des Gleichgewichts gebracht wird; so wird er nothwendig durch eine gerade Anzahl der Lagen gegangen sein, deren eine Hälfte dem dauernden Gleichgewichte, die andere Hälfte aber dem augenblicklichen Gleichgewichte entsprechen.

878. Lehrsatz. Die Kraft, mit welcher ein aus seiner stabilen Lage des Gleichgewichtes versetzter schwimmender Körper in dieselbe zurückkehrt, ist dem Produkte aus der Größe der Umdrehung, in die Summe aus dem Trägheitsmomente der Schwimmebene getheilt durch das Volum des Körpers mehr dem Abstande des Schwerpunktes des verdrängten Wassers vom Schwerpunkte des Körpers proportional.

Beweis. Sei ADB (Fig. 204) ein durch den Schwerpunkt G des Körpers geführter vertikaler Schnitt von der Beschaffenheit, daß derselbe den ganzen Körper in zwei sowohl dem Gewichte als auch dem Volumen nach gleiche Theile schneidet, sei AB die Schwimmebene und DC eine durch den Schwerpunkt F des verdrängten Wassers und durch den Schwerpunkt G des Körpers gezogene Gerade, welche bei der Lage des Gleichgewichts senkrecht die Schwimmebene schneidet. Es werde nun der Körper aus dieser Lage so verrückt, daß der Schnitt ADB vertikal bleibt, und dabei die Gerade CD mit der Vertikalen FE (Fig. 206) einen sehr kleinen Winkel $GFE=\alpha$ bilde, hiedurch geht die Schwimmebene AB in $A'B'$ über, und der Schwerpunkt F der verdrängten Flüssigkeit wird nach einem Punkte F' versetzt. Sei das Volum des eingetauchten Körpers $ADB=S$, das Gewicht des schwimmenden Körpers gleich P, der Abstand beider Schwerpunkte $GF=a$, und γ das Gewicht der kubischen Einheit der Flüssigkeit, so hat man stets $P=\gamma S$, also auch $P=\gamma \,.\, ADB=\gamma \,.\, A'DB'$, daher $ADB=A'DB'$. Zieht man beiderseits den körperlichen Raum $A'DBC$ ab, so bleibt das Keilstück $ACA'=BCB'$; da aber die

Flächen AC, CB einander gleich sind, so müssen wegen der Gleichheit der Keilstücke auch die Flächen $A'C$, CB' nahe gleich sein, d. i. die Schwimmaxe, welche im Punkte C projizirt erscheint, halbirt für sehr kleine Bewegungen des schwimmenden Körpers jede Schwimmebene. Sei nun σ ein Element der Fläche AC, und ϱ dessen Abstand von der Schwimmaxe, so ist $\alpha\varrho$ der während der drehenden Bewegung der Fläche AC beschriebene Kreisbogen: betrachtet man ihn als die Höhe eines Prisma, dessen Grundfläche σ ist, so folgt sein Inhalt gleich $\alpha\sigma\varrho$, und dessen Moment in Beziehung auf die Schwimmaxe gleich $\alpha\sigma\varrho^2$; sonach wird $\alpha\int\sigma\varrho^2$ die Summe der Momente aller solcher Prismen sein, aus denen das Keilstück ACA' besteht. Ist also r der Abstand seines Schwerpunktes von der Schwimmaxe, so hat man $\alpha\int\sigma\varrho^2 = ACA'\times r$, und eben so $\alpha\int\sigma\varrho^2 = BCB'\times r$, deren Summe $2ACA'\times r = \alpha b^2$ liefert, wenn das Trägheitsmoment der Schwimmebene hinsichtlich der Schwimmaxe mit b^2 bezeichnet wird. Zieht man nun durch G eine vertikale Gerade GL, und nimmt sie zur Momentenaxe, bezeichnen ferner die Punkte g, h die Schwerpunkte der beiden Keilstücke, also die Geraden gi, kh ihre Abstände von der Momentenaxe; so erhält man, da

$$I.\quad A'DB' = ADB - ACA' + BCB' \text{ ist,}$$

ihre Momente in Bezug auf die Gerade GL

$$II.\quad A'DB'\times F'H = ADB\times FI + ACA'\times gi + BCB'\times kh,$$

wo das Glied $ACA'\times gi$ positiv gesetzt wurde, weil jeder der beiden Faktoren dieses Produktes negativ ist, es ist nämlich in der Gleichung I. Die Größe ACA' mit dem Zeichen — behaftet, und wenn die Abstände rechts der Axe GL als positiv betrachtet werden, so ist gi negativ zu nehmen. Da nun $ACA' = BCB'$ ist, so wird

$$ACA'\times gi + BCB'\times kh = ACA'(gi + kh) = ACA'\times hl\; AC' = Axv,$$

setzt man ferner $F'H = x$, $FI = a\sin\alpha = a\alpha$, weil α klein ist, so erhält man nach Substitution dieser Werthe in die Gleichung II.

$$Sx = Sa\alpha + \alpha b^2, \text{ oder}$$

$$x = \alpha\left(\frac{b^2}{S} + a\right).$$

Digitized by Google

879. **Folgesatz.** Man kann zwar immer ein Schiff so belasten, daß der Schwerpunkt G desselben in den untersten Theil des Schiffes zu liegen kommt, mithin G stets unter F sich befindet: in einem solchen Falle wird die Gerade rG als positiv betrachtet. Befände sich aber der Schwerpunkt G oberhalb F, dann muß a negativ genommen werden, und man erhält

$$x=\alpha\left(\frac{b^2}{S}-a\right), \text{ also allgemein } x=\alpha\left(\frac{b^2}{S}\pm a\right).$$

880. **Folgesatz 2.** Ist a positiv, so ist es auch x und die erste Lage des schwimmenden Körpers ist immer stabil. Wofern aber a negativ ist, so kann entweder $b^2>aS$, oder $b^2=aS$, oder endlich $b^2<aS$ werden. Im ersten Falle wird x positiv, und die Lage ist noch immer stabil: im zweiten Falle wird $x=o$, d. i. die Schwerpunkte G und F, liegen in einer vertikalen Geraden, folglich ist diese neue Lage eine labile Lage des Gleichgewichts; im letzten Falle aber wird x negativ, und der Druck der Flüssigkeit strebt den schwimmenden Körper noch weiter von der anfänglichen Lage des Gleichgewichts zu entfernen, die sonach eine labile Lage war.

881. **Lehrsatz.** So oft ein schwimmendes dreiseitiges Prisma in einer Lage des Gleichgewichtes sich befindet wobei die drei Seitenkanten des Prisma horizontal sind, und eine Seitenfläche entweder in Wasser einsinkt, oder aber ganz außerhalb desselben gestellt ist; so muß in einem jeden vertikalen Querschnitt des Prisma die centrische Linie dieser Seitenfläche von den beiden Stellen des anschlagenden Wassers gleichweit abstehen.

Beweis. Sei ACB (Fig. 207) der vertikale Durchschnitt eines dreiseitigen geraden und homogenen Prisma, welches bis an mn im Wasser versenkt ist: sei D die Mitte der nicht eingetauchten Basis, man nehme $CG=\frac{2}{3}CD$ und $Cg=\frac{2}{3}Cd$, so sind G, g die Schwerpunkte des ganzen Dreieckes ACB, und des unter dem Wasser befindlichen Theiles Cmn; wofern nun das schwimmende Prisma in Ruhe ist, wird der Schwerpunkt g des verdrängten Wassers unter dem Schwerpunkte G des ganzen Prisma in einer vertikalen Linie liegen müssen, daher wird im Falle des Gleichgewichts die gerade Linie Gg senkrecht

Digitized by Google

auf mn stehen. Nun hat man im Dreiecke CDd, wegen $CG=\frac{2}{3}CD$, $Cg=\frac{2}{3}CD$ die Proportion

$$CD : CG = Cd : Cg,$$

es ist also Dd zu Gg parallel, sonach wird auch Dd auf mn senkrecht stehen, und $Dm=Dn$ sein. Ist aber $AmnB$ (Fig. 208) der eingetauchte Theil des Prisma G und g die Schwerpunkte des ganzen Prisma und des Theiles mCn, so liegt der Schwerpunkt H des eingetauchten Theiles auf der Geraden Gg, die senkrecht zu mn steht, und man hat im Dreiecke CDd abermals

$$CD : CG=Cd : Cg,$$

mithin ist Dd zu Gg parallel, und also $Dm=Dn$.

882. Aufgabe. Die Gleichung für die Lage des Gleichgewichts eines schwimmenden geraden und homogenen dreiseitigen Prisma zu finden.

Auflösung. Setzt man die Seiten des Dreieckes ACB (Fig.207) nämlich $BC=a$, $AC=b$, ferner $Cn=x$, $Cm=y$, $CD=h$, und die Winkel $DCn=\alpha$, $DCm=\beta$, so hat man für den Fall, daß die Ecke des Prisma im Wasser sich befindet, die Gleichungen

$$rab=xy, \text{ und}$$

$$x^4-2h\cos\alpha \,.\, x^3+2hrab\cos\beta \,.\, x-r^2a^2b^2=0$$

und für den Fall, daß eine Fläche des Prisma im Wasser eingesenkt ist, die Gleichungen

$$ab(1-r)=xy \text{ und}$$

$$x^4-2h\cos\alpha \,.\, x^3+2h(1-r)ab\cos\beta \,.\, x-(1-r)^2a^2b^2=0$$

wo r das spezifische Gewicht des Körpers bedeutet.

Beweis. Bezeichnet man mit l die Länge des dreiseitigen Prisma, so wird $\frac{1}{2}ab\sin C$ der Inhalt des Dreieckes ABC (Fig. 207) und $\frac{1}{2}xy\sin C$ der des Dreieckes Cmn, somit $\frac{1}{2}abl\sin C$ der Inhalt des ganzen Prisma, und $\frac{1}{2}xyl\sin C$ der Inhalt seines eingetauchten Theiles; daher ist

$$\tfrac{1}{2}rabl\sin C=\tfrac{1}{2}xyl\sin C, \text{ oder } I.\ rab=xy.$$

Nun ist im Dreiecke CmD

Digitized by Google

$$Dm^2 = \begin{matrix} CD^2 \\ h^2 \end{matrix} + \begin{matrix} Cm^2 \\ y^2 \end{matrix} - \begin{matrix} 2CD \times Cm\cos DCm \\ 2hy\cos\beta \end{matrix}$$

und eben so im Dreiecke CnD

$$Dn^2 = h^2 + x^2 - 2hx\cos\alpha, \text{ daher wegen } Dm = Dn \text{ (881)}$$

$$\odot \quad y^2 - 2hy\cos\beta = x^2 - 2hx\cos\alpha.$$

Durch die Verbindung dieser Gleichung mit der vorhin erhaltenen $rab = xy$ ergibt sich in dem Falle, als die Ecke des Prisma im Wasser einsinkt, die Gleichung

$$II. \quad x^4 - 2h\cos\alpha \cdot x^3 + 2hrab\cos\beta \cdot x - r^2a^2b^2 = o.$$

Ist aber die Ecke des Prisma außerhalb dem Wasser so hat man (Fig. 208) $ACB = \frac{1}{2}ab\sin C$, $Cmn = \frac{1}{2}xy\sin C$, demnach

$$AmnB = ACB - Cmn = \frac{1}{2}(ab - xy)\sin C,$$

und es ist jetzt der Inhalt des ganzen Prisma $\frac{1}{2}abl\sin C$, der Inhalt des eingetauchten Theiles $\frac{1}{2}(ab - xy)l\sin C$, folglich

$$\frac{1}{2}rabl\sin C = \frac{1}{2}(ab - xy)l\sin C, \text{ oder } III. xy = ab(1 - r)$$

und man sieht, daß hier keine andere Aenderung in den vorhin erhaltenen Gleichungen *I. II.* eintritt, als daß in denselben überall $1 - r$ statt r zu setzen kommt. Hiedurch ergibt sich

$$IV. \quad x^4 - 2h\cos\alpha \cdot x^3 + 2h(1 - r)ab\cos\beta \cdot x - (1 - r)^2a^2b^2 = o.$$

883. *Folgesatz.* Da das Endglied dieser Gleichungen *II.* und *IV.* vom vierten Grade negativ ist, so besitzen sie wenigstens zwei reelle Wurzeln, eine positive und eine negative; nur die erstere ist brauchbar, wenn sie kleiner ist als a, und zugleich, wenn ihr Werth im Ausdrucke $y = rab : x$ substituirt, auch y kleiner als b liefert. Es ist also die Anzahl aller Lagen des Gleichgewichts eines dreiseitigen Prisma nicht kleiner als sechs; nämlich drei, bei welcher eine Ecke eingesenkt ist, und drei wo dieselbe ganz außer dem Wasser sich befindet.

884. *Folgesatz 2.* Sind aber alle Wurzeln der Gleichungen *II.* oder *IV.* reell, so ist die negative unbrauchbar, und es gibt daher nur drei Lagen des Gleichgewichts, bei welcher eine bestimmte Ecke eingetaucht, und eben so viele, wo dieselbe außerhalb des Wassers zu stehen kommt; mithin kann die Gesammtzahl der horizontalen Lagen des Gleichgewichts nie größer als 18 werden.

Digitized by Google

885. Folgesatz 3. Ist das Dreieck ABC gleichschenklig, also $a=b$, $\alpha=\beta$, so wird $h^2=a^2-{}^1/_4c^2$, und $a\cos\alpha=h$; hiemit erhält man aus I.

$$xy=ra^2, \text{ und aus } \odot\ x^2-y^2-2h^2(x-y):a=o, \text{ oder}$$

$$x^2-y^2-\frac{4a^2-c^2}{2a}(x-y)=o.$$

Man genügt diesen zwei Gleichungen, wenn man $x=y=a\sqrt{r}$ setzt, welche Werthe zulässig sind, weil $r<1$, und $a\sqrt{r}<a$ ist. Hieraus ergibt sich eine erste Lage des Gleichgewichts, in welcher die Grundlinie AB (Fig. 207) des Dreieckes horizontal sein wird: nimmt man $1-r$ statt r, so hat man eine zweite Lage des Gleichgewichts, bei welcher der Punkt C (Fig. 208) außer dem Wasser liegt, und die Grundlinie AB eine horizontale Stellung im Wasser annimmt.

Dividirt man aber die letzte Gleichung mit $y-x$, so folgt

$$y+x=\frac{4a^2-c^2}{2a}, \text{ also } (x+y)^2=\frac{(4a^2-c^2)^2}{4a^2}, \text{ und } 4xy=4ra^2$$

der Unterschied der beiden letzten Ausdrücke liefert

$$y-x=\frac{\sqrt{[(4a^2-c^2)^2-16ra^4}}{4a\cdot}$$

hieraus erhält man die beiden Wurzeln für y oder x gleich

$$\frac{4a^2-c^2\pm\sqrt{[(4a^2-c^2)^2-16ra^4]}}{4a}.$$

Man nimmt nach einander jede derselben für x, und die andere für y, und wenn sie beide reell und kleiner als a sind, so ergeben sich daraus zwei neue Lagen des Gleichgewichts, bei welcher die Grundlinie AB außer dem Wasser steht. Setzt man ferner $1-r$ statt r, so findet man bei reellen positiven Wurzeln, die kleiner als a sind, zwei andere Lagen, bei welcher diese Grundlinie eingetaucht ist, im Ganzen also höchstens 15 Lagen des Gleichgewichts. Da aber die Anzahl sämmtlicher Lagen (877) stets gerade ist, so muß man schließen, daß eine der Lagen, bei welcher die Spitze eingesenkt wird, mit einer der Lagen, bei welcher dieselbe außer dem Wasser steht, zusammenfällt, wodurch sich die Anzahl aller Lagen auf 12 reduzirt.

Digitized by Google

886. Folgesatz 4. Im Falle des gleichseitigen Dreieckes ist noch $c=a$, die gleichen Werthe von x und y bleiben ungeändert, die ungleichen Werthe ergeben sich aber aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{4}a[3\pm\sqrt{(9-16r)}]$$

wenn nur die Spitze im Wasser sich befindet, und aus

$$\tfrac{1}{4}a[3\pm\sqrt{(16r-7)}]$$

wenn dieselbe aus dem Wasser herausragt.

Ist nun r zwischen $^9/_{16}$ und $^1/_2$ enthalten, so ist die erste Formel reell, und ihre zwei Werthe sind kleiner als a, außerhalb dieser Grenzen ist diese Formel imaginär, oder einer ihrer Werthe ist größer als a. Eben so gibt die zweite Formel reelle Werthe, wenn r zwischen $^1/_2$ und $^7/_{16}$ enthalten ist. Man sieht daher, daß von $r=^9/_{16}$ bis $r=^1/_2$ nur die erste Formel zulässig ist, daß dagegen von $r=^1/_2$ bis $r=^7/_{16}$ nur die zweite Formel sich anwenden läßt, und daß beide Formeln unbrauchbar sind, wenn $r>^9/_{16}$ oder $r<^7/_{16}$ wird.

887. Aufgabe. Die Gleichungen des Gleichgewichts eines rechtwinkligen Parallelopipedes zu finden, wenn blos eine der vier horizontalen Seitenkanten im Wasser eingetaucht ist.

Auflösung. Ist $ABCD$ (Fig. 209) ein vertikaler Durchschnitt durch den Schwerpunkt G des Parallelopipedes, welches bis MN in Wasser eingesenkt ist, und man setzt $AB=a$, $BC=b$, $CM=x$, $CN=y$, und r das spezifische Gewicht des Prisma, so hat man die Gleichungen:

$$rab=\tfrac{1}{2}xy \text{ und}$$
$$x^4-\tfrac{3}{2}bx^3+3ra^2bx-4r^2a^2b^2=o.$$

Beweis. Der Schwerpunkt G des ganzen Prisma liegt in dem Durchschnitte der beiden Diagonalen AC, BD; der Schwerpunkt F des eingetauchten Theiles MCN aber ergibt sich, wenn man MN in E halbirt, die Gerade CE zieht, und $EF=\frac{1}{3}CE$ abschneidet. In der Lage des Gleichgewichts muß nun FG vertikal mithin senkrecht auf MN sein, macht man also $GH=\frac{1}{2}CG$ und zieht die Gerade EH, so folgt sogleich, daß EH zu FG parallel, mithin senkrecht auf MO sei, wodurch nothwendig die Verbindungslinien HM, HN des Punktes H mit den Punkten M, N, an welche in jedem vertikalen Querschnitte das Wasser anschlägt, einander gleich werden: hierin liegt das

Digitized by Google

Kennzeichen einer Lage des Gleichgewichts des Prisma für den Fall, wenn eine der horizontalen Seitenkanten im Wasser sich befindet, und auch, wenn man die Figur umkehrt, für den Fall, wenn ihrer drei im Wasser eingetaucht sind.

Nun ist, wenn l die horizontale Länge das Parallelopipedes bedeutet, lab sein Inhalt, und $^1/_2lxy$ der Inhalt des eingetauchten Theiles, somit ist $rlab=^1/_2lxy$, oder *I.* $rab=^1/_2xy$; sodann hat man, wenn *HI*, *HK* parallel zu den Seitenkanten *AB*, *AD* gezogen werden, $HI=^3/_4a$, $HK=^3/_4b$, $IM=^3/_4b-x$, $KN=^3/_4a-y$, und die rechtwinkligen Dreiecke *HIM*, *HKN*, deren Hypothenusen gleich sind, geben

$$^9/_{16}a^2+(^3/_4b-x)^2=^9/_{16}b^2+(^3/_4a-y)^2, \text{ oder}$$

$$\textit{II.}\quad x^2-^3/_2bx=y^2-^3/_2ay.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen die Größe y, so erhält man auf der Stelle

$$\textit{III.}\quad x^4-^3/_2bx^2+3ra^2bx-4r^2a^2b^2=o.$$

888. *Folgesatz.* Für ein Parallelopiped mit quadratischer Basis hat man $a=b$, mithin wird die Gleichung *III.*

$$x^4-^3/_2ax^3+3ra^3x-4r^2a^4=o,$$

welche sich in die zwei Faktoren $x^2-2ra^2=o$, und $x^2-^3/_2ax+2ra^2=o$ zerlegen läßt; die erste dieser Gleichungen gibt $x=a\sqrt{2r}=y$ welches andeutet, daß ein Prisma mit quadratischer Basis eine Lage des Gleichgewichts annimmt, wenn die Diagonale *BD* des Quadrates horizontal ist, die andere liefert aber

$$x=^1/_4a(3\pm\sqrt{(9-32r)}),\ y=^1/_4a(3\mp\sqrt{(9-32r)})$$

und es ergeben sich zwei neue Stellungen des Gleichgewichts wenn $r<^9/_{32}$, aber $r>^8/_{32}$.

889. *Folgesatz 2.* Sind hingegen drei der horizontalen Seitenkanten des Parallelopipedes im Wasser, so kommt in den Gleichungen *I. III.* blos $1-r$ statt r zu setzen.

890. *Aufgabe.* Die Gleichungen des Gleichgewichts eines rechtwinkligen Parallelopipedes zu finden, wenn zwei horizontale Seitenkanten im Wasser eingesenkt sind.

Digitized by Google

Auflösung. Ist $ABCD$ (Fig. 210) ein vertikaler Durchschnitt durch den Schwerpunkt G des Parallelopipedes, welches bis MN im Wasser sich befindet, und es sind dessen Abmessungen $AB=a$, $BC=b$, $BM=y$, $CN=x$; so finden die Gleichungen Statt

$$\tfrac{1}{2}b(x+y)=rab, \text{ und } x=ra\pm\sqrt{[3r(1-r)a^2-\tfrac{1}{2}b^2]}$$

Beweis. Heißt l die horizontale Länge des Prisma, so ist $rabl$ dessen Gewicht, und $\frac{1}{2}bl(x+y)$ das Gewicht des verdrängten Wassers; man hat also $I.ra=\frac{1}{2}(x+y)$, oder $y=2ra-x$.

Sei EF die centrische Linie des Trapezes $BMNC$, und H dessen Schwerpunkt, so wird (46)

$$FH=\tfrac{1}{3}EF\times\frac{x+2y}{x+y}, \text{ also}$$

wenn IH senkrecht auf CD geführt und so weit verlängert wird, bis sie der durch G zu AB parallel gezogenen GK in K begegnet,

$$HI=\frac{\frac{1}{3}b(x+2y)}{x+y} \text{ und } KH=\tfrac{1}{2}b-HI=\tfrac{1}{6}b\frac{x-y}{x+y}, \text{ man hat ferner}$$

$$LF=\tfrac{1}{2}(x-y), \text{ und wegen } EL : HI=LF : FI$$

$$\text{wird } FI=\frac{HI\times LF}{EL}=\tfrac{1}{6}(x-y)\,.\,\frac{x+2y}{x+y}, \text{ daher}$$

$$CI=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{6}(x-y).\frac{x+2y}{x+y}=\frac{x^2+xy+y^2}{3(x+y)}; \text{ endlich}$$

$$GK=\tfrac{1}{2}a-\frac{x^2+xy+y^2}{3(x+y)}.$$

Fällt man ON auf AB senkrecht, so ist $MO=x-y$, und weil im Zustande des Gleichgewichts GH auf MN senkrecht ist, so geben die ähnlichen Dreiecke GKH, OMN

$$KH : GK=OM : ON, \text{ also } KH\times ON=GK\times ON$$

$$\text{oder } II.\ \tfrac{1}{6}b^2\frac{(x-y)}{x+y}=(x-y)\left[\tfrac{1}{2}a-\frac{x^2+xy+y^2}{3(x+y)}\right].$$

Dieser Gleichung wird vorerst Genüge geleistet, wenn $x=y$ gesetzt wird, alsdann ist aber MN mit AD parallel, mithin die obere Fläche des Parallelopipedes horizontal. Nun gibt die Gleichung I.

Digitized by Google

$x+y=2ra$, $x^2+xy+y^2=4r^2a^2-xy$, und für diesen Werth verwandelt sich die Gleichung *II.* in

$$6ra^2-2(4r^2a^2-xy)=a^2,$$

setzt man hierin statt y seinen Werth $2ra-x$, so wird nach gehöriger Reduktion $x=ra\pm\sqrt{[3r(1-r)a^2-\frac{1}{2}b^2]}$.

891. *Folgesatz.* Es kann also bei einer geneigten Lage des rechtwinkeligen Parallelopipedes kein Gleichgewicht bestehen, sobald

$$\frac{1}{2}b^2>3r(1-r)a^2, \text{ d. i. wenn } b>a\sqrt{6r(1-r)}.$$

892. *Folgesatz 2.* Ist $a=b$, oder die Basis ein Quadrat, so muß bei einer schiefen Stellung des Parallelopipedes

$$1<\sqrt{6r(1-r)} \text{ sein,}$$

oder die schiefe Lage des Gleichgewichts erfolgt, wenn r zwischen den Grenzen $\frac{1}{6}(3\pm\sqrt{3})$ liegt.

893. *Aufgabe.* Die Lagen des Gleichgewichtes eines geraden, homogenen paraboliſchen Cylinders, deſſen Axe horizontal iſt, anzugeben.

Auflösung. Sei BAC (Fig. 211) ein vertikaler Durchſchnitt durch den Schwerpunkt G des paraboliſchen Cylinders, welcher bis MN in Waſſer eingeſenkt iſt: man ſetze $AD=a$, $BD=b$, den Parameter der Parabel $=p$ und die Länge des Cylinders $=l$, man halbire die Schwimmebene MN im Punkte H und ziehe $HE=x$ parallel zur Hauptaxe der Parabel; ſo hat man eine erſte Lage des Gleichgewichts, wo die durch die Axe des Cylinders und durch die Hauptaxe der Parabel gezogene Ebene vertikal iſt, und nebſtdem diesſeits und jenſeits dieſer Ebene eine andere Lage des Gleichgewichts, wenn der Ausdruck

$$\sqrt{\left(1-\frac{5p}{6a}\right)^3}$$

reell, poſitiv und größer als das ſpezifiſche Gewicht r des Cylinders ausfällt.

Beweis. Der Schwerpunkt G der Parabel BAC liegt nach (113) auf der Hauptaxe AD in einem Abſtande $AG=\frac{3}{5}a$, der Schwerpunkt

Digitized by Google

der Parabel MAN läßt sich aber finden, wenn man MN als eine Sehne betrachtet, welche zum Durchmesser EO gehört, so ist nach (A. 1151) $y'^2 = px'$ die Gleichung der Parabel, und es ergibt sich ganz auf dieselbe Weise, wie (113), dessen Abstand $EI = {}^3/_5\, x$. Sei nun an den Punkt E eine Tangente ET und die Ordinate $EK = z$ gezogen; so ist KT die Subtangente des Punktes E, also $KT = 2AK$, (A. 1172) $= 2z^2 : p$, demnach $ET = z\sqrt{(p^2+5z^2)} : p$. Verlängert man die Gerade EI und zieht OM darauf senkrecht, so geben die ähnlichen Dreiecke EKT, MOH

$$ET : EK = HM : MO, \text{ woraus } MO = py : \sqrt{(p^2+4z^2)} \text{ folgt.}$$

Es ist aber der Inhalt der Parabel $CAB = {}^4/_3 ab$, und der Inhalt der Parabel $AMN = {}^4/_3 MO \times EH = {}^4/_3 pyx : \sqrt{(p^2+4z^2)}$; mithin besteht die Gleichung $I.\ rab = pyx : \sqrt{(p^2+4z^2)}$.

Im Falle einer aufrechten Stellung des Cylinders fällt der Schwerpunkt I in die Hauptaxe, mithin ist dann $z = o$, und man kann aus dieser Gleichung die Tiefe x des Einsinkens berechnen: man findet so $rab = xy$, oder $ra\sqrt{ap} = x\sqrt{px}$, woraus $x = a\sqrt[3]{r^2}$ folgt. Will man bei einer schiefen Stellung des Cylinders die Tiefe seines Einsinkens nach einer Geraden EO messen, welche durch die Mitte H der Schwimmebene parallel zur Hauptaxe gezogen wird, so ist nach (A. 1101), wenn in F der Brennpunkt der Parabel angenommen wird, $EF = {}^1/_4 p + AK = (p^2+4z^2) : 4p$ und weil $4EF$ den Parameter der an den Durchmesser EO bezogenen Parabel vorstellt, so wird ihre Gleichung

$$y^2 = 4EF \,.\, x = x(p^2+4z^2) : p.$$

Setzt man diesen Werth statt y in die Gleichung $I.$; so erhält man $rab = px\sqrt{x}$, woraus $x = a\sqrt[3]{r^2}$ wie vorhin folgt.

Da GI vertikal ist, also senkrecht auf der Geraden MN steht, so geben die ähnlichen Dreiecke KTE, ILH, GPL

$$ET : KT = HI : HL \text{ und } HT : ET = PL : PG$$

aus der ersten Proportion folgt $HL = 4xz : 5\sqrt{(p^2+4z^2)}$, hiemit wird $PL = PH - HL = z\sqrt{(p^2+4z^2)} : p - 4xz : \sqrt{5(p^2+4z^2)}$ und aus der zweiten Proportion erhält man

$$PG = (p^2+4z^2) : 2p - {}^2/_5 x$$

nun ist aber auch $PG = AG - AP = {}^3/_5 a - x + z^2 : p$

und durch Gleichstellung beider Ausdrücke findet man

$$z^2 = p(^3/_5 a - ^1/_2 p - ^3/_5 x)$$

oder nach Substitution des für x gefundenen Werthes wird

$$II.\quad z^2 = {}^1/_{10} p[6a - 5p - 6a\sqrt{r^2}].$$

Die Realität dieses Ausdruckes erfordert aber, daß

$$6a > 5p + 6a\sqrt{r^2},\ \text{oder daß}\ r < \sqrt{\left(1 - \frac{5p}{6a}\right)^2}\ \text{sei}$$

894. Anmerkung. Mehrere hieher gehörende Aufgaben findet man in den schon (853) angeführten Schriften von Lehmus und in *Leonh. Euleri scientia navalis. Traité théorique et experimental d'Hydronamique par Charles Bossut Paris 2 vol.* 8.

V. Gleichgewicht elastischer Flüssigkeiten.

895 Erklärung. Die atmosphärische Luft, die wir vorzugsweise als eine elastische Flüssigkeit betrachten, umgibt unsere Erde nach allen Seiten bis zu einer noch unbekannten Höhe, wie eine Hülle, und wird an ihr durch die Schwerkraft festgehalten, man nennt diese Luftmasse die Atmosphäre. Alle anderen Luftarten, welche die Eigenschaften mit der atmosphärischen Luft gemein haben, daß sie sich von selbst ausdehnen, und also einen immer größeren Raum einnehmen, wofern sie nicht nach allen Seiten im Gefäße gesperrt sind, daß sie sich ferner in einen kleineren Raum zusammendrücken lassen, ohne ihre luftförmige Gestalt einzubüßen, nennt man Gase. Dergleichen sind das Sauerstoffgas, das Stickstoffgas, das Wasserstoffgas, das kohlensaure Gas u. s. f. Die Kraft, mit welcher diese Luftarten nach allen Seiten hin von freien Stücken sich ausdehnen, nennt man ihre Expansivkraft. Sie wird durch den Druck gemessen, welchen die Wände des Gefäßes, in welchem eine dieser Luftarten gesperrt ist, auszuhalten haben.

896. Erfahrungssätze. 1. Eine in einem bestimmten Raume befindliche Luftmasse, wird durch jede Kraft, welche größer als die Expansivkraft jener Luftmasse ist, in einen engeren Raum zusammenge-

Digitized by Google

preßt; eine solche Verminderung des Volums steigert aber die Expansivkraft der eingeschlossenen Luftmasse.

2. Durch Einwirkung der Wärme wird die Expansivkraft der eingeschlossenen Luft gleichfalls erhöhet, so wie sie durch Verminderung der Temperatur abnimmt.

897. Erfahrung. Alle diese Luftarten sind schwer, und lassen sich mittelst einer empfindlichen Wage abwägen. In der nachstehenden Tafel gibt die erste Spalte das spezifische Gewicht dieser Luftarten bei der Temperatur des schmelzenden Eises, und bei einem Normalzustande der Atmosphäre an, wenn sie ganz trocken sind und wenn das spezifische Gewicht des destillirten eiskalten Wassers zur Einheit angenommen wird, die zweite Spalte liefert das spezifische Gewicht derselben, wenn das spezifische Gewicht der trockenen eiskalten atmosphärischen Luft die Einheit ist, die dritte Spalte aber zeigt das Gewicht eines Wiener Kubikfußes dieser Luftarten in Wiener Lothen an.

	Spezifisches Gewicht		Gewicht in Lothen
Atmosphärische Luft . .	0.0012991	1.00000	2.3447
Sauerstoffgas . . .	0.0014335	1.10359	2.5874
Stickstoffgas	0.0012590	0.96913	2.2724
Wasserstoffgas . . .	0.0000951	0.07321	0.01717
Kohlensaures Gas . .	0.0019741	1.51961	3.5631
Hydrochlorgas . . .	0.0016199	1.24740	2.9239
Ammoniakgas . . .	0.0007751	0.59669	1.3991

898. Folgesatz. Denkt man sich eine Luftsäule, welche auf der Oberfläche unserer Erde aufliegt, von dem übrigen Theile der Atmosphäre abgesondert, und in gleich hohe Schichten abgetheilt, die vertikal übereinander liegen; so muß die Dichtigkeit und die Expansivkraft der atmosphärischen Luft von der Erdfläche an, von Schichte zu Schichte abnehmen, weil von je zwei unmittelbar auf einander liegenden Schichten die obere, blos den Druck der auf ihr ruhenden Luftsäule bis an die äußersten Grenzen der Atmosphäre erleidet, während die untere

Digitized by Google

Schichte nebstdem noch das Gewicht der oberen Schichte zu tragen hat.

899. Folgesatz 2. Es ist daher auch das absolute Gewicht gleich großer Räume Luft in einer Luftmasse, in vertikaler Richtung, nach oben zu, abnehmend, theils weil die Dichtigkeiten derselben allmälig kleiner werden (898), je höher über die Erdfläche sie gestellt sind, theils weil die Beschleunigung der Schwere also auch das Gewicht in den zunehmenden Entfernungen vom Mittelpunkte der Erde abnimmt.

900. Anmerkung. Das einfachste Mittel zur Bestimmung der Expansivkraft eines Gases ist die Vergleichung derselben mit dem hydrostatischen Drucke irgend einer tropfbaren Flüssigkeitssäule. Beobachtet man die Höhe einer solchen Säule, welche der Expansivkraft einzelner Gase das Gleichgewicht hält, so gibt das Verhältniß dieser Druckhöhen sofort auch das Verhältniß der ihnen zugehörenden Expansivkräfte. Zur praktischen Messung ist es vortheilhafter sich einer tropfbaren Flüssigkeit vom größeren spezifischen Gewichte zu bedienen, weil die Säule, welche einen bestimmten Druck erzeugt, in demselben Verhältnisse kürzer ausfällt, als die Dichte des tropfbaren Körpers größer wird. Man wählt daher eine einerseits geschlossene heberförmig gekrümmte Röhre, füllt den längern geschlossenen Schenkel derselben mit Quecksilber, und nachdem man die Vorrichtung in den Raum, wo die Gasart, deren Expansivkraft gesucht wird, abgesperrt ist, in einer vertikalen Stellung gebracht hat, mißt man die Länge der Quecksilbersäule, multiplizirt diese mit der Zahl 13.597 dem spezifischen Gewichte des Quecksilbers, und dem Gewichte der kubischen Einheit des Wassers, so gibt das Produkt sofort die gesuchte Expansivkraft des Gases. Auf diese Weise hat man die Expansivkraft der atmosphärischen Luft an der Oberfläche des Meeres gleich dem Drucke einer Quecksilbersäule von 28 Pariser Zollen, oder einer Wassersäule von 32 Fuß gefunden.

901. Anmerkung 2. Da jedoch das spezifische Gewicht des Quecksilbers, wie jedes andern Körpers, von seiner Temperatur abhängt, so ist es bei genauen Angaben dieser Art erforderlich, die gemessenen Quecksilbersäulen auf eine bestimmte Temperatur, welche in

Digitized by Google

der Regel die des schmelzenden Eises ist, zu reduziren. Heißt H die beobachtete Queckſilberſäule bei t Graden des Thermometers, ſo wird ſie auf die Normaltemperatur vom 0° gebracht, wenn man bemerkt, daß nach genauen Verſuchen die lineare Ausdehnung des Queckſilbers während ſeiner Erwärmung vom Eis- bis zum Siedepunkte $^2/_{111}$ ſeiner anfänglichen Länge beträgt. Bezeichnet man, je nachdem man die Temperatur nach der 80- oder 100theiligen Skale mißt, im erſten Falle den Bruch

$$\frac{2}{111\times 80}=\frac{1}{4440}=0.000225$$

im zweiten den Bruch

$$\frac{2}{111\times 100}=\frac{1}{5550}=0.00018$$

mit α, und die auf 0° reduzirte Queckſilberſäule mit h, ſo iſt ſtets $H=h+h\alpha t$, mithin

$$h=\frac{H}{1+\alpha t}=H(1-\alpha t) \text{ nahe.}$$

902. Erklärung. Ein Barometer heißt eine Vorrichtung zur Meſſung des Druckes unſerer Atmoſphäre. Ein Gefäßbarometer beſteht aus einer etwa 30 Zolle langen, an einem Ende zugeſchmolzenen gläſernen Röhre von etwa 2 bis 3 Linien im Durchmeſſer, welche reines Queckſilber und oberhalb deſſelben einen luftleeren Raum, die ſogenannte Torricelliſche Leere enthält, und in ein Gefäß von 8 bis 12 Linien im Durchmeſſer mündet. Beide Theile, ſowohl die Röhre als das Gefäß ſind an einem Brete befeſtiget, an welchem auch die in Zolle und Linien abgetheilte Skale ſich befindet, deren Anfangspunkt in das Niveau des Queckſilbers im Gefäße fällt. Ein Heberbarometer beſteht aus einer etwa 3 Fuß langen heberförmig gekrümmten gläſernen Röhre von durchgängig gleichem Durchmeſſer, deren längerer hermetiſch geſchloſſener Schenkel bis auf die Torricelliſche Leere mit Queckſilber gefüllt iſt. Die Skale iſt an dieſem Barometer verſchiebbar, ihr Nullpunkt wird ſtets in den Queckſilberſpiegel im kürzeren Schenkel geſtellt, und mißt die Höhe der Queckſilberſäule im längern Schen-

Digitized by Google

kel über den Spiegel im kürzeren, welche die Barometerhöhe, oder der Barometerstand heißt.

903. Anmerkung. Da selbst an höchsten Bergen die Quecksilbersäule nicht unter 22 Zolle sinkt, und in den tiefsten Schachten unserer Erde nicht über 30 Zolle steigt, so pflegt man an der Skale nur die 8 Zolle, von 22 bis 30 Zolle mit ihren Unterabtheilungen zu bezeichnen. Auch darf bei Anwendung engerer Glasröhren die Depression des Quecksilbers wegen der Kapillarität nicht unberücksichtiget bleiben. Bei Gefäßbarometern, deren Skale unbeweglich ist, wird der beobachtete Barometerstand nicht ganz genau dem Luftdrucke gleich sein, sondern jener wird beim Steigen des Quecksilbers im Barometer kleiner, beim Fallen desselben aber größer sein, als dieser. Heißt δ die beobachtete Aenderung der Quecksilbersäule am Gefäßbarometer, und n das Verhältniß des Durchmessers im Gefäße zum Durchmesser der Röhre, so ist $\delta : n^2$ die zugehörige Korrektion des beobachteten Barometerstandes, welche übrigens, sobald n die Zahl 10 übersteigt, bei einer Totaländerung des Barometerstandes von 2 Zoll, schon weniger als $^1/_4$ Linie beträgt.

904. Anmerkung 2. Bei Beobachtungen des Barometerstandes hat man noch zu beachten, daß 1. das Auge beim Ablesen desselben an der Skale eine richtige Stellung erhält. Zu diesem Zwecke trägt der Nonius der Skale, welcher bekanntlich an der in Linien abgetheilten Skale noch ihre Zehntheile zu messen gestattet, ein sogenanntes Absehen, welches in einem horizontalen auf Glas eingeschnittenen Striche besteht, hinter welches das Ende der zu beobachtenden Quecksilbersäule gebracht, während das Auge vor dem Absehen in die horizontale Ebene des Striches aufgestellt wird. Ferner 2. ist auf die Temperatur des Quecksilbers im Barometer Rücksicht zu nehmen, welche oft von der Temperatur der äußeren Luft verschieden ist. Man bringt zu diesem Ende ein Thermometer mit dem Barometerrohre in nahe Berührung, umgibt wohl auch die Thermometerkugel mit einer Hülle von derselben Weite, welche das Barometerrohr hat, und füllt den Zwischenraum mit Quecksilber aus. Endlich 3. bei sehr genauen Beobachtungen macht auch die Veränderlichkeit der Länge der Skale bei jedem Temperatur-

Digitized by Google

wechsel eine Korrektion nöthig. Diese ist jedoch geringer als jene wegen der Temperatur des Queckſilbers hat das entgegengesetzte Zeichen und übersteigt nicht den zehnten Theil derselben. Ihr Werth ergibt sich aus der bekannten Dilatation des festen Körpers, Holz, Messing u. s. f., an welchem die Skale angebracht ist, durch den Einfluß der Wärme.

Mehrere Bemerkungen dieser Art, so wie über tragbare Barometer, welche zum Höhenmessen angewendet werden, findet man unter andern Werken in A. von Ettingshausen's Anfangsgründen der Physik, Wien 1844, und im J. S. T. Gehlers physikalischen Wörterbuche Art. Barometer. Leipzig 1825—1844.

905. Erklärung. Der Normalbarometerstand heißt die Länge der Queckſilbersäule von 76 Millimetern oder 28.85075 W. Zoll =28 Zoll 10.21 Linien Wiener Maßes, welcher der mittlere Barometerstand zu Paris an der Oberfläche der Seine bei der Temperatur des schmelzenden Eises ist.

906. Erfahrung. Setzt man eine tropfbare Flüssigkeit in einem offenen Gefäße der freien Luft aus, so vermindert sich ihre Masse sichtlich, und verschwindet endlich ganz, d. h. sie verwandelt sich in eine luftförmige Flüssigkeit, welche mit der atmosphärischen Luft sich vermengt. Hat hiebei die Flüssigkeit einen bestimmten Geruch, wie z. B. Weingeist, Schwefeläther, Kampferspiritus, so verbreitet sich dieser Geruch nach allen Seiten in der Luft. Dieser Vorgang wird bedeutend beschleuniget, wenn die Flüssigkeit erwärmt wird. Geschieht der Versuch in einem geschlossenen Raume, z. B. unter einer mit Queckſilber gesperrten Glasglocke, so wird die erwärmte tropfbare Flüssigkeit in kurzer Zeit verschwinden, aber wenn man den Raum, in welchem die elastische Flüssigkeit enthalten ist, durch das Einsenken der Glasglocke im Queckſilber vermindert; so tritt die zum Versuche angewendete Flüssigkeit in sichtbaren Tropfen, die sich an den innern Wänden der Glasglocke anlegen, wieder zum Vorschein.

907. Erklärung. Die elastische Flüssigkeit, welche beim Uebergange einer Flüssigkeit aus dem tropfbaren Zustande in den luftförmi-

Digitized by Google

gen entsteht, nennt man **Dunst**, wenn der Uebergang blos an der Oberfläche der tropfbaren Flüssigkeit Statt hat, dagegen **Dampf**, wenn derselbe in der ganzen Masse der Flüssigktit gleichzeitig erfolgt. Nach der Beschaffenheit der tropfbaren Flüssigkeit unterscheidet man **Wasserdünste**, **Quecksilberdünste**, **Alkoholdünste** u. s. f. Die Dampfbildung begleitet eine auf- und niedersteigende Bewegung der Tropfen einer flüssigen Masse, welche Erscheinung man das **Sieden** nennt.

908. **Folgesatz.** Das Sieden des Wassers erfolgt erst, wenn die Expansivkraft der im Inneren der Masse sich bildenden Dampfbläschen größer wird, als der Druck der Atmosphäre. Aus dem Grunde wird die Temperatur des siedenden Wassers größer oder kleiner, je nachdem der Barometerstand es ist. Um also übereinstimmende Thermometer zu gewinnen, wählt man zur Bestimmung des Siedepunktes, die Temperatur des bei dem Normalbarometerstande siedenden Wassers.

909. **Folgesatz 2.** Die Dünste gehen bei Verminderung des Raumes, in dem sie eingeschlossen sind, oder bei Verminderung ihrer Temperatur wieder in tropfbare Flüssigkeiten zurück (906), während die Gase beim gewöhnlichen Drucke der Atmosphäre stets ihre elastische Form behalten.

910. **Erfahrung.** Gießt man in eine gebogene Glasröhre mit senkrechten ungleichen Armen, wovon der kürzere an seinem Ende geschlossen und mit einer Volumskale versehen ist, durch das offene Ende des längeren Armes Quecksilber, so wird dadurch die in dem kürzeren Arme enthaltene Luft anfangs blos abgesperrt, aber in demselben Verhältnisse als die auf ihn lastende Quecksilbersäule zunimmt, auf ein kleineres Volum zusammengedrückt. Ist h die Länge der angewandten Quecksilbersäule in dem offenen Schenkel der Röhre, b der den Luftdruck bezeichnende Barometerstand, ferner v das Volum, d die Dichtigkeit, E die Expansivkraft der im kürzeren Arme abgesperrten Luft von gleicher Dichtigkeit mit der atmosphärischen, und bezeichnen v', d', E' dieselben Größen, nachdem die Luft im kürzeren Arme dem Drucke der Quecksilbersäule h ausgesetzt wurde; so lehret der Versuch, daß bei trockener Luft, und ungeänderter Temperatur stets $b : b+h = v' : v$

Digitized by Google

sich verhält. Es ist aber $v' : v = d : d'$, und $E : E' = b : b + h$; somit wird $E : E' = d : d'$ d. i. die Expansivkräfte der atmosphärischen Luft verhalten sich stets wie ihre Dichtigkeiten.

911. Anmerkung. Dasselbe Gesetz, welches man nach dem Erfinder, das Mariotte'sche nennt, zeigt sich auch bei reinem trockenen Sauerstoffgas, Stickgas, Wasserstoffgas oder einem beliebigen Gemenge derselben, und selbst bei denjenigen Gasen, wie z. B. kohlensaures Gas, welche bei einer starken Zusammenpressung tropfbar gemacht werden können, sobald sie dieser Grenze der Zusammenpressung nicht zu nahe stehen. Bei Wasserdunst gilt aber das Gesetz nur so lange als die Zusammenpressung desselben seine luftförmige Form nicht ändert.

912. Erfahrung. Sorgfältigen Versuchen zu Folge nimmt die Expansivkraft der Luft gerade so zu, wie ihre Ausdehnung durch die Wärme wächst. Theilt man das Volum einer in einem Gefäße gesperrten Luft bei 0° in 30 gleiche Theile, so steht die Zunahme ihres Volums mit ihrer nach einem Quecksilberthermometer gemessenen Temperatur in geradem Verhältnisse, und die bei dem Siedepunkte selbst beobachtete Ausdehnung der Luft beträgt $^{11}/_{30} = {}^{100}/_{273} = 0.367$ des ursprünglichen Volums bei 0°. Bezeichnet man, je nachdem man bei Bestimmung der Temperaturen von der Reaumur'schen oder von der Centesimalskale Gebrauch macht, den 80. oder den 100. Theil dieses Bruches mit β, und ist e die Expansivkraft der Luft bei 0°, E jene bei t Geraden des Thermometers, so hat man nach diesem Gesetze

$$E : e = 1 + \beta t : 1, \text{ mithin } E = e(1 + \beta t).$$

Bezeichnet E' die Expansivkraft der Luft bei der Temperatur t', so ist eben so $E' = e(1 + \beta t')$; folglich

$$E : E' = 1 + \beta t : 1 + \beta t',$$

woraus sich bei ungeändertem Barometerstande die einer beobachteten Temperatur t' zugehörige Expansivkraft der Luft berechnen läßt.

913. Anmerkung. So weit die bisherigen Erfahrungen reichen, gilt dieses Gesetz auch für andere Gase, und die Aenderungen der Ausdehnung anderer Gasarten durch die Wärme sind so gering, daß

Digitized by Google

man sie nahe für alle Gase und Dämpfe wenigstens bei ihrer Erwärmung unterhalb des Siedepunktes als gleich groß annehmen darf.

914. Lehrsatz. Die Masse unserer Atmosphäre beträgt noch nicht den Millionten Theil der Erdmasse.

Beweis. Sei S die ganze Oberfläche der Erde in Quadratmetern ausgedrückt, ϱ die Dichtigkeit des Queckſilbers 13.5975, r der Halbmeſſer der Erde, d ihre Dichtigkeit 5.50 und b der Normalbarometerſtand oder 76 Centimeter; ſo iſt die Masse der Atmosphäre $\varrho . S . 76$, und die Masse der Erde $^1/_3 d S r$. Stellt alſo f den Bruch vor, welcher das Verhältniß der erſten Masse zur zweiten angibt, ſo hat man $f = 3\varrho . 76 : dr$, und da man $2\pi r = 40000000$ Meters hat, ſo ergibt ſich nach Subſtitution der numeriſchen Werthe für ϱ, d, r ſofort $f = 0.0000008854$ oder $f < 0.000001$.

915. Lehrsatz. Die Höhe unſerer Atmoſphäre iſt größer als 7950 Metres, aber kleiner als das Fünffache des Erdhalbmeſſers.

Beweis. Die Höhe, bis zu welcher die Atmoſphäre unſere Erde umgibt, läßt ſich zwar mit Genauigkeit nicht ermitteln, aber doch kann man die Grenzen angeben, zwiſchen welchen ſie nothwendig enthalten iſt.

Hätte die Luft in der ganzen Höhe der atmoſphäriſchen Säule dieſelbe Dichtigkeit, ſo würde die Höhe dieſer Säule h, und die Höhe b des Queckſilbers im Barometer im verkehrten Verhältniſſe der Dichtigkeiten der Luft, und des Queckſilbers ſtehen: heißt alſo ϱ' die Dichtigkeit der Luft bei der Temperatur Null, und unter dem Normaldrucke der Atmoſphäre von $b = 0.76$ Metres ſo hätte man

$$h = \varrho \times 1.76 : \varrho',$$

und da alsdann Queckſilber 10462mal dichter iſt als Luft, ſo ergibt ſich hieraus $h = 10462 \times 0.76 = 7950$ Metres.

Die Atmoſphäre muß ſich aber offenbar auf eine viel größere Höhe erſtrecken, weil die Dichtigkeit und das Gewicht ihrer Schichten (898) abnimmt, ſo wie ſie ſich immer mehr über die Oberfläche der Erde erheben.

Eine zweite Grenze der Höhe unſerer Atmoſphäre zu finden,

Digitized by Google

bestimme man die Höhe, in welcher die durch die Umdrehung unserer Erde um ihre Axe erzeugte Centrifugalkraft der Kraft der Schwere gleich kommt, und diese Höhe ist sicher größer, als die Höhe der Atmosphäre, weil jenseits derselben die Centrifugalkraft die Lufttheilchen im Raume zerstreuen würde. Nun ist bekanntlich die Centrifugalkraft am Aequator der 289. Theil der Erdschwere (651), und in einer Höhe z über die Oberfläche der Erde wird die Verminderung der Erdschwere g gleich $g(r+z):289r$, während die Intensität der Schwere in $gr^2:(r+z)^2$ übergeht. Die fragliche Grenze wird daher durch die Gleichung

$$\frac{g(r+z)}{289r} = \frac{gr^2}{(r+z)^2}$$

bestimmt, aus welcher man für diese Grenze $z = r[\sqrt{289}-1]$ d. h. beinahe $5r$ findet.

916. Anmerkung. Es ist jedoch wahrscheinlich, daß die Luft, noch ehe sie diese Grenze erreicht, durch die Kälte der höheren Luftregionen, welche, so wie man sich in der Atmosphäre erhebt, sehr schnell zunimmt, in den flüssigen Zustand verwandelt wird. Das Gesetz dieser Kälte-Zunahme in Beziehung auf die freie Luft ist uns zwar unbekannt: die einzige Erfahrung, die wir über diesen Gegenstand besitzen, rührt von Gay Lussac her, welcher sich in einem Luftballon bis zu einer Höhe von 6980 Metres erhob. Dieser geschickte Physiker beobachtete die Temperatur der Luft in dieser Höhe von $-9\frac{1}{2}$ Graden des hunderttheiligen Thermometers, während die gleichzeitige Temperatur an der Oberfläche $30\frac{3}{4}$ Grade betrug, was eine Verminderung von $40\frac{1}{4}$ Grad auf 6980 Metres oder von einem Grade für 173 Metres Höhe gibt, wenn man annimmt, daß die Wärme von der Erdoberfläche an gleichmäßig abnehme.

1. Das Höhenmessen mit dem Barometer.

917. Lehrsatz. Der Höhenunterschied zweier Stationen am Fuße und am Gipfel eines Berges, zwischen welchen die Luft überall einerlei Temperatur hat, und die Aenderung der Intensität der

Schwere unmerklich ist, wird durch das Produkt eines beständigen Faktors mit dem Unterschiede der Logarithmen der an diesen Stationen beobachteten Barometerstände ausgedrückt.

Beweis. Bezeichnet man mit γ das Gewicht der kubischen Einheit des Quecksilbers, mit b die Länge der Quecksilbersäule im Barometer an der oberen Station, so ist der Druck p, den die Atmosphäre auf die Flächeneinheit ausübt, oder $p=\gamma b$; wobei die Größe γ konstant ist, sobald die Aenderung der Temperatur und der Intensität der Schwere zwischen beiden Stationen unmerklich ist. Heißt eben so B der Barometerstand an der unteren Station und P der Druck der Atmosphäre an derselben; so wird $P=\gamma B$, woraus sofort $P:p=B:b$ folgt.

Die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft an irgend einer Schichte ist dem Mariotte'schen Gesetze gemäß stets dem Drucke proportional, dem sie ausgesetzt ist, man kann daher, wenn γ' diese Dichtigkeit und p den Druck bedeutet, $\gamma'=mp$ setzen, wo m einen beständigen Erfahrungskoeffizienten vorstellt: nur ist, da hier die Luftschichten von der Erdoberfläche an nach oben gezählt werden, nach (813) $dp=-\gamma' dz=-mpdz$, dies gibt

$$\frac{dp}{p}=-mdz, \text{ und integrirt}$$

$$I.\ \lambda p=-mz+C.$$

Heißt nun A die Höhe der oberen Station über die erweiterte Meeresfläche, a die Höhe der unteren Station, also $A-a=H$ der Höhenunterschied beider Stationen; so erhält man aus

$$I.\ \lambda P=-ma+C, \text{ und } \lambda p=-mA+C,$$

somit $\lambda P-\lambda p=m(A-a)=mH$, woraus

$$II.\ H=\frac{1}{m}(\lambda P-\lambda p)=\frac{1}{m}(\lambda B-\lambda b) \text{ folgt.}$$

Zur Verwandlung der natürlichen Logarithmen in briggische, welche in den gewöhnlichen Logarithmentafeln anzutreffen sind, multipliziren wir diese Logarithmen mit $\mu=2.302585\ldots$, wodurch

Digitized by Google

$\lambda B = \mu \log.B$, $\lambda b = \mu \log.b$ wird, und setzen die konstante Zahl $\mu : m = N$; so erhält man

$$III. \quad H = N(\log.B - \log.b).$$

918. Erklärung. Den unter den vorausgesetzten Umständen konstanten Faktor N, nennt man den Barometerkoeffizienten.

919. Aufgabe. Den numerischen Werth des Barometerkoeffizienten zu bestimmen.

Auflösung. Für den Normalbarometerstand unter der Temperatur des schmelzenden Eises beträgt der Barometerkoeffizient, wenn die Höhenmessung mittelst des Barometers in Metern gefunden werden soll, die Zahl 18336.

Beweis. Zur Berechnung des Barometerkoeffizienten dient die bekannte Erfahrung, daß auf der Oberfläche des Meeres der auf die Temperatur 0 Grade reduzirte mittlere Barometerstand 760 Millimeter beträgt, und weil dann die Dichtigkeit des Quecksilbers 10485mal größer ist, als jene der Luft, so wird eine Erhöhung des Barometers von 10485 Millimetern eine Verminderung von einem Millimeter im Barometerstande bewirken, mithin denselben auf 759 Millimeter bringen.

Setzt man diese Daten in die Formel *II.* so ergibt sich

$$m \times 10485 = \lambda 760 - \lambda 759 = \lambda \frac{760}{759} = \lambda \left(1 + \frac{1}{759}\right)$$

und nach (A. 645) wenn man schon beim ersten Gliede der schnell konvergirenden Reihe stehen bleibt, erhält man

$$m \times 10485 = \frac{1}{759}\left(1 - \frac{1}{2 \times 759}\right) = 0.001316655, \text{ denn man hat}$$

$$\frac{1}{2 \times 759} = 0.000658758, \quad 1 - \frac{1}{2 \times 759} = 0.999341242$$

$$\text{und} \quad \frac{0.999341242}{759} = 0.001316655$$

multiplizirt man diese Gleichung mit $0.43429448 = 1 : \mu$, so folgt

$$\frac{10485}{N}=0.000571816\text{, also } N=\frac{10485}{0.0005718164}=18336000$$

Hieraus erhält man da 1000 Millimeter einen Meter betragen, für Meter $N=18336$.

920. Anmerkung. Den Einfluß zu berücksichtigen, welchen die zwischen den beiden Stationen enthaltene und durch die Wärme ausgedehnte Luftsäule auf den so eben bestimmten Barometerkoeffizienten nimmt, bemerke man, daß nach (912) die eiskalte trockene Luft für jeden Grad des hunderttheiligen Thermometers um den 273. Theil ihres bei 0 Grade gemessenen Volums ausgedehnt wird: da jedoch die Wasserdünste als der gewöhnliche Bestandtheil der Atmosphäre im Verhältnisse von 5 : 8 leichter sind als trockene Luft; so pflegt man diese Ausdehnung auf den mittleren Wereh $^1/_{250}$ zu vergrößern. Bei dem Mangel zuverlässiger Beobachtungen über die Wärmeabnahme der Luft mit zunehmenden Höhen (916), kann man das arithmetische Mittel der an den beiden Stationen beobachteten Temperaturen, für die mittlere Temperatur der ganzen zwischen denselben enthaltenen Luftsäule annehmen. Heißen also T, t diese Temperaturen, also $^1/_2\,(T+t)$ die Temperatur der zwischenliegenden Luftsäule, ferner h' ihre Länge bei 0 Grade, so hat die durch die Wärme ausgedehnte Luftsäule eine Länge

$$h=h'\left[1+\frac{^1/_2(T+t)}{250}\right]=h'\left[1+\frac{2(T+t)}{1000}\right]$$

und es muß zu diesem Ende der Barometerkoeffizient 18336 mit dem Faktor

$$1+\frac{2(T+t)}{1000}$$

multiplizirt werden. Man nennt diesen Faktor die Korrektion wegen der Temperatur der Luft. Sind ferner T', t' die Temperaturen des Quecksilbers in beiden Stationen, mithin $T'-t'$ ihr Unterschied; so wird der Barometerstand b der oberen Station auf die Temperatur des Barometerstandes B in der unteren Station gebracht, wenn man

$$b' = b\left[1 + \frac{T'-t'}{5550}\right] \text{ setzt,}$$

weil nach (901) die Ausdehnung des Queckſilbers für jeden Grad des hundertheiligen Thermometers dieſen Werth hat. Hiermit erhält man für den Höhenunterſchied in Metern die Formel

$$IV.\quad H = 18336\left[1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right]\left[\log.B - \log.b\left(1 + \frac{T'-t'}{5550}\right)\right]$$

921. Anmerkung 2. Es bleibt noch übrig diejenigen Korrektionen zu entwickeln, welche von der Abnahme der Schwere bei zunehmenden Höhen abhängen. Da die Erde eine an den Polen abgeplattete Geſtalt beſitzt, ſo wird die Schwere vom Aequator gegen die Pole zunehmen. Aus den Beobachtungen der Länge eines Sekundenpendels an verſchiedenen Orten unſerer Erde ergibt ſich die Schwere g' unter einer Polhöhe φ, wenn die Schwere unter der Polhöhe von 45 Graden gleich g angenommen wird, nach der Formel

$$g' = g(1 + 0{,}002837\cos 2\varphi)$$

mithin kommt der Faktor $1 + 0.002837\cos 2\varphi$ in die Formel *IV* zu multipliziren, um die Korrektion wegen der Polhöhe des Ortes zu erhalten, an welchem eine Höhenmeſſung mittelſt des Barometers vorgenommen wird.

Eine zweite Korrektion bezieht ſich auf die Verminderung des Gewichts eines Körpers, wenn deſſen Entfernung vom Mittelpunkte der Erde wächſt, und zerfällt in zwei Theile: in die Korrektion des Gewichts der Luftſäule, und des Gewichts der Queckſilberſäule. Heißt P das Gewicht der Luftſäule zwiſchen den beiden Stationen, a der Abſtand ihrer Mitte von der Meeresfläche, und r der Halbmeſſer der Erde; ſo ergibt ſich ihr Gewicht P', welches dieſelbe Luftſäule an der Meeresfläche hätte, wenn man ſetzt

$$r^2 : (a+r)^2 = P : P', \text{ dies gibt}$$

$$P' = \frac{P(a+r)^2}{r^2} = P\left(1 + \frac{2a}{r}\right) \text{ nahe,}$$

dagegen wird das Gewicht q der Queckſilberſäule im Barometer in

der Entfernung a von der Meeresfläche, wenn das Barometer an die Meeresfläche versetzt wird, ein Gewicht $q'=q(a+r)^2:r^2$ haben. Letzterer Ausdruck gibt sofort

$$\log.q' = \log.q + 2\log.\left(1+\frac{a}{r}\right) = \log.q + \frac{2Ma}{r} \text{ nahe}$$

wenn M den Modulus der briggischen Logarithmen bedeutet, und man bei der Entwickelung der logarithmischen Reihe nach (A. 645) bei ihrem ersten Gliede stehen bleibt. Durch beide Korrektionen wird der Barometer Koeffizient (919) vergrößert. Gewöhnlich werden Höhenmessungen von Bergen vorgenommen, deren Höhe 2400 Metres nicht übersteigt, man kann daher $a=1200$ setzen, und da $r=6366198$ Metres beträgt, so erhält man $2a:r=0.0003770$, und die **Korrektion der Luftsäule** wird der Faktor 1.0003770. Ferner ist, wenn man in Formel ***III.*** a statt H setzt, und die eben angeführten Korrektionen anbringt

$$a = N\left(\log.\frac{B}{b}+\frac{2Ma}{r}\right)\left(1+\frac{2a}{r}\right)$$

verrichtet man die Multiplikation so, daß man bei der ersten Potenz des sehr kleinen Bruches $a:r$ stehen bleibt, und bestimmt den Werth von a aus dieser Gleichung; so folgt

$$a = \frac{N\log.(B:b)}{1-N[\log.(B:b)+2M]:r} = N\log.\frac{B}{b}\left[1+\frac{N}{r}\left(\log.\frac{B}{b}+2M\right)\right]$$

es ist aber für $a=1200$, $b=657$ Millimeter, daher

$$\left.\begin{array}{rl} \log.\dfrac{B}{b} = \log.\dfrac{760}{657} = 0.0632482 & \\ 2M = 0.8685889 & \\ \text{Summe} = 0.9318371 & \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{ferner ist} \\ \log.18336 = 4.2633046 \\ \log.0.931837 = 0.9693400-1 \\ \hline 4.2326446 \\ \log.6366198 = 6.8038801 \\ \hline 0.4287645-3 \end{array}$$

diesem Logarithmus entspricht die Zahl 0.0026838, somit ist die

Digitized by Google

Korrektion der Quecksilbersäule der Faktor 1.0026838. Nun hat man den verbesserten Barometerkoeffizienten

$$N=18336\times 1.000377\times 1.002684=18393,$$

daher wird die Formel der Höhenmessung für Metres

$$V.\quad H=18393(1+0.002837\cos 2\varphi)\left[1+\frac{2(T+t)}{1000}\right]\log.\frac{B}{b'}$$

wo Kürze halber $b'=b\left(1+\frac{T'-t,}{5550}\right)$ gesetzt wurde.

922. Anmerkung. 3. Da 18393 Metres $=58185$ Wiener Fuß sind, so erhält man den Höhenunterschied sofort im Wiener Fußmaße, sobald man nur diesen Werth statt jenen für den Barometerkoeffizient annimmt. Bei der Berechnung der Differenz $\log.B-\log.b'$ kann man, weil dieselbe den Logarithmus des Quotienten $B:b'$, darstellt, die Barometerstände B, b' nach einem beliebigen Maße nehmen, denn die Wahl der Einheit, nach welcher zwei Größen gemessen werden, hat auf ihr Verhältniß keinen Einfluß, nur müssen die Temperaturen T, t, T', t', nach dem hunderttheiligen Thermometer bestimmt sein: wofern sie also an dem Reaumür'schen beobachtet worden sind, auf jenes reduzirt werden, welches bekanntlich einfach dadurch geschieht, daß man sie mit $^5/_4$ multiplizirt. Hierdurch erhält man für Wiener Fußmaß und das achtzigtheilige Thermometer

$$VI.\quad H=58185(1+0.0028\cos 2\varphi)\left[1+\frac{T+t}{400}\right]\log.\frac{B}{b'}$$

$$\text{und } b'=b\left(1+\frac{T'-t'}{4440}\right)$$

Die Literatur dieses interessanten Gegenstandes ist zu weitläufig, um sie auch nur mit einiger Vollständigkeit aufzuführen. Ich begnüge mich daher mit der Angabe folgender wenigen Schriften: J. S. T. Gehlers physikalisches Wörterbuch neu bearbeitet von Brandes, Gmelin, Horner, Muncke, Pfaff. Leipzig 1829 Art. Höhenmessung. *Biot J. B. traité élémentaire d'Astronomie physique. Paris* 1811 *vol.* 3e. 8.

Digitized by Google

2. Der Luftballon.

923. Erklärung. Ein Luftballon oder Aerostat besteht aus einer leichten, biegsamen, luftdichten Hülle, die mit einer Luftart gefüllt ist, welche bei dem gewöhnlichen Drucke der Atmosphäre eine so geringe Dichte hat, daß der Ballon sammt der daran gehängten Belastung ein kleineres Gewicht erhält, als das der durch ihn verdrängten atmosphärischen Luft ist. Dies wird schon erreicht, wenn man den Ballon unten offen läßt und die atmosphärische Luft darin durch Erwärmung mittelst eines unter der Oeffnung in der Glutpfanne angebrachten Feuers verdünnt, oder wenn man den wohl geschlossenen Ballon mit Hydrogengas oder mit Leuchtgas füllt. Je nachdem die eine oder andere dieser 3 Arten des Füllens angewendet wird, heißt der Luftballon nach ihrem Erfinder beziehungsweise: Montgolfier, Charlier, Green.

924. Folgesatz. Der Luftballon, dessen Gewicht geringer ist, als das Gewicht der Luft, deren Platz er einnimmt, steigt in der Luft in die Höhe, bis er in eine Luftschichte kommt, die so dünn ist, daß das Gewicht der vom Luftballon verdrängten Luft jenes des Ballons nicht mehr übertrifft.

925. Folgesatz 2. Da ein Luftballon desto schwerer ist, je größer seine Oberfläche, und eine desto größere Steigkraft besitzt, je größer sein Volum ist; so folgt daß die Steigkraft verschiedener Luftballone mit ihren Durchmessern und zwar rascher wächst, als ihr Gewicht; zugleich muß es ein Minimum des Durchmessers geben, unter welches ein Luftballon bei einer Hülle von gegebener Materie nicht aufsteigen kann. Ein solches Minimum ist natürlich bei Charlieren kleiner als bei Montgolfieren.

926. Anmerkung. Die leichteste bis jetzt bekannte Substanz, aus welcher die kleinsten Montgolfieren gemacht werden können, ist die Matte der Elfen-Raupe. Man kann diese Thiere so ziehen, daß sie Montgolfieren weben, welche ohne Nath etwa 2 bis 3 Fuß hoch, und fast eben so weit sind, daher 16 bis 20 Kubikfuß Luft

Digitized by Google

fassen: wird dieses Gewebe unten durch einen dünnen Fischbeinstreifen ausgespannt, so kann es schon durch einen angezündeten Fidibus zum Steigen gebracht werden. Die kleinsten Seifenblasen, welche auf eine den Physikern bekannte Weise durch Wasserstoffgas in die Höhe steigen, messen kaum einen Zoll im Durchmesser, und sind wahre Charlieren. Als nächst leichtere und dauerhaftere Hülle nimmt man zu Charlieren die sogenannten Schafhäutchen, welche man beim Lammen der Schafe erhält, über mit Unschlitt bestrichenen Formen ausspannt, und durch ihren eigenen Leim zusammenklebt, um kleine Ballons von 3 bis 30 Zoll Durchmesser daraus zu verfertigen. Eben so dienen die Goldschlägerhäutchen zu Luftballons, wenn blos eine Belustigung damit beabsichtigt wird. Zu größeren Ballons nimmt man leichte seidene Zeuge, und macht sie durch einen Firniß aus Leinöl und Terpentinspiritus weniger durchdringlich für das Wasserstoffgas. Den Quadratfuß solcher Taffents berechnet man zu $^3/_4$ Unzen.

927. Erklärung. Größere Luftballons, die zugleich dazu dienen Menschen und Thiere in der Luft zu erheben, nennt man Aerostaten. Um den größten Inhalt bei der kleinsten Oberfläche zu erhalten, wählt man die Kugelform, und überzieht den Ballon zur größeren Haltbarkeit und um die Gondel der Aeronauten daran zu befestigen, mit einem Netze von Schnüren, bringt außerdem am oberen Theile die Sicherheitsklappe an, welche durch eine Feder zugehalten wird, vermittelst eines in die Gondel herabhängenden Seiles aber geöffnet werden kann, um das Zerplatzen des Ballons bei dem geringeren Luftdrucke in größerer Höhe zu vermeiden, obgleich er aus Rücksicht hierauf nur zu etwa $^3/_4$ seines Inhalts gefüllt wird. (Siehe Fig. 212.)

928. Anmerkung. Zur Füllung einer Charliere wird Schwefelsäure (Vitriolöhl) Eisenfeile und Wasser verwendet, welche in zwei oder mehrere Fässer, die mittelst Schläuche mit dem Ballon in Verbindung stehen, gethan werden. Man rechnet meistens auf einen Kubikfuß Gas, 4 Unzen Eisenfeile, 6 Unzen Vitriolöl und 18 Unzen Wasser. Das auf solche Weise bereitete Gas ist etwa $^1/_7$ vom

Digitized by Google

Gewichte der atmosphärischen Luft. Dem Gewichte nach gehören auf einen Theil Wasserstoffgas 27 Theile Eisen, 49 Theile Schwefelsäure und etwa 400 Theile Wasser.

929. Anmerkung 2. Die Zeuge, aus welchen die Aërostaten verfertigt werden, sind ebene Flächen. Um aus ihnen die Kugelform möglichst genau zu erhalten, ist erforderlich eine ebene durch zwei symmetrische krumme Linien eingeschlossene Figur oder eine Chablone zu verzeichnen, nach welcher die einzelnen Stücke Zeuge ausgeschnitten, und dann an einander genäht den kugelförmigen Körper geben. Zu diesem Ende mache man die Linie AB (Fig. 213) der Hälfte des größten Kreises der zu verfertigenden Kugel gleich, halbire sie in C, bestimme wie viele Streifen die Kugel bilden sollen, und nehme CD der durch die doppelte Anzahl der Streifen dividirten Peripherie gleich, trage die gefundene Größe auf einen Maßstab, und theile diese in 1000 Theile, den Raum AC aber in 18 gleiche Theile in den Punkten a, b, c, $d \ldots r$, und errichte die Normalen von unbestimmter Länge in diesen Punkten. Die Länge derselben nehme man

$a=996$	$e=906$	$i=707$	$n=423$
$b=985$	$f=866$	$k=643$	$o=342$
$c=966$	$g=819$	$l=574$	$p=259$
$d=940$	$h=766$	$m=500$	$q=174$
			$r=87$

solcher Theile, deren 1000 die Länge CD bilden. Bei kleineren Kugeln wird es zureichen CD in 100 Theile zu theilen, und für die Normalen a, b, c, $d \ldots r$ ihren zehnten Theil zu nehmen: es wäre also dann $a=100$, $b=98$, $c=97$, $d=94$, $e=91$, $f=87$, $g=82$ u. s. f. solcher Theile, deren 100 die Länge CD ausmachen. Zieht man nun durch die Endpunkte dieser Normalen aus freier Hand eine krumme Linie AD, und macht die übrigen drei Theile der Figur dieser ersteren ACD gleich; so ist die Chablone fertig. Beim Ausschneiden des Zeuges nach dieser Form hat man noch darauf zu sehen, daß für die Nähte ein hinreichender Raum gelassen wird. Daß bei Charlieren die Nath mit Firniß überstrichen und dichter sein müsse als bei Montgolfieren ist an sich klar. Die

Digitized by Google

Zahl der Streifen, aus welchen man die Kugelform bilden will, fällt zwischen 12 und 24: mit ihrer Anzahl nähert sich der zu fertigende Ballon immer mehr der Kugelgestalt, auch pflegt man zum bequemen Anbinden beim Füllen des Ballons die Streifen unten etwas zu verlängern, oben aber die Spitzen alle wegzuschneiden und eine Kappe vom nämlichen Zeuge aufzuleimen, in welcher sofort auch die Sicherheitsklappe (927) ihren Platz erhält.

930. **Lehrsatz.** Den Durchmesser der kleinsten Kugel, welche als Luftballon gefüllt, gerade in der Atmosphäre schweben würde, erhält man, wenn man das sechsfache Gewicht eines Quadratfußes des zur Hülle verwendeten Stoffes durch den Unterschied des Gewichts eines Kubikfußes der gemeinen und der zum Füllen gebrauchten Luft dividirt.

Beweis. Sei d der gesuchte Durchmesser des kugelförmigen Ballons, also $\frac{1}{6}d^3\pi$ sein Inhalt, und $d^2\pi$ seine Oberfläche: sei ferner a das Gewicht eines Kubikfußes atmosphärischen Luft, b jenes der zum Füllen verwendeten Luft, und c das Gewicht eines Quadratfußes vom Stoffe, aus welchem die Hülle besteht; so ist $\frac{1}{6}ad^3\pi$ das Gewicht der durch den Ballon verdrängten Luft, $\frac{1}{6}bd^3\pi$ das Gewicht der Füllung und $cd^2\pi$ jenes der Hülle. Man hat also die Gleichung

$$\frac{1}{6}ad^3\pi=\frac{1}{6}bd^3\pi+cd^2\pi, \text{ oder } \frac{1}{6}(a-b)d=c, \text{ woraus}$$

$$d=\frac{6c}{a-b} \text{ folgt.}$$

931. **Folgesatz.** Bei diesem Durchmesser wird der Ballon in der Luft schweben; soll er aber steigen, so muß dessen Durchmesser größer genommen werden, als dieser Werth. Dieses ist um so mehr bei Aërostaten erforderlich, bei welchen noch das Gewicht der an dem Seilennetze hängenden Gondel, ferner das Gewicht der zu hebenden Menschen oder Thiere und des Ballastes in Anschlag zu bringen ist. Bezeichnet man diese Belastung mit q, so muß

$$\frac{1}{6}(a-b)d^3\pi=cd^2\pi+q, \text{ woraus sich}$$

d durch Auflösung der kubischen Gleichung

Digitized by Google

$$d^3 - \frac{6cd^2}{a-b} - \frac{6q}{(a-b)\pi} = o$$

ergibt. Bei Montgolfieren ist gewöhnlich $b = {}^2/_3 a$, bei Charlieren hingegen $b = {}^1/_7 a$, bei Green $b = {}^1/_4 a$.

932. Aufgabe. Die Expansivkraft und die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft in irgend einer Höhe über der Erdfläche zu bestimmen.

Auflösung. Heißt P der Druck der Atmosphäre an der Oberfläche der Erde, r ihren Halbmesser, z die Erhöhung der Luftschichte, bei welcher die Expansivkraft p und die Dichte δ gefunden werden soll; so hat man für

$$k = \frac{grz}{n(1+\beta\tau)(r+z)}, \quad n = \frac{P}{D}$$

wo g die Beschleunigung der Schwere an der Erdoberfläche, β den Ausdehnungskoeffizienten (912) der Luft durch die Wärme, τ die mittlere Temperatur der Luftsäule und e die Basis der natürlichen Logarithmen vorstellt

$$p = Pe^{-k}, \quad \delta = \frac{Pe^{-k}}{n(1+\beta\tau)}$$

Beweis. Sei g' die Beschleunigung der Schwere in der Höhe z von der Oberfläche der Erde; so gibt die Formel 3) in (798) für $X=o$, $Y=o$, $Z=-g'$ sofort 1) $dp = -\delta g' dz$.

Sei ferner v das Volumen der atmosphärischen Luft bei o Graden, P ihre Expansivkraft und D ihre Dichtigkeit an der Oberfläche der Erde: steigt nun das Thermometer um τ Grade, so sei v', D' dieses Volumen und diese Dichtigkeit, vorausgesetzt, daß der auf die Einheit bezogene Druck derselbe bleibt, und man hat (912) $v' = v(1+\beta\tau)$, oder weil die Dichtigkeiten den Inhalten verkehrt proportional sind, $D' = D:(1+\beta\tau)$. Man nehme nun an, der Druck ändere sich, ohne daß die Temperatur τ wechselt, wodurch P in p, D' in δ übergeht; so folgt nach dem Mariotte'schen Gesetze

Digitized by Google

$$2)\quad p=\frac{P\delta}{D'}=\frac{P\delta(1+\beta\tau)}{D}=n\delta(1+\beta\tau)$$

Durch Division der Ausdrücke 1) und 2) ergibt sich

$$3)\quad \frac{dp}{p}=-\frac{g'dz}{n(1+\beta\tau)}=-\frac{gr^2dz}{n(1+\beta\tau)(r+z)^2}$$

weil bekanntlich $g'=gr^2:(r+z)^2$ ist.

Da τ als das arithmetische Mittel der Temperaturen an den beiden Enden der Luftsäule konstant ist; so gibt die Integration der Formel 3)

$$\lambda p=\frac{gr^2}{n(1+\beta\tau)(r+z)}+C$$

für $z=o$ wird aber $p=P$, also

$$\lambda P=\frac{gr}{n(1+\beta\tau)}+C$$

und der Unterschied dieser beiden Ausdrücke liefert

$$4)\quad \lambda\frac{p}{P}=-\frac{grz}{n(1+\beta\tau)(r+z)}=-k.$$

Geht man nun von den Logarithmen zu den Exponentialgrößen über, so erhält man aus 4) sofort die obigen Ausdrücke.

933. Aufgabe. Die Geschwindigkeit des in eine beliebige Höhe aufgestiegenen Ballons zu bestimmen.

Auflösung. Mit Beibehaltung der in (932) erklärten Bezeichnungen hat man, wenn c die mittlere Dichtigkeit des Luftballons bedeutet, dessen Geschwindigkeit

$$\frac{dz}{dt}=\sqrt{\left[\frac{2P}{c}(1-e^{-k})-\frac{2grz}{r+z}\right]}.$$

Beweis. Sei v das Volum des Ballons und m seine Masse, c die mittlere Dichtigkeit also $m=cv$; so ist der Ueberschuß des Gewichts der Luft, die er beim Steigen in jedem Augenblicke aus ihrer

Digitized by Google

Stelle treibt $v\delta g' - mg' = g'v(\delta - c)$. Die bewegende Kraft des Ballons ist somit

$$\frac{md^2z}{dt^2} = g'v(\delta - c), \text{ oder } \frac{cd^2z}{dt^2} = g'(\delta - c)$$

setzt man hierin statt g, und δ ihre Werthe (932), so folgt

$$\frac{cd^2z}{dt^2} = \frac{Pgr^2e^{-k}}{n(1+\beta\tau)(r+z)^2} - \frac{cgr^2}{(r+z)^2}$$

multiplizirt man beide Seiten mit $2dz$, integrirt und bezeichnet durch C die willkürliche Konstante der Integration, so erhält man

$$\frac{cdz^2}{dt^2} = C - 2Pe^{-k} + \frac{2cgr^2}{r+z}$$

da der Luftballon von der Oberfläche der Erde mit der Geschwindigkeit Null ausgegangen ist; so hat man gleichzeitig

$$z = o, \frac{dz}{dt} = o, \text{ mithin ist } C = 2P - 2cgr,$$

und hieraus ergibt sich vollständig

$$\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{2P}{c}(1 - e^{-k}) - \frac{2grz}{r+z}$$

und durch Ausziehung der Quadratwurzel die Geschwindigkeit wie oben.

934. Folgesatz. Setzt man $\frac{d^2z}{dt^2} = o$, so ergibt sich

$$\frac{Pgr^2e^{-k}}{n(1+\beta\tau)(r+z)^2} = \frac{cgr^2}{(r+z)^2}, \text{ oder } -k = \lambda n\frac{(1+\beta\tau)c}{P} = \lambda A \text{ Kürze halber}$$

und nach Substitution des Werthes für k erhält man

$$z = -\frac{nr(1+\beta\tau)\lambda A}{gr + n(1+\beta\tau)\lambda A}$$

Digitized by Google

als die Höhe, in welcher der Luftballon im Gleichgewichte bleiben würde, wenn er daselbst ohne erlangte Geschwindigkeit ankäme.

935. *Folgesatz.* Setzt man aber $\frac{dz}{dt}=o$, so liefert die transzendente Gleichung

$$e^{\frac{-grz}{n(1+\beta t)(r+z)}}+\frac{2grz}{r+z}=1$$

die größte Höhe, bis zu welcher sich der Ballon in der Atmosphäre erheben würde, wenn man annimmt, daß seine Masse und sein Volumen sich nicht änderten.

VI. Anwendungen des Luftdruckes zum Wasserheben.

1. Von den Hähnen und Ventilen.

936. **Erklärung.** Die Vorrichtungen, welche dazu dienen, um Flüssigkeiten aus einem Gefäße ablassen und den Abfluß nach Belieben hemmen zu können, heißen entweder **Hähne** oder **Ventile**; bei jenen wird in der Regel der Abfluß durch eine von Außen angebrachte Kraft bei diesen hingegen schon durch den Druck der abgesperrten Flüssigkeit selbst bewirkt. Ein einfacher **Hahn** oder **Sperrhahn** (Fig. 214) besteht aus einer Röhre *ab*, welche in *cd* quer durchbohrt ist, um in dieser kegelförmigen Durchbohrung, **Lager**, einen genau passenden kegelförmigen Zapfen, den **Schlüssel**, aufzunehmen. Dieser Schlüssel ist in der Richtung seines Durchmessers in jener Stelle durchbohrt, welche bei der in der Figur angedeuteten Stellung mit der Richtung des Kanals *ab* übereinstimmt, da dann ein freier Durchfluß der Flüssigkeit von *a* gegen *b* erfolgen kann: wird aber der Schlüssel um seine Axe gedreht, so stellt sich die massive Wand des Schlüssels gegen die Durchflußöffnung des Kanals *ab*, und sofort ist der Abfluß unterbrochen.

937. **Anmerkung.** Die kegelförmige Bohrung des Lagers wird durch die kegelförmige Gestalt des Schlüssels in jeder seiner Stellungen so ausgefüllt, daß keine Flüssigkeit zwischen dessen Wänden abfließen kann, und man hat bei dieser Einrichtung noch den Vortheil, daß nach

Digitized by Google

allmäligen Abnutzen der Hahn tiefer eindringt und der genaue Schluß nicht gestört wird, da sich der Schlüssel immer wieder passend einreibt. Damit aber bei dieser Gestalt des Hahnes der Schlüssel nicht im Lager gehoben werde, befindet sich am untern in *c* vorragenden Theile des Schlüssels ein Gewinde, welches in die Mutter einer ringsum vorspringenden kreisförmigen Platte paßt, wodurch die Platte an die untere Wand des Lagers gedrückt, und die Reibung des Schlüssels nach Erforderniß vermehrt wird. Im Allgemeinen soll der Querschnitt der Durchbohrung des Hahnes eben so groß sein, als jener des Kanals der Röhre. Zu diesem Ende ist jener Theil des Hahnes, in welchem sich die Durchbohrung befindet, mit einer größeren Metallmasse versehen, damit die Wände die nöthige Stärke und der Schlüssel die erforderliche Länge erhalte; diese letztere soll wenigstens den dreifachen Durchmesser der Durchbohrung betragen, damit die feste Wand die Entweichung der Flüssigkeit sicher hindert.

938. Erklärung. Der **Kopfhahn** oder **Pippe** hat die Bestimmung die Flüssigkeit in einer unter einem rechten Winkel geänderten Richtung fortzuleiten. Zu diesem Ende wird der Schlüssel *cb* (Fig. 215) nach seiner ganzen Länge von unten nach aufwärts so weit ausgehöhlt, daß ein Seitenloch diese Höhlung mit dem Rohre *a* in Verbindung setzt, so daß in dieser Stellung eine Flüssigkeit bei *a* eintreten, und am untern Theile des Schlüssels bei *b* abfließen kann, während durch die Drehung des Hahnes dieser Durchfluß abgesperrt wird. Sind beide Durchbohrungen des Sperr- und Kopfhahns in einem Schlüssel vorhanden, kann nämlich bei einer Stellung des Schlüssels die Flüssigkeit geradlinig von *A* gegen *B* (Fig. 216) geleitet werden, und wenn der Schlüssel um einen Viertelkreis gedreht und die Oeffnung *c* an dessen Oberfläche nach *a* gebracht wird, die Flüssigkeit in einem rechtwinkligen Kanal *cde* abfließen, so heißt der Hahn ein **Dreiwegehahn**, oder weil er vorzüglich bei Luftpumpen seine Anwendung findet, ein **Luftpumpenhahn**.

939. Erklärung. Wird der Hahn mit zwei Durchbohrungen in derselben Ebene versehen, so entsteht der sogenannte **Vierwegehahn**. Hat der Schlüssel die in *A* (Fig. 217) angedeutete Stellung, so ist

Digitized by Google

das Rohr *a* mit dem Rohre *c*, und gleichzeitig das Rohr *b* mit dem Rohre *d* verbunden, so daß eine Flüssigkeit von *a* nach *c* und von *b* nach *d* (Fig. 218) entweichen kann. Wird hingegen der Schlüssel um einen Viertelkreis gedreht und in die Lage *B* versetzt, so ist das Rohr *a* mit dem Rohre *b* in Verbindung, während gleichzeitig das Rohr *c* mit *d* verbunden ist, so daß durch die Drehung des Schlüssels eine abwechselnde Verbindung der Röhre *a* mit *b* und *c* so wie der Röhre *c* mit *d* und *a* hergestellt wird.

940. Erklärung. Ist der Kanal einer Röhre von einem größeren Durchmesser, so kann der Abfluß der Flüssigkeit nicht wohl durch einen Hahn regulirt werden, da man sich dann der **Ventile** bedient. Man unterscheidet unter ihnen die Klappenventile, die Kegelventile, die Muschelventile und die Kugelventile.

Das einfachste **Klappenventil** besteht aus einer kreisförmigen Scheibe, (Fig. 218), welche genau auf die Durchflußöffnung paßt, und um ein angebrachtes Charnier gehoben und gesenkt werden kann. Bei kleinen Ventilen wird die Scheibe nur aus Leder angefertigt, und man befestiget die Scheibe mit einem vorstehenden Lappen, welcher die Stelle eines Charniers vertritt. Bei größeren Ventilen schneidet man eine kreisförmige Scheibe von starkem Leder aus, die groß genug ist, die untere Oeffnung zu bedecken, und verbindet sie beiderseits mit dünnen Metallplatten, von denen aber die untere kleiner als die zu verschließende Oeffnung ist, damit der hervorstehende Rand der ledernen Scheibe sich ringsum an die Oeffnung anlegen kann. Wenn die Durchflußöffnung für eine einfache Klappe zu weit ist, so wird in der Mitte der Oeffnung ein Quersteg angebracht, und man bedeckt sie mit zwei halbkreisförmigen Klappen, die sich zu beiden Seiten des Quersteges heben und senken, und dadurch die Oeffnung freilassen oder absperren, **doppeltes Klappenventil**. Das Leder solcher Klappenventile wird der Dauerhaftigkeit und eines genaueren Anschließens wegen in einer Mischung von Talg und Oel getränkt, welches Tränken von Zeit zu Zeit erneuert wird.

941. Erklärung. Wenn am oberen Theile der Durchflußöffnung eine kegelförmige Höhlung angebracht wird, in welche ein

kegelförmiger Deckel genau eingepaßt ist, und also die Durchflußöffnung verschließt, so oft er in der entsprechenden Höhlung liegt, so heißt die Vorrichtung ein **Kegelventil** (Fig. 219). Beide Theile, Deckel und Höhlung werden gewöhnlich von Metall angefertigt. Um den Deckel stets in seiner richtigen Lage zu erhalten, befestiget man an der unteren Fläche desselben senkrecht einen dünnen Stift, welcher durch ein Loch des Quersteges geht, der am unteren Theile der Höhlung angebracht ist, so daß beim Heben und Senken des Deckels dieser Stift in dem Loche des Steges auf- und abgleitet, wobei ein unten am Stift angebrachter Knopf das zu hohe Heben des Deckels verhindert, wenn der Knopf gegen den Steg gelangt. Eine Abart des Kegelventils ist das **Stoßhebeventil**, dieses besteht aus einem Rohre *d* (Fig. 220), welches mit dem Gehäuse *e* luft- und wasserdicht verbunden ist. Der Boden des Gehäuses hat bei *e* eine kegelförmige Oeffnung, in welche ein darnach geformter kegelförmiger Stöpsel paßt, und das Ventil bildet. Dieses Ventil ist mit einer Stange *bc* verbunden, welche in *a* so eingepaßt ist, daß die Stange zwar auf- und abwärts bewegt werden, doch aber keine Flüssigkeit bei *a* durchdringen kann: die untere Verlängerung des Stieles *c* bewegt sich in einem in der Mitte durchbohrten Querstück, wodurch die lothrechte Bewegung des Stieles auf- und abwärts gesichert ist. Wird nun mittelst des Ringes bei *b* der Stöpsel auf einen Augenblick gehoben, so tritt das Wasser von *c* in das Gehäuse *e*, und entweicht durch das Rohr *d*.

942. **Erklärung.** Ist statt der kegelförmigen Gestalt der Deckel so wie die Höhlung nach einer Rotationsfläche so ausgearbeitet, daß jener diese genau ausfüllet, so heißt das Ventil ein **Muschelventil**. Auch die Muschelventile sind zur Sicherung ihrer richtigen Stellung mit einem lothrechten Stifte befestiget, welcher in der kreisrunden Oeffnung des Steges auf- und niedergeht. Einen speziellen Fall, der Muschelventile bildet das **Kugelventil** (Fig. 221). Dieses besteht aus einer halbkugelförmigen Höhlung und einer von nahe demselben Halbmesser ausgearbeiteten Kugel, welche ganz frei auf der Höhlung aufliegt, und dadurch die Oeffnung verschließt. Die in der senkrecht stehenden Röhre aufsteigende Flüssigkeit drückt die Kugel in die Höhe, wodurch die Oeffnung frei wird, und die Flüssigkeit durchfließen kann:

Digitized by Google

allein sobald dieser Druck von unten nach oben wieder abnimmt, fällt die Kugel in die Höhlung wieder zurück, wo sie in jeder beliebigen Lage die Durchflußöffnung schließt.

2. Von den Kolben und Stiefeln.

943. **Erklärung.** Unter die Maschinenbestandtheile, welche durch Luft, Dampf oder Wasser in Bewegung gesetzt werden, oder umgekehrt diese bewegen, gehören die Kolben und Stiefeln. Jeder inwendig hohle Cylinder, dessen Boden mit einem Ventile oder Hahn geschlossen ist, heißt ein **Stiefel**, das am Boden desselben angebrachte Ventil, das **Stiefelventil**: dagegen nennt man einen festen Cylinder, der den inneren Querschnitt des Stiefels in jeder Lage ausfüllt, so daß weder Luft noch Wasser zwischen ihm und der innern Wand des Stiefels hindurchdringen kann, einen **Kolben**. Das Auf- und Niedergehen des Kolbens im Stiefel wird vermittelst einer eisernen Stange bewirkt, welche am Körper des Kolbens befestigt ist, und **Kolbenstange** heißt. Man unterscheidet **Druckkolben** und **Saugkolben**; bei jenen ist der Körper des Kolbens ganz, bei diesen durch eine cylindrische Oeffnung zur Aufnahme eines Ventils, welche das **Kolbenventil** heißt, unterbrochen.

944. **Anmerkung.** Man verfertiget die Stiefel von Holz, Messing oder Gußeisen: die letzteren verdienen in den meisten Fällen den hölzernen vorgezogen zu werden, wofern sie nur gut gebohrt sind: weil bei guter Ausarbeitung derselben der Körper des Kolbens viel länger dauert, und auch die Reibung des Kolbens an den Wänden eines glatten gußeisernen Rohres weit geringer, als bei einem eben gut gebohrten hölzernen Rohre ist, welches letztere bei einem beständigen Gange gewöhnlich im ersten Jahre seines Gebrauches schon so sehr ausgerieben ist, daß es durch ein neues ersetzt werden muß, während ein gußeiserner Stiefel viele Jahre für den beständigen Betrieb brauchbar bleibt. Stiefel von Glas werden blos bei Luftpumpen angewendet.

945. **Anmerkung 2.** Häufig besteht der Saugkolben aus einem runden vorher in Oel gekochten Holzstücke, welches etwas schwächer, als die Weite des Stiefels ist, also nicht unmittelbar an dem Rohre sich

Digitized by Google

reibt, während der sichere Schluß des Kolbens an das Rohr durch eine lederne Scheibe von etwas größerem Durchmesser erzielt wird, welche ringsum über dem Kolben befestigt ist. Die Figur 222 stellt einen derlei Kolben vor; durch den hölzernen Cylinder geht der Bügel *bac* von Schmiedeeisen, welcher durch die Absätze *b*, *c* und *d*, *e* mit Schrauben an den Kolben befestiget ist. In diesem gabelförmigen Bügel wird oben bei *a* die eiserne Kolbenstange befestiget. Der hölzerne Cylinder ist bei *h*, *i* schräg eingedreht, und es wird daselbst ein lederner Streifen *hfgi* ringsherum angenagelt, und mit seinen beiden Enden zusammengenäht: bei *k* ist ein Klappenventil. Dauerhafter als hölzerne Kolben sind metallene, die auf verschiedene Weise konstruirt werden. Der Kern des Druckkolbens (Fig. 223) ist hier von Gußeisen; mehrere übereinander liegende Scheiben von Leder oder Filz, welche durch zwei eiserne Platten *ab*, *cd* mittelst eines verschraubten Bolzens *ef*, woran die Kolbenstange befestiget wird, zusammengehalten werden, bilden den Körper des Kolbens. Bei dieser Art von Kolben ist jedoch die Reibung anfangs sehr bedeutend, und wenn sie etwas abgenützt sind, lassen sie für das zu hebende Wasser einen zu großen Spielraum; daher sie zweckmäßiger zwischen den beiden metallenen Scheiben mit Hanf oder locker gedrehten hanfenen Stricken umwickelt werden, weil der Hanf anquillt, und dadurch um so besser an die Wand des Stiefels anschließt. Der Druckkolben (Fig. 224) ist aus Gußeisen und ein Stück Leder *abdc* ist ringsherum so angenagelt, daß es zu beiden Seiten hervorsteht, und sich sowohl oben als unten an die innere Fläche des Stiefels anschließt. Der Druckkolben (Fig. 225) besteht aus drei Scheiben *ab*, *cd* von Metall, und einer dritten *ef* von starkem Leder; um die beiden ersteren werden zwei Stücke Leder unter rechten Winkeln beziehungsweise aufwärts und abwärts gewickelt, und das Ganze durch einen starken eisernen Bolzen *gh* zusammengezogen. Alles Leder der Kolben wird öfters mit Oel und Talg gut eingeschmiert. Die Fig. 226 zeigt die Verbindung eines gußeisernen Stiefels, in dessen Boden ein Kegelventil sich befindet, mit einem anderen gußeisernen Rohre: Die Figur 227 aber stellt einen hölzernen Stiefel dar, welcher mittelst eines Klappenventils mit einem zweiten hölzernen

Digitized by Google

Rohre in Verbindung steht: beide Röhren sind der Haltbarkeit wegen mit schmiedeisernen Reifen eingefaßt.

946. Erklärung. Ist der Druckkolben ein gut abgedrehter metallener Cylinder, der bei dem Gange der Maschine auf und abgezogen wird, und wird die Liederung nicht an dem Kolben selbst, sondern an dessen Stiefel angebracht, indem man einen kürzeren Cylinder $abcc'b'a'$ (Fig. 228) mit Rändern auf den Stiefel auflegt, dazwischen zwei oder mehrere lederne Scheiben ae, $a'e'$ und df, $d'f'$ einlegt und auf- und abwärts umschlägt, sodann aber die eisernen Ränder des Aufsatzes und des Stiefels durch Schrauben zusammenzieht; so erhält man einen Druckkolben mit Bramah'scher Liederung: welche Einrichtung den Vortheil gewährt, daß wenn auch das Leder durch die Bewegung des genau passenden Kolbens sich nach einiger Zeit auslauft, doch das schlapp gewordene Leder vom Wasser angedrückt, und auf solche Art der sichere Schluß des Kolbens durch eine längere Zeit unterhalten wird. Die Länge des Druckkolbens muß aber so groß sein, daß er beim Aufziehen nicht aus dem Stiefel fährt. Man nennt diesen aufgesetzten Cylinder die Stopfbüchse.

3. Die Saugpumpe.

947. Erklärung. Die Saug- oder Wasserpumpe ist eine Vorrichtung, um Wasser vermittelst des Druckes der Atmosphäre auf eine bestimmte Höhe zu heben. Sie besteht aus einem mit einem Klappenventil versehenen Stiefel ABC (Fig. 229) von durchaus gleicher Weite, aus einem Saugekolben DE, in welchem ein Kegelventil F enthalten ist, und aus einer Röhre GH vom kleineren Durchmesser, welche an den Boden des Stiefels luftdicht sich anschließt, und die Saugröhre genannt wird.

Die Saugröhre reichet bis unter den Wasserspiegel des Behälters, wo sie bei HH' mit einem Seigerblech versehen ist, um den Eintritt von Sand, Erde oder Steinen in die Saugröhre zu verhindern. An dem Stiefel befindet sich das Ausgußrohr IK an jener Stelle, bis zu welcher das Wasser gehoben werden soll, und der Kolben wird mittelst der Kolbenstange LM auf und nieder bewegt. Der Weg, welchen

Digitized by Google

der Kolben bei einem Hin- und Hergange zurücklegt, wird der Hub oder die Hubhöhe genannt.

948. Anmerkung. Ist der Stiefel aus Gußeisen hergestellt, so bringt man am oberen Ende des Stiefels und am oberen Ende der Saugröhre einen Zwischensatz $AA'B'B$ und $CC'D'D$ (Fig. 230) an, wobei die vordere Platte $A'B'$, und $C'D'$ abgeschraubt werden kann. Die Oeffnung, welche durch die Abnehmung dieser Platte entsteht ist gerade so groß, daß man dem Saugkolben als auch dem Stiefelventile gut beikommen, sie nöthigenfalls herausnehmen und dagegen neue Ventile einsetzen kann. Man erspart sich hierdurch die größere Mühe des Abschraubens des Stiefels von dem Saugrohre und die abermalige richtige Aufstellung derselben. Eben so dient die Zapfenöffnung bei E, um den in den untern Raum der Saugröhre allenfalls hineingekommenen Sand heraus zu räumen.

949. Aufgabe. Die Erhebung des Wassers in der Saugpumpe zu erklären.

Auflösung. Ist der Kolben in seinem tiefsten Stande bei BC (Fig. 229) und wird er vermittelst eines an der Kolbenstange LO angebrachten Hebels aufwärts gezogen; so treibt der ohnehin luftdichte Kolben, dessen Ventil nur noch inniger sich schließt, alle im Stiefel vorhandene Luft vor sich, während im Raume des Stiefels unter dem Kolben ein luftleerer Raum entsteht: die in der Saugröhre eingeschlossene Luft preßt alsdann gegen das Stiefelventil, und es tritt ein Theil derselben in den Stiefel so lange ein, bis die Expansivkraft der Luft oberhalb des Stiefelventils und in der Saugröhre gleich groß wird. Hiedurch wird aber die in der Saugröhre befindliche Luft dünner, ihr Druck also gegen die Wasserfläche MN geringer, als der Druck der Atmosphäre auf dieselbe von außen, daher erfolgt ein Steigen des Wassers in der Saugröhre. Geht nun der Kolben wieder abwärts, so bleibt das Stiefelventil geschlossen, die im Stiefel unter dem Kolben vorhandene Luft wird zusammengedrückt, bis sie durch das Kolbenventil in die Atmosphäre entweicht. Beim fortgesetzten Spiel des Kolbens steigt das Wasser in der Saugröhre immer höher, bis es über die beiden Ventile gelangt, von da es mit edem jKolbenhube zu der Ausgußröhre gehoben wird.

Digitized by Google

950. Aufgabe. Die Höhe zu finden, bis zu welcher das Wasser in der Saugröhre nach dem ersten Kolbenhube steigt.

Auflösung. Bezeichnet man mit k die Länge der Wassersäule von 32 Fuß, welche dem Drucke der Atmosphäre das Gleichgewicht hält, mit h die Länge der Saugröhre, oder die Erhöhung des Stiefels über dem Wasserspiegel, mit l die Länge eines Kolbenhubes, mit m und n die Querschnitte des Stiefels und der Saugröhre, und mit x die Erhebung des Wassers in der Saugröhre nach dem ersten Kolbenhube: so hat man, wenn man Kürze halber $m:n=a$ setzt

$$x = {}^1/_2(h+k+al) - {}^1/_2\sqrt{[(k-h-al)^2+4kh]}.$$

Beweis. Während das Wasser in der Saugröhre aufsteigt, sinkt der Wasserspiegel im Behälter außerhalb der Pumpe: allein wenn die Oberfläche desselben im Vergleich mit dem Querschnitt der Saugröhre sehr groß ist, kann diese Senkung nicht merklich sein, und es läßt sich der Wasserstand im Behälter als unveränderlich betrachten. Ist nun γ das Gewicht der kubischen Einheit des Wassers, so ist der auf die Flächeneinheit bezogene Druck der Atmosphäre $k\gamma$: die in der Saugröhre vor dem ersten Kolbenhube vorhandene Luftmenge nh dehnt sich nach demselben in den Raum $n(h-x)+ml$ aus, heißt also die Expansivkraft der so verdünnten Luft y, so verhält sich nach dem Mariotte'schen Gesetze

$$n(h-x)+ml : nh = k\gamma : y,$$

daher der Druck auf die Flächeneinheit in der Saugröhre oder

$$I.\quad y = \frac{hkn\gamma}{n(h-x)+ml}$$

dieser Druck hält nun mit dem Gewichte $x\gamma$ der in der Saugröhre aufgestiegenen Wassersäule, dem Drucke der Atmosphäre von außen das Gleichgewicht; man hat daher

$$x\gamma + \frac{hkn\gamma}{n(h-x)+ml} = k\gamma, \text{ oder}$$

Digitized by Google

$$[n(h-x)+ml]x+hkn=k[n(h-x)+ml]$$

woraus sich, wenn man Kürze halber $m:n=a$ setzt, zur Bestimmung von x die quadratische Gleichung

$$x^2-x(h+k+al)+akl=o$$

ergibt, durch deren Auflösung man sofort

$$\textit{II.}\quad x=\tfrac{1}{2}(h+k+al)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{[(h+k+al)^2-4akl]}$$

erhält. Nun ist

$$\textit{III.}\quad (h+k+al)^2-4akl=h^2+k^2+a^2l^2+2hk+2ahl-2akl$$
$$=(k-h-al)^2+4kh:\text{ hiemit wird}$$

$$x=\tfrac{1}{2}(h+k+al)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{[(k-h-al)^2+4kh]}$$

ein Ausdruck, welcher zeigt, daß zwar beide Wurzeln von x reell sind, allein da die Wurzel mit dem oberen Zeichen einen Werth gibt, der die Größe k übersteigt, nur jene mit dem unteren Zeichen anwendbar bleibt. Man hat sonach nach dem ersten Kolbenhube die Wasserhöhe in der Saugröhre wie oben.

951. Folgesatz. Findet sich der für x erhaltene Werth größer als h, so muß man schließen, daß ein einziger Kolbenhub zureichend war, um das Wasser aus dem Behälter sogleich in den Stiefel zu heben, wo nicht, so wird hiezu noch ein zweiter oder aber mehrere Kolbenzüge erforderlich sein.

952. Aufgabe. Die Höhe zu finden, bis zu welcher das Wasser in der Saugröhre nach dem zweiten Kolbenhube gestiegen ist.

Auflösung. Ist x' diese Höhe, und werden die früheren Bezeichnungen beibehalten; so hat man

$$x'=\tfrac{1}{2}(h+k+al)-\tfrac{1}{2}\sqrt{[(k-h-al)^2+4(h-x)(k-x)]}.$$

Beweis. Das Volum der Luft in der Saugröhre nach dem ersten Kolbenzuge ist $n(h-x)$: es breitet sich nach dem zweiten Kolbenzuge in den Stiefel aus, und nimmt folglich einen Raum

Digitized by Google

$n(h-x')+ml$ ein, wodurch ihr Druck auf die Wasserfläche in der Saugröhre dem Mariotte'schen Gesetze gemäß sich auf

$$\frac{n(h-x)(k-x)\gamma}{n(h-x')+ml}$$

vermindert: der Druck einer Wassersäule von der Höhe x' ist aber $x'\gamma$; daher hat man

$$\frac{n(h-x)(k-x)\gamma}{n(h-x')+ml}+x'\gamma=k\gamma, \text{ oder}$$

$$n(h-x)(k-x)+x'[n(h-x')+ml]=k[n[(h-x')+ml]$$

woraus sich nach allen Reduktionen

$$x'^2-x'(h+k+al)+k(h+al)-(h-x)(k-x)=o$$

ergibt. Durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung erhält man

$$x'=\tfrac{1}{2}(h+k+al)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{[(h+k+al)^2-4k(h+al)+(h-x)(k-x)]}$$

da aber nach *III.* $(h+k+al)^2-4akl=(k-h-al)^2+4kh$

so folgt einfacher

$$x'=\tfrac{1}{2}(h+k+al)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{[(k-h-al)^2+4(h-x)(k-x)]}$$

wo beide Wurzeln offenbar reell sind, nur muß die mit dem oberen Zeichen, da sie größer als k ist, verworfen werden; man hat sonach x' wie oben in der Auflösung.

953. *Folgesatz.* Ergibt sich der Werth von x' noch immer kleiner als h, so sucht man die nach drei Kolbenzügen bewirkte Erhebung x'' des Wassers in der Saugröhre, welche jedoch sich aus dem für x' gefundenen Ausdrucke unmittelbar ableiten läßt, sobald man daselbst x'' mit x' und zugleich x' mit x vertauscht: dies gibt

$$x''=\tfrac{1}{2}(h+k+al)-\tfrac{1}{2}\sqrt{[(k-h-al)^2+4(h-x')(k-x')]}$$

und allgemein bedeuten x, x' die nach n und $n+1$ Kolbenzügen

Digitized by Google

beziehungsweise bewirkten Erhebungen des Wassers in der Saugröhre, so hat man stets, wenn der Wasserspiegel im Behälter weit genug ist,

$$x' = \tfrac{1}{2}(h+k+al) - \tfrac{1}{2}\sqrt{[(k-h-al)^2+4(h-x)(k-x)]}.$$

954. Erklärung. Senkt sich der Kolben bei jedem Zuge nicht genau bis an den Boden des Stiefels, so daß zwischen der unteren Fläche des Kolbens und dem Stiefelventile noch ein Raum Statt hat, in welchen der Kolben nicht mehr dringen kann; so heißt dieser Raum der schädliche Raum der Wasserpumpe.

955. Anmerkung. Es ist von Wichtigkeit zu bemerken, daß ein solcher in der Wasserpumpe vorhandene Raum ihre Wirksamkeit sehr vermindern ja ganz aufheben kann. Ist nämlich l der vertikale Abstand des Stiefelbodens von der Ausgußröhre, und l' der vom Kolben während eines Zuges durchlaufene Raum, so daß der Kolben bei jedem Zuge in dem Abstande $l-l'$ vom Boden des Stiefels stehen bleibt; so hat man für die Expansivkraft der Luft im Stiefel nach dem ersten Kolbenhube $(k-x)\gamma$: senkt man den Kolben um die Höhe l', so wird das Volum dieser Luftmenge lm auf $(l-l')m$ gebracht, es wächst sonach ihre Dichtigkeit und Expansivkraft auf

$$\frac{(k-x)l\gamma}{l-l'}$$

an, damit aber der Druck, welcher diese im schädlichen Raume abgesperrte Luft nach oben auf das Kolbenventil ausübt, dasselbe zu öffnen vermag, muß dieser Druck den atmosphärischen Druck $k\gamma$, welcher von oben nach unten auf das Kolbenventil wirkt, überwinden können, man muß also setzen

$$\frac{(k-x)l\gamma}{l-l'} > k\gamma$$

woraus $(k-x)l > k(l-l')$ folgt, mithin, wenn man beiderseits die Größe $lx-k(l-l')$ addirt, $kl' > lx$ werden. Jedesmal also, als l'

Digitized by Google

nicht größer ist, als die zu k, x und l zugehörige vierte Proportionalzahl $lx : k$ bleibt das Kolbenventil geschlossen, es wird immer dieselbe Luftmasse in dem Raume zwischen dem Kolbenventil und dem Boden des Stiefels verbleiben, mithin findet keine weitere Erhebung des Wassers Statt. Hieraus ergibt sich die Größe des schädlichen Raumes, bei welchem die Pumpe kein Wasser mehr fördert

$$l - l' = l - \frac{lx}{k} = \frac{l(k-x)}{k}$$

956. Anmerkung 2. Ist einmal das Wasser in den Stiefel gekommen, so kann man es in diesem auf jede beliebige Höhe erheben, allein die Länge der Saugröhre kann nie größer sein als k oder etwa 32 Fuß. Man gibt ihr aber nur $^3/_4$ dieser Höhe oder noch weniger, weil der äußere Luftdruck nicht blos die Wassersäule in der Pumpe, sondern auch die Ventile zu heben hat, ferner ein vollkommen luftdichter Schluß der Ventile und des Kolbens nie erreicht werden kann, und weil wegen des schädlichen Raumes unter dem Kolben, der so klein sein mag, als möglich, kein ganz luftleerer Raum über der Wassersäule hervorgebracht werden kann.

957. Erklärung. Will man vermittelst der Wasserpumpen das Wasser zu größeren Höhen als 32 Fuß bringen, so müssen mehrere Pumpen übereinander angebracht werden, deren eine der nächst höher gelegenen Wasser zuführt. Eine Anordnung dieser Art nennt man Wiederholungspumpen.

958. Aufgabe. Die Wassermenge, welche die Pumpe in einer gegebenen Zeit liefert, zu bestimmen.

Auflösung. Heißt m der Querschnitt des Stiefels, l die Hubhöhe, N die Anzahl der Kolbenzüge in einer Stunde, so ist die in dieser Zeit durch die Pumpe geförderte Wassermenge

$$Q = lmN\gamma.$$

Beweis. Die Wassermenge, welche jeder Kolbenzug liefert ist ein Cylinder, der zur Höhe den vom Kolben durchlaufenen Raum,

Digitized by Google

und den Querschnitt des Stiefels zur Grundfläche hat: multiplizirt man also dieses Wasserprisma mit der Anzahl der Kolbenzüge, die in einer gegebenen Zeit, z. B. in einer Stunde gemacht werden, und mit dem Gewichte der kubischen Einheit Wassers; so erhält man für diesen Zeitraum das Gewicht des durch die Pumpe zu Tage geförderten Wassers.

959. Lehrsatz. Die Kraft, welche am Kolben einer Wasserpumpe anzubringen ist, um denselben ohne Rücksicht auf die Reibung in Bewegung zu setzen, ist dem Gewichte des Kolbens und dem Gewichte einer Wassersäule gleich, deren Basis der Querschnitt des Stiefels, und deren Höhe der Abstand der Oberfläche des gehobenen Wasserprisma von dem Wasserspiegel des Behälters ist.

Beweis. Wenn der Kolben noch kein Wasser geschöpft hat, und also zwischen ihm und der Oberfläche des Wassers in der Saugröhre Luft enthalten ist; so hält die Expansivkraft der eingeschlossenen Luft mit dem Drucke der in der Saugröhre vorhandenen Wassersäule, dem Drucke der Atmosphäre auf den Wasserspiegel des Behälters das Gleichgewicht, und daher ist der nach oben gerichtete Druck auf die Einheit der Fläche gleich $(k-x)\gamma$: der Kolben erleidet aber in einer vertikalen Richtung nach unten den atmosphärischen Druck $k\gamma$; es drückt ihn also in der Richtung der Schwere noch eine Kraft $k\gamma - (k-x)\gamma = x\gamma$, welche für den Querschnitt m des Stiefels die Größe $mx\gamma$ erhält.

Ist aber ein Theil des Wassers bereits über den Kolben gestiegen, etwa bis zur Höhe y vom Stiefelventile an gerechnet; so erleidet der Kolben zwei entgegengesetzte Pressungen, und zwar in der Richtung der Schwere einen Druck $my\gamma + km\gamma$; und wenn y' die Erhebung des Kolbens über den Wasserspiegel des Behälters bezeichnet, so ist der vertikale Druck auf die untere Kolbenfläche nach oben gleich $km\gamma - my'\gamma$, ihr Unterschied, oder

$$my\gamma + km\gamma - (km\gamma - my'\gamma) = m(y+y')\gamma$$

gibt sofort den Druck, welchen der Kolben beim Aufziehen erleidet.

Digitized by Google

960. Folgesatz. Sinkt der Kolben, so ist die Reibung das einzige Hinderniß, welches überwunden werden muß, wobei noch die Kraft durch das Gewicht des Kolbens begünstiget wird. Aus dem Grunde kann man zwei neben einander befindliche Pumpen mittelst einer einzigen Stange, dem Balancier, mit Vortheil in Bewegung setzen, weil beim Sinken des Kolbens in der einen Pumpe, zugleich das Steigen des Kolbens in der anderen durch eine gleichförmig wirkende Kraft erzielt werden kann.

961. Anmerkung. Bei Grundbauen, wo das Wasser nicht über 18 Fuß Höhe zu schöpfen ist, bedient man sich gewöhnlich hölzerner Pumpen, der sogenannten Notbpumpen, die aus vierseitigen Bohlen gut zusammengefügt werden, und (Fig. 231) dargestellt sind. Die Saugröhre bleibt hier gewöhnlich weg, und die Pumpe besteht blos aus einem paralellopipedischen Stiefel AB, an dessen unterm Ende ein Seiger C und das Saugventil B angebracht ist: der mit einer eisernen Kolbenstange DE bewegte Kolben ist ebenfalls vierseitig und wird aus einem hohlen hölzernen Klotze verfertigt, der an seinem unteren Theile abgerundet wird, damit das Wasser leichter durchfließen könne. Inwendig ist ein Klappenventil E angebracht: solche Pumpen werden immer paarweise zusammengestellt und mittelst des Balanciers FG gemeinschaftlich von Menschenhänden bewegt, so daß wenn ein Kolben herabgeht der andere aufgezogen wird. Das gehobene Wasser läuft durch die Rinne IK ab.

962. Anmerkung 2. Auch ist dafür zu sorgen, daß der Kolben nicht eine zu große Geschwindigkeit erhält, weil es sich ereignen kann, besonders wenn die Wassersäule sehr groß ist, daß der Kolben sich geschwinder bewegt, als die Wassersäule nachfolgen kann, worauf dann der Kolben sich von dem unter ihm befindlichen Wasser trennt, und beim Niedergange desselben weniger Wasser durch seine Oeffnung steigt, und also nicht der volle Hub ausgegossen wird. Diese Geschwindigkeit wird der Erfahrung zu Folge nicht größer als $2^1/_2$ Fuß, aber auch nicht kleiner sein dürfen als $^1/_4$ Fuß, welche Werthe für die Grenzen der Geschwindigkeiten des Kolbens anzusehen sind.

Digitized by Google

4. Druckpumpen.

963. Erklärung. Eine **Druckpumpe** ist eine Vorrichtung um durch die Expansivkraft der in einem Stiefel zusammengepreßten Luft Wasser zu jeder beliebigen Höhe zu heben. Ihre wesentlichen Bestandtheile sind: ein **Druckstiefel**, welcher ein Cylinder AB (Fig. 232) ist, dessen Boden geschlossen aber mit einem Ventile D versehen ist, und im Innern einen Druckkolben E hat, welcher mittelst der Kolbenstange EF durch einen Hebel oder einen anderen Mechanismus bewegt werden kann. Am unteren Theile des Stiefels ist zur Seite oberhalb des Ventiles D ein Rohr GH angebracht, welches mit dem Stiefel in Verbindung steht, zuerst von G bis I gebogen ist, wo es ein Ventil hat, dann aber als ein gerade geführtes **Steigrohr** IH sich erhebt und oben ein Ausgußrohr K enthält.

964. Aufgabe. Die Erhebung des Wassers in der Druckpumpe zu erklären.

Auflösung. Beim Gebrauche dieses Druckwerkes steht der untere Theil B des Stiefels unmittelbar unterm Wasser, welches hinauf gefördert werden soll, so daß das Wasser unmittelbar unter das Ventil D im Stiefel bis zu einer Höhe tritt, welche mit dem umgebenden Wasserspiegel MN einerlei ist. Befindet sich der luftdicht schließende massive Kolben E in seinem tiefsten Stande, und wird er mittelst der Kolbenstange EF aufwärts bewegt, so wird bei diesem Hube das Wasser oberhalb des Ventils D über den Wasserspiegel MN steigen, und den Raum im Stiefel unterhalb des Kolbens anfüllen, weil der Druck der Atmosphäre auf den Wasserspiegel MN es zum Steigen nöthiget. Geht aber sodann der Kolben E nieder, so wird das Wasser im Raume DE gedrückt, und da es bei E keinen Ausgang findet, so pflanzt sich dieser Druck gegen das Ventil I und läßt das eingeschlossene Wasser in das Steigrohr IH treten. Wird der Kolben E wieder in die Höhe bewegt, so bewirkt das im Steigrohre befindliche Wasser den Schluß des Ventils I, während das Ventil D sich öffnet, und das Wasser von B aus durch das Ventil D in den Raum unterhalb des Kolbens E

Digitized by Google

tritt, von wo es wiederum beim Niedergange des Kolbens in das Steigrohr *IH* getrieben wird. Beim fortgesetzten Kolbenspiele muß das Wasser im Steigrohre so lange steigen, bis es zum Ausgußrohre *K* gelangt, und dort ausfließt.

965. **Folgesatz.** Heißt l der während eines Hubes vom Kolben durchlaufene Raum oder die Hubhöhe, m der Querschnitt des Stiefels, n der der Steigröhre oberhalb des Ventils *I*, p der kubische Inhalt des Röhrenstückes *GDI*, und x die Höhe in der Steigröhre, bis zu welcher das Wasser oberhalb des Ventils *I* mit jedem Kolbenhube steigt; so erhält man $lm+p$ für den Inhalt der durch den Niedergang des Kolbens bewegten Wassermasse, also $lm+p=p+nx$, woraus $x=lm:n$ folgt, d. i. **das Wasser wird bei jedem Niedergange des Kolbens um so höher steigen, je größer die Hubhöhe und der Querschnitt des Stiefels, und je kleiner der Querschnitt der Steigröhre ist.**

966. **Lehrsatz.** Die Kraft, welche das Aufziehen des Kolbens einer Druckpumpe bewirkt, ist veränderlich und dem Gewichte einer Wassersäule gleich, deren Basis der Querschnitt des Stiefels ist, und deren Höhe dem Abstande der unteren Kolbenfläche vom Wasserspiegel gleich kommt.

Beweis. Um bei der Druckpumpe die Kraft zu bestimmen, die erforderlich ist, den Kolben zu heben, wenn dieser sich in seinem tiefsten Stande befindet, und die ganze Steigröhre mit Wasser gefüllt ist; so ist zu bemerken, daß das Wasser in der Steigröhre, da es vom Ventil *I* getragen wird, von keiner Wirkung auf den Kolben sein kann, und daß der Kolben sowohl oberhalb als unterhalb durch das Gewicht der Atmosphäre einen gleich großen, sich daher aufhebenden Druck zu erleiden hat. Wird also der Kolben durch eine Kraft, welche die Reibung der Ruhe zwischen ihm und dem Stiefel zu überwinden vermag, in Bewegung gesetzt, so bleibt der Luftdruck oberhalb des Kolbens ungeändert, während der Luftdruck auf dessen untere Fläche um die Höhe der dem Kolben nachsteigenden Wassersäule vermindert wird. Heißt also k die Länge

Digitized by Google

der dem Luftdrucke gleichen Wassersäule; so ist die Kraft zur Aufziehung des Kolbens, wenn man von der Reibung abstrahirt, und die Höhe der gehobenen Wassersäule im Stiefel mit x bezeichnet,

$$km\gamma-(k-x)m\gamma=xm\gamma.$$

967. Folgesatz. Bezeichnet man mit h die Länge der Steigröhre vom Ventil I an gerechnet, und mit h' die Erhöhung des Kolbens in seinem höchsten Stande über dieses Ventil, so ist das Gewicht des in der Steigröhre enthaltenen Wassers $hm\gamma$ und das Gewicht des entgegenwirkenden Wassers im Stiefel $h'm\gamma$, und es muß die beim Niedergange des Kolbens erforderliche Kraft $(h-h')m\gamma$ gleich werden, wenn man von der Reibung des Kolbens gegen die Wand des Stiefels absieht.

968. Folgesatz 2. Da nun bei der Druckpumpe zum Niederdrücken des Kolbens viel mehr Kraft erfordert wird, als solchen in die Höhe zu ziehen, so gewinnt man auch bei den Druckwerken nicht nur an Zeit, sondern erlangt auch den Vortheil einer gleichmäßigen Anwendung der Kraft, wenn man die Druckpumpen immer paarweise von gleichen Abmessungen so mit einander verbindet, daß wenn der eine Kolben aufgezogen wird, der andere gleichzeitig niedergeht.

969. Anmerkung. Die Reibung des Kolbens nimmt zu mit dem Umfange also auch mit dem Durchmesser desselben, indem anzunehmen ist, daß alle Theile der Liederung mit gleicher Kraft an die Wand des Stiefels angedrückt werden: weil ferner die Reibung mit dem Drucke wächst, indem eine lederne Liederung mit dem ganzen Gewichte der Wassersäule gegen die Röhrenwand gepreßt wird; so folgt daß, wenn μ einen Erfahrungskoeffizienten und H die Druckhöhe des Wassers bedeutet, der Reibungswiderstand in einem Stiefel vom Durchmesser d den Ausdruck $R=\mu dnH\gamma$ erhält.

Nach den Versuchen Eytelwein's ist für gut polirte metallene Stiefel $\mu=0.0008$, für nachgebohrte metallene Stiefel $\mu=0.0015$, für gut gebohrte hölzerne $\mu=0.0025$, für schlechte hölzerne Stiefel aber $\mu=0.0050$.

Digitized by Google

970. Erklärung. Wird mittelst eines Balancier's der Kolben einer Druckpumpe mit dem Kolben einer Saugpumpe so verbunden, daß jener bei seinem Niedergange Wasser in die Steigröhre treibt, während dieser gleichzeitig aufwärts geht, das Wasser in der Saugpumpe zum Steigen bringt, und es in einen Behälter ausgießt; so heißt eine Vorrichtung dieser Art ein vereinigtes Saug- und Druckwerk. Um den hydrostatischen Druck des Wassers zu vergrößern, steht der Behälter höher und mittelst einer besonderen Röhre, welche dem Stiefel der Druckpumpe Wasser zuführt, in einer festen Verbindung. Eine solche Vorrichtung stellt (Fig. 234) dar, wo *A* den Druckstiefel, *B* die Steigröhre, *C* die Saugpumpe, *DD'* den Balancier, *E* den Behälter und *FF'* die Verbindungsröhre bedeutet, und man sieht, daß blos beim Niedergange des Kolbens *A* Wasser in die Steigröhre getrieben wird.

971. Erklärung 2. Ein einkolbiges Saug- und Druckwerk, bei welchem sowohl beim Niedergange als beim Aufgange des Kolbens Wasser aufwärts getrieben wird, stellt (Fig. 235) im Durchschnitte dar. Es besteht aus dem Cylinder *A* dem Druckstiefel, in dessen Höhlung der feste Kolben *B* mittelst der durch die Wand *FG* luftdicht passenden Kolbenstange *BC* auf- und niedergeht, ferner aus der Saugröhre *D*, welche bei *K* bis an den Behälter *MN* reicht, und aus einer Steigröhre *E*, die bei *L* mit einer Ausgußröhre versehen ist. Die eben beschriebenen cylindrischen Röhren *A*, *D*, *E* sind luft- und wasserdicht mit einander verbunden, aber durch die Ventile *F*, *G*, *H*, *I*, welche so angeordnet sind, daß sich alle vier Ventile nach einer und derselben Seite zu öffnen, in der entgegengesetzten Richtung hingegen schließen, von einander geschieden.

972. Aufgabe. Den Vorgang der Wasserförderung in der einkolbigen Saug- und Druckpumpe zu erklären.

Auflösung. Wenn bei dieser Vorrichtung der massive Kolben *B* aus seinem tiefsten Stande in die Höhe gezogen wird, so wird die Luft im Stiefel *A* oberhalb des Kolbens zusammengepreßt, so

daß sie auf die Ventile *F* und *G* drückt und das Ventil *F* schließt, dagegen das Ventil *G* öffnet, durch welches die im Stiefel *A* vorhandene Luft mittelst der oben offenen Steigröhre entweicht. Gleichzeitig wird aber die im Druckstiefel unterhalb des Kolbens *B* enthaltene Luft verdünnt, so daß der Druck der in der Steigröhre *E* enthaltenen Luft überwiegend auf das Ventil *H* drückt und dieses schließt, während der Druck der im Saugrohre *D* enthaltenen Luft das Ventil *I* öffnet, und die Saugröhre mit dem Raume *O* des Stiefels unter dem Kolben in Verbindung tritt, wodurch die in den Räumen *D*, *K*, vorhandene Luft, da sie sich auch in den Raum *O* ausbreitet, dünner wird und daher ein Steigen des Wassers im Saugrohre bewirkt. So lange der Kolben aufwärts geht, bleiben die Ventile *G* und *I* geöffnet, während die Ventile *F* und *H* geschlossen sind: allein sobald der Kolben seinen höchsten Stand erreicht hat und wieder abwärts bewegt wird, drückt er auf die unterhalb des Kolbens im Raume *O* enthaltene Luft, welche gegen das Ventil *H* wirkt, dieses öffnet und in die Steigröhre entweicht. Bei diesem Niedergange des Kolbens wird auch die Luft im Raume *A* oberhalb des Kolbens verdünnt, was den Schluß des Ventils *G* und das Eröffnen des Ventils *F* zur Folge hat, wodurch zugleich eine Verbindung der Saugröhre *D* mit dem Raume *A* des Stiefels erzielt wird; es bleiben also während einem jeden Niedergange des Kolbens die Ventile *F*, *H* geöffnet, und die Ventile *G*, *I* aber geschlossen: und man sieht, daß sowohl durch den Aufzug als auch durch den Niedergang des Kolbens stets die Luft in der Saugröhre dünner wird, und ein fortgesetztes Steigen des Wassers aus dem Behälter in die Saugröhre bewirkt. Ist nun einmal das Wasser in diesen bis an *a* gestiegen; so ergießt es sich beim nächsten Aufzuge des Kolbens in den Raum *O*, und tritt allenfalls in die Steigröhre bis *b* und beim folgenden Niedergange des Kolbens erhebt es sich in der Steigröhre etwa bis *c*. Von nun an wird das Wasser bei jeder Bewegung des Kolbens, er mag nieder- oder aufwärts gehen, in der Röhre *E* aufsteigen, bis es durch die Ausgußröhre *L* abfließt.

Digitized by Google

973. Erklärung. Soll bei einer Druckpumpe ein ununterbrochener Abfluß durch die Ausgußröhre bewirkt werden, so bedient man sich hiebei eines cylindrischen oben halbkugelförmig geschlossenen metallenen Gefäßes, welches ein Windkessel genannt wird. Eine derlei Druckpumpe stellt (Fig. 236) dar. *A* ist der Druckstiefel, *B* der Kolben, *C* das Stiefelventil, *D* die Verbindungsröhre des Stiefels mit dem Windkessel, welche durch das Ventil *E* abgesperrt werden kann, *F* ist der Windkessel und *G* die damit kommunizirende Steigröhre der Druckpumpe.

974. Folgesatz. Wenn bei irgend einem Niedergange des Kolbens *B* das Wasser bis an *a* im Windkessel *F* gestiegen ist, so wird die in demselben enthaltene Luft abgesperrt, und beim folgenden Niedergange des Kolbens tritt schon das Wasser bis an den Punkt *b* im Windkessel, hiedurch wird aber die Luft in demselben zusammengedrückt, und ihre so vergrößerte Expansivkraft bewirkt ein kontinuirliches Steigen des Wassers in der Steigröhre, welches bei den folgenden Niedergängen des Kolbens, wo das Wasser im Windkessel sich allmälig höher erhebt, in einen ununterbrochenen Abfluß durch die Ausgußröhre übergeht.

975. Erklärung. Eine Feuerspritze hat die Bestimmung aus einem Wasserbehälter einen ununterbrochenen Wasserstrahl an einen gegebenen, gemeiniglich höher gelegenen Ort, zu fördern. Diese Vorrichtung besteht im Wesentlichen aus einem doppelten Druckwerke, einem Windkessel und einer mit Kniegelenken versehenen Ausgußröhre. (Fig. 237) stellt einen vertikalen Durchschnitt derselben vor. In einem parallelopipedischen Kasten *MNN'M'* dem Spritzenkasten befinden sich die zwei Druckstiefel *A*, *B*, deren Kolben *F*, *G* mittelst des Balancier's *CD*, um eine durch *E* gehende Axe auf und abbewegt werden. Die beiden Stiefel sind gewöhnlich aus Messing angefertigt, und sind oben durch eine hölzerne Bohle *MM'* befestiget, in deren Mitte das metallene Lager zur Aufnahme der Drehaxe *E* des Balancier's angebracht ist. Am unteren Ende hat jeder Stiefel zur Seite eine kurze Ansatzröhre, die sogenannte **Gurgel**, welche mit dem Stiefel aus einem Stück gearbeitet ist

Digitized by Google

Am Ende dieser Ansatzröhren sind Ventile K, L angebracht, welche gewöhnlich in schräger Lage sich befinden, und in der Richtung der Gurgel sich öffnen. H, I sind Kegelventile beider Stiefel. Zwischen den Stiefeln ist der Windkessel P aus Kupferblech befestiget. Zur besseren Verbindung dieser Theile ist noch unten eine Bohle angebracht die aber unterhalb der Ventile ausgeschnitten ist, damit das Wasser in die Stiefel gelangen kann. Die kreisförmige Oeffnung O dient zur Befestigung einer mit Kniegelenken versehenen Ausgußröhre oder aber eines langen ledernen oder hanfenen Schlauches, an dessen Enden sich das Ausflußrohr oder Mundstück befindet, aus welchem beim Gebrauch der Spritze das Wasser in Form eines dünnen Strahles und mit großer Gewalt auf eine weite Strecke hinausspringt. Die ganze Vorrichtung ist auf einem wagenartigen vierrädrigen Gestelle fest, um sie leicht von einem Orte zum anderen bringen zu können.

976. Folgesatz. Wird der Spritzenkasten bis zur erforderlichen Höhe mit Wasser angefüllt, und der Balancier in Bewegung gesetzt, so fließt beim Steigen des Kolbens F das Wasser durch das Kegelventil H in den Stiefel und durch das Klappenventil K in den Windkessel, an dessen Grundfläche es sich ausbreitet: beim Niedergehen dieses Kolbens schließt sich H und das im Stiefel A vorhandene Wasser wird in den Windkessel gepreßt. Durch das Niedergehen des Kolbens I wird aber zugleich der Kolben G aufgezogen, und neues Wasser strömt durch das Kegelventil I in den Stiefel B und der eben beschriebene Vorgang wiederhohlt sich. Indem also der Balancier CD um seinen Zapfen E abwechselnd auf und abbewegt wird, füllt sich allmälig der Windkessel mit Wasser, und preßt die darüber befindliche Luft, welche nirgends entweichen kann, die daher bei fortgesetztem Kolbenspiel auf das Wasser zurück drückt, und es durch die in O befestigte Ausgußröhre mit einer angemessenen Geschwindigkeit auszufließen nöthiget. Die Theorie der Feuerspritze findet man weiter unten im Buche V. Kap. IV.

Digitized by Google

5. Die kolbenlosen Pumpen.

977. Erklärung. Die Centrifugalpumpe oder Saugschwungpumpe besteht aus einer vertikalen um ihre festen Zapfen *C*, *D* (Fig. 238) beweglichen Röhre *AB*, der Saugröhre, welche oben in zwei Arme *GH*, *IK* sich theilet, deren Höhlungen mit dem inneren Raume der Röhre in Verbindung stehen. Am Boden der vertikalen Röhre ist das sich nach oben öffnende Klappenventil *N*, und jeder Arm *GH*, *IK* besitzt am Ende zur Seite eine Oeffnung oder kurze Ansatzröhre, welche so angeordnet sind, daß die Oeffnungen nach gleicher Richtung liegen, so daß wenn diese Oeffnung am Arme *GH* in *G* an der vorderen Seite liegt, diese Oeffnung am Arme *IK* in *M* nach hinten angebracht ist. Endlich ist noch am Obertheile der Saugröhre eine verschließbare Oeffnung *Q* angebracht, und der eine Arm *IK* in *L* mit einer trichterförmigen Röhre versehen, welche aber auch geschlossen werden kann.

978. Folgesatz. Schließt man die Seitenöffnungen der Arme bei *G* und *M*, füllt dagegen durch die Trichteröffnung *L* den Apparat mit Wasser, wobei die in der Röhre eingeschlossene Luft durch die Bohrung *Q* entweicht, und wird derselbe, nachdem die Oeffnungen *L*, *Q* geschlossen, und die Seitenöffnungen der Arme geöffnet worden, durch eine am Hebel *EF* angebrachte Kraft mit großer Schnelligkeit um seine Axe *CD* gedreht; so muß die Schwungkraft der Wassermasse dieselbe durch die Seitenöffnungen in ein unterhalb angebrachtes ringförmiges Gerinne *OP* herausschleudern, während der Druck der Atmosphäre auf den Wasserspiegel des Behälters durch das Ventil *N* neues Wasser nachtreibt, und der Ausfluß des Wassers aus den Seitenöffnungen der Arme wird so lange dauern, als die Umlaufsgeschwindigkeit groß genug bleibt, um durch die Centrifugalkraft den Ausfluß zu betreiben.

979. Erklärung. Eine oszillirende Drehpumpe besteht aus einer Saugröhre *AB* (Fig. 239), welche mit einer ringsum verschlossenen cylindrischen Büchse *CD* kommunizirt, an welcher auch die Steigröhre *E* befestiget ist. Innerhalb der Büchse befindet sich eine Scheidewand *FG*, die mit den Seitenflächen der Büchse einen

Digitized by Google

Kanal bildet, dessen beide Ende durch die Ventile F, G wechselweise offen oder verschlossen erhalten werden. Ein paar anderer Scheidewände HIK, LMN schließen mit den ebenen Seitenflächen gleichfalls Kanäle ein, deren ein Ende offen, das andere aber durch die Ventile K, N geschlossen werden kann. Der ganze Apparat läßt sich um eine durch den Mittelpunkt O der Büchse gehende horizontale Axe, mittelst der außen angebrachten Kurbel OP hin und her drehen, d. i. in eine oszillirende Bewegung versetzen.

980. **Folgesatz.** Beim Gebrauche wird die Drehare so befestiget, daß die Saugröhre innerhalb des Wasserspiegels des Behälters fällt, ihr Ende mit einem Hahne verschlossen, die Vorrichtung mit Wasser angefüllt, und sodann beim geöffneten Hahne mittelst der Kurbel geschwungen; so entleert sich, wegen der Centrifugalkraft des in der Büchse vorhandenen Wassers, die Büchse allmälig durch die Steigröhre, während frisches Wasser aus der Saugröhre nachfließt: geschieht nun die Bewegung des Kurbelbuges von F nach G, so fließt das Wasser durch den Kanal HIK in die Steigröhre E, während durch die Oeffnung F gesaugt wird: bei der Bewegung des Kurbelbuges von G gegen F, wird das Wasser durch die Oeffnung N in die Steigröhre gedrückt, und das Unterwasser durch die Oeffnung C angesaugt.

981. **Anmerkung.** Bei der rotirenden Drehpumpe ist die sich drehende Büchse AB (Fig 240) in einer anderen exzentrischen unbeweglichen Büchse CD, die sie an einer Stelle berührt, eingeschlossen: sie trägt die Zungen E, F, G, H, welche in Schlitze eingeschoben sind, hin und her gleiten können, und durch Federn luftdicht gegen die äußere Büchse gedrückt werden. Das Wasser tritt aus dem Saugrohre IK zwischen die Zungen, die es fortführen, und in die Steigröhre L abliefern. Bei anderen Einrichtungen (Fig. 241) sind die Büchsen konzentrisch, und die Bewegung der Zungen wird durch eine sogenannte exzentrische Scheibe regulirt.

982. **Anmerkung 2.** Die Lehre vom Heber, der Luftpumpe, dem Heronsballe und Heronsbrunnen, so wie die Methoden zur

Digitized by Google

Bestimmung der spezifischen Gewichte der Körper und der Abwägung der Körper in der Luft werden hier als in die Physik gehörend übergangen. Man kann hierüber außer den schon angeführten Werken von Gehler, Ettingshausen, Gerstner, *Venturoli* und *Navier* noch zu Rathe zu ziehen:

Georg Gottlieb Schmidt, Anfangsgründe der Mechanik. Frankfurt am Main, 1816. Zweiter Theil.

D. W. A. Rühl, die Mechanik flüssiger Körper. Berlin, 1841.

D. And. Baumgartner, k. k. wirkl. Hofrath, Mechanik in ihrer Anwendung auf Künste und Gewerbe. 2. Auflage, Wien. 1834.

Digitized by Google

Fünftes Buch.

Die Hydrodynamik und Hydraulik.

I. Ausfluss des Wassers aus Gefässen.

983. **Erklärung.** Befindet sich in dem horizontalen Boden eines mit Wasser erfüllten Gefäßes eine Oeffnung, durch welche das Wasser herausfließen kann, so heißt eine solche die **Bodenöffnung** des Gefäßes: ist aber dieselbe in der Seitenwand des Gefäßes angebracht, so heißt sie dessen **Seitenöffnung**. Die lothrechte Höhe des Wasserspiegels über der Bodenöffnung oder aber über den Schwerpunkt der Seitenöffnung, nennt man die **Druckhöhe** oder den **Wasserstand** des Gefäßes. Wenn in das Gefäß so viel Wasser zufließt, als durch die Oeffnung desselben gleichzeitig abfließt, so heißt der Wasserstand **unveränderlich**: sonst aber heißt derselbe **veränderlich**, wenn entweder der Zufluß größer ist als der Abfluß, oder aber wenn kein Zufluß Statt hat.

984. **Anmerkung.** Bei Versuchen über die Wassermengen und Geschwindigkeiten des durch eine Oeffnung der Gefäße ausfließenden Wassers, kommt es darauf an den Zufluß so zu richten, daß der Wasserstand während der ganzen Dauer der Versuche unveränderlich bleibt, und auch keine Bewegung durch den Stoß des zufließenden Wassers in der Wassermasse des Gefäßes erzeugt wird. Hierzu dient folgende Vorrichtung: $AA'B'B$ (Fig. 242) ist ein hölzernes

Digitized by Google

Gestell mit Scheidewänden CC', DD' versehen zur Unterbringung zweier prismatischen Gefäße E, F: deren ersteres oben offen und im Boden eine durch einen Hahn G verschließbare und an dem Boden CC' angeschraubte kurze Ansatzröhre besitzt, das andere ist aber allseitig gesperrt, und hat in der oberen Wand eine trichterförmige Oeffnung H, und eine cylindrisch gebohrte I, im Boden hingegen eine Ansatzröhre K, welche sich luft- und wasserdicht auf und abschieben läßt, und durch ihre jedesmalige Stellung den Wasserstand des Gefäßes E regulirt. Die Bohrung I, so wie die trichterförmige Oeffnung H ist mit einem gut passenden Stöpsel, dagegen die Röhre K mit einem Hahne verschließbar. Am Boden des Gestelles befindet sich das zum Auffangen des ausfließenden Wassers bestimmte und gewöhnlich mit einer Volumskale versehene cylindrische Gefäß L. Wird nun bei geöffneten Oeffnungen H, I der Hahn G geschlossen, und bei H Wasser gegossen, so füllt sich zuerst das Gefäß E, und wenn man dann den Hahn K schließt, auch das Gefäß F ganz an, wobei die Luft durch die Bohrung I entweicht. Nun sperrt man die Oeffnungen H, I und öffnet den Hahn K und sodann den Hahn G, reicht hiebei das Ende der Röhre K an die horizontale Ebene MN, so ist MC die unveränderliche Druckhöhe, bei welcher das Wasser fortwährend durch die Röhre G abfließt, so lange als im Gefäße F oberhalb dem anderen Ende dieser Röhre Wasser vorhanden ist. Nach der Tiefe der Einsenkung des Endes der Röhre K richtet sich der unveränderliche Wasserstand im Gefäße E: will man aber die Versuche bei verschiedenen Ansatzröhren wiederhohlen, so schraubt man die Röhre G und bringt statt derselben eine andere, längere oder kürzere Ansatzröhre, im Boden CC' an; zu welchem Zwecke sämmtliche Ansatzröhren an einem ihrer Enden mit einem passenden Gewinde versehen sind.

985. Lehrsatz. Die in der Zeiteinheit aus einem Gefäße ausfließende Wassermenge ist dem Produkte aus dem Querschnitte der Ausflußöffnung in die während dieser Zeit Statt findende Geschwindigkeit gleich.

Digitized by Google

Beweis. Da unter Geschwindigkeit des Wassers derjenige Weg verstanden wird, welchen ein Wassertheilchen in einer Sekunde durchläuft, so fließt in dieser Zeit durch die Flächeneinheit des Querschnittes ein Wasserfaden, dessen Querschnitt die Flächeneinheit und dessen Länge mit dem in der Zeiteinheit vom Wasser zurückgelegten Wege einerlei ist: eine Anzahl solcher Wasserfäden, welche gleichzeitig den Querschnitt der Ausflußöffnung voll machen, ist aber die in der Zeiteinheit durchfließende Wassermenge. Ist also a der Inhalt der Ausflußöffnung, und c die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in irgend einer Zeiteinheit aus der Oeffnung läuft, so folgt $M=ac$.

986 **Folgesatz.** Wenn die Bewegung des ausfließenden Wassers während einer Zeit t, in Sekunden ausgedrückt, gleichförmig ist, so erhält man hiedurch die Wassermenge $M=act$. Ist aber diese Bewegung veränderlich, dann ist c eine Funktion der Zeit, etwa ft, und die im Zeittheilchen dt ausfließende Wassermenge $dM=af t dt$, dessen Integrale die Wassermenge M liefert.

987. **Folgesatz 2.** Heißt γ das Gewicht eines Kubikfußes Wasser und P das Gewicht der Wassermenge M, so folgt $P=ac\gamma$, und wenn die Bewegung des Wassers, während einer Zeit t gleichförmig vor sich geht, so ist das Gewicht des durch die Bodenöffnung a ausgeflossenen Wassers $Q=act\gamma$.

988. **Lehrsatz.** Die Geschwindigkeiten des durch kleine Bodenöffnungen zweier vollen Behälter ausfließenden Wassers verhalten sich wie die Quadratwurzeln ihrer Druckhöhen.

Beweis. Seien H, h die Druckhöhen des Wassers in zwei prismatischen Behältern, A, a die Inhalte ihrer Bodenöffnungen und C, c die Geschwindigkeiten, mit welchen das Wasser durch diese Oeffnungen abfließt; so sind $AH\gamma$, $ah\gamma$ die Gewichte der Wassersäulen, welche unmittelbar über den Bodenöffnungen dieser Behälter sich befinden, und durch ihren Druck die Bewegung des Wassers beschleunigen, und $AC\gamma$, $ac\gamma$ sind die in der Zeiteinheit abfließenden Wassermassen, auf welche jene bewegenden Kräfte wirken, somit ist (578)

Digitized by Google

$$\frac{AH\gamma}{AC\gamma} : \frac{ah\gamma}{ac\gamma} \text{ oder } \frac{H}{C} : \frac{h}{c}$$

das Verhältniß ihrer Beschleunigungen: nun verhalten sich die beschleunigenden Kräfte wie ihre Geschwindigkeiten oder

$$\frac{H}{C} : \frac{h}{c} = C : c$$

woraus $H : h = C^2 : c^2$ oder $C : c = \sqrt{H} : \sqrt{h}$ folgt.

989. **Folgesatz.** Ist C die Endesgeschwindigkeit eines durch die Höhe H in der Zeit t fallenden materiellen Punktes; so hat man (589) $C = gt$, $H = \frac{1}{2}gt^2$, mit diesen Werthen ergibt sich aus der letzten Proportion $c = \sqrt{2gh}$, d. i. die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus einer sehr kleinen Bodenöffnung eines stets voll erhaltenen Gefäßes herausfließt, ist so groß als diejenige, welche ein schwerer materielle Punkt im freien Falle durch die Druckhöhe des Gefäßes erlangen würde.

990. **Folgesatz 2.** Setzt man diesen Werth statt c im Ausdrucke $M = ac$ (985), so erhält man $M = a\sqrt{2gh}$. Es ist aber (654) $g = 31.02$ W. Fuß, daher $2g = 62.04$ und $\sqrt{2g} = 7.88$ W. Fuß: hiemit wird $M = 7.88a\sqrt{h}$, wenn a und h in W. Fußen ausgedrückt sind.

991. **Anmerkung.** Die Gesetze des freien Falles finden bei Bewegung des Wassers durch Ausflußöffnungen mit folgenden Beschränkungen Statt: 1. daß die Wassertheile beim Entweichen aus dem Gefäße von allen Seiten der Oeffnung sich losreißen müssen, und somit aus dieser Ursache sowohl, als auch weil 2. wegen dem Andrange der benachbarten Wassertheile zur Ausflußöffnung die Richtung des den Kern des Wasserstrahles umgebenden Wassercylinders von seiner Bahn abgelenkt wird, wodurch eine **Zusammenziehung** des Strahles bewirkt wird, eine Veränderung in der Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers erfolgt.

992. **Anmerkung 2.** Diese Zusammenziehung des Wasser-

Digitized by Google

strahles hängt sowohl von der Beschaffenheit der Ausflußöffnung als auch von dem Wasserstande im Gefäße ab. Ist die Ausflußöffnung in der dünnen Wand oder in einer metallenen Platte angebracht, so ist die Zusammenziehung am größten, und es ist dann die wirklich ausfließende Wassermenge nur 0.62 derjenigen, welche die Formel (990) liefert, und welche man die **hypothetische Wassermenge** nennt. Multiplizirt man $7.88a\sqrt{h}$ mit 0.62: so erhält man für die durch eine dünne Platte wirklich ausfließende Wassermenge $M=4.88a\sqrt{h}$. Fließt das Wasser durch eine kurze Ansatzröhre, so beträgt die Zusammenziehung blos $^{13}/_{16}$ der hypothetischen Wassermenge, oder es ist dann die wirklich ausfließende Wassermenge nach der Formel $M=6.40a\sqrt{h}$ bestimmbar. Die Figur 243 stellt den vertikalen Durchschnitt eines durch die im Boden AB eines Gefäßes angebrachte Ausflußöffnung CD abfließenden Wasserstrahles. Man sieht, daß der Durchmesser EF seiner größten Zusammenziehung in einiger Entfernung von der Bodenöffnung gelegen ist, ohne welcher der Wasserstrahl an dieser Stelle den Durchmesser GH hätte, und daß seine größte Ausbreitung den Durchmesser IK erhält. Die Figur 244 zeigt den Durchschnitt eines durch eine kurze Ansatzröhre abfließenden Wasserstrahles.

993. Anmerkung 3. Folgende Tafel enthält die aus Bossut's Versuchen über den Ausfluß des Wassers bei verschiedenen Druckhöhen während einer Minute beobachteten Wassermengen, sowohl 1. wenn die kreisförmige Ausflußöffnung von 1 W. Zoll im Durchmesser in einer dünnen Platte, als auch 2. wenn eine kurze Ansatzröhre von eben demselben Durchmesser angebracht war. Die hypothetischen Wassermengen M sind nach der Formel

$$M=180\pi\sqrt{62.04}\times h=4454.8\sqrt{h}$$ W. Kub. Zolle berechnet

und hieraus wurden mit Beibehaltung der aus Bossut's Versuchen von Prony berechneten Zusammenziehungen die wirklichen Wassermengen M' in W. Kubik Zollen abgeleitet, wenn die Druckhöhen h sich auf Wiener Fuße beziehen.

Digitized by Google

h	M	Bei einer dünnen Platte		Bei kurzer Ansatzröhre	
		M'	α	M'	α
1	4454	2767	0.62133	3642	0.81781
2	6299	3910	0.62073	5085	0.80729
3	7715	4788	0.62064	6227	0.80724
4	8909	5526	0.62034	7187	0.80681
5	9950	6176	0.62010	8031	0.80638
6	10910	6764	0.62000	8798	0.80637
7	11784	7302	0.61965	9495	0.80573
8	12598	7800	0.61911	10140	0.80496
9	13362	8270	0.61892	10754	0.80485
10	14085	8716	0.61883	11336	0.80483
11	14772	9140	0.61873	11888	0.80477
12	15429	9538	0.61819	12405	0.80403
13	16059	9926	0.51810	12910	0.80390
14	16665	10298	0.61795	13396	0.80382
15	17250	10646	0.61716	13864	0.80370

994. Anmerkung 4. Um die verschiedenen Werthe zusammenzustellen, welche bei der Bestimmung der Geschwindigkeit c für eine gegebene Druckhöhe h nach den verschiedenen Arten des Ausflußes in den vorzüglichsten Fällen der Ausübung nöthig sind, dient nachstehende aus Dubuat's und Eytelwein's Versuchen für Wiener Fußmaß hergeleitete Tafel; im freien Fall ist

$$c=7.9\sqrt{h}, \text{ also } h=c^2:62.1=0.016c^2$$

2) bei Mündungen von der Gestalt des zusammengezogenen Strahles

$$c=7.6\sqrt{h},\ h=c^2:57.6=0.017c^2,$$

3) bei breiten Gerinnen, deren Sohle bei ihrer Einmündung mit dem Boden des Behälters gleich hoch liegt, bei Freischleußen mit Flügelwänden, bei langen Einbauen, welche eine schräge Lage haben, und bei Brückenpfeilern mit zugespitzten Vordertheilen

Digitized by Google

$$c=7.5\sqrt{h},\ h=c^2:56.04=0.018c^2$$

4) bei schmalen Gerinnen, deren Sohle bei ihrer Einmündung mit dem Boden des Behälters gleich hoch liegt, bei Schützenöffnungen in Freiarchen mit Flügelwänden, bei steilen Einbauen und Brückenpfeilern mit geraden Vordertheilen

$$c=6.7\sqrt{h},\ h=c^2:45.05=0.022c^2,$$

5) bei kurzen Ansatzröhren, deren Länge zwei bis viermal so groß ist, als der Durchmesser der Oeffnung

$$c=6.4\sqrt{h},\ h=c^2:40.6=0.025c^2,$$

6) für Schutzöffnungen ohne Flügelwände, im Bord eines Behälters mit dicken Wänden oder an Schleusenthoren

$$c=5.0\sqrt{h},\ h=c^2:24.6=0.041c^2,$$

7) bei Oeffnungen in einer dünnen Wand

$$c=4.88\sqrt{h},\ h=c^2:23.8=0.042c^2.$$

995. Erklärung. Stellt man die wirkliche Wassermenge die in der Zeiteinheit durch eine Oeffnung a abfließt, durch die Formel $M=\alpha a\sqrt{h}$ vor, wo α einen nach (994) zu bestimmenden numerischen Werth bedeutet; so heißt α der Kontrakzionskoeffizient.

996. Aufgabe. In einer geneigten Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefäßes befindet sich eine von dem Bogen der Kurve und ihrer Ordinate begrenzte Seitenöffnung: man frägt nach der Wassermenge, welche durch diese Seitenöffnung in jeder Sekunde abfließt.

Auflösung. Ist die Abszissenaxe, welche die krumme Linie in zwei symmetrische Hälften schneidet, vertikal, α die Vertiefung ihres Scheitels unter dem Wasserspiegel, und β der Neigungswinkel der Ebene der Seitenwand gegen den Horizont, so hat man

$$M=2\alpha\sin\beta\int y dx\sqrt{(a+x)}.$$

Beweis. Sei $y=fx$ die Scheitelgleichung der Kurve ABC (Fig. 245), MN der unveränderlich erhaltene Wasserspiegel; ein

Digitized by Google

Element mM' der Ausflußöffnung, dessen Inhalt $2ydx$ ist, besitzt eine Druckhöhe $BP=(a+x)\sin\beta$, so ist $dM=2ydx\alpha\sin\beta\sqrt{(a+x)}$ woraus sich $M=2\alpha\sin\beta\int ydx\sqrt{(a+x)}$ ergibt.

997. Folgesatz. Ist die Seitenwand vertikal, also $\beta={}^1/_2\pi$, so folgt

$$M=2\alpha\int ydx\sqrt{(a+x)}$$

und für $a=o$, wenn der Scheitel der Kurve an den Wasserspiegel reicht

$$M=2\alpha\int ydx\sqrt{x}.$$

998. Aufgabe. Wenn die Seitenöffnung ein Trapez ist, dessen parallele Seiten horizontal liegen, die Wassermenge zu finden.

Auflösung. Sind die parallelen Seiten $AC=b$ (Fig. 246), $DE=c$, ihr Abstand $AF=h$, so hat man

$$M=2\alpha[{}^2/_3b((a+h)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}})+{}^2/_{15}(c-b)((3h-2a)(a+h)^{\frac{3}{2}}:h+2a^2\sqrt{a})].$$

Beweis. Zieht man MM' horizontal, und setzt $AB=a$, $AP=x$, $AF=h$, $EF=m$, $GD=n$, so hat man wegen

$$x:h=PM:m, \text{ und } x:h=NM':n$$

$$PM=\frac{mx}{h},\ NM'=\frac{nx}{h}, \text{ also}$$

$$PM+NM'=\frac{x(m+n)}{h}=\frac{x(c-b)}{h}=2y-b, \text{ dies gibt}$$

$$2y=b+\frac{(c-b)x}{h}, \text{ und die Druckhöhe } BP=a+x$$

mit diesen Werthen folgt aus (997)

$$M=2\alpha[b\int dx\sqrt{(a+x)}+\frac{c-b}{h}\int xdx\sqrt{(a+x)}]$$

es ist aber für $\sqrt{(a+x)}=z$, $x=z^2-a$, $dx=2zdz$

Digitized by Google

$$\text{mithin } \int dx\sqrt{a+x} = {}^2/_3 z^3 = {}^2/_3 (a+x)^{\frac{3}{2}}, \text{ und}$$

$$\int x dx \sqrt{(a+x)} = \int (2z^4 - 2az^2) dz = {}^2/_5 z^5 - {}^2/_3 az^3$$

$$= {}^1/_{15}(6x^2 + 2ax - 4a^2)\sqrt{(a+x)}$$

dies gibt

$$M = 2\alpha[{}^2/_3 b\,(a+x)^{\frac{3}{2}} + 2\frac{(c-b)}{15h}(3x^2 + ax - 2a^2)\sqrt{(a+x)}]$$

Für $x=o$, wird $M=o$, also

$$o = 2\alpha[{}^2/_3 b a^{\frac{3}{2}} + 4a^2(c-b)\sqrt{a} : 15h] + C$$

somit ist vollständig

$$M = 2\alpha[{}^2/_3 b((a+x)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}) + \frac{2(c-b)}{15h}((3x^2 + ax - 2a^2)\sqrt{(a+x)}$$

$$+ 2a^2\sqrt{a})].$$

Setzt man nun $x=h$, so ergibt sich der Ausdruck wie oben.

999. Folgesatz. Reicht die Seite b des Trapezes bis an den Wasserspiegel, dann ist $a=o$, und

$$M = {}^4/_{15}\alpha h^{\frac{3}{2}}(2b + 3c)$$

1000. Folgesatz 2. Wenn die Ausflußöffnung ein Rechteck von der Höhe h und Basis $2b$ ist, so wird $b=c$, somit

$$M = {}^4/_3 \alpha b[(a+h)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}]$$

und für $a=o$

$$M = {}^4/_3 \alpha b h^{\frac{3}{2}}$$

1001. Folgesatz 3. Ist dieselbe ein Dreieck mit einer nach oben gekehrter Spitze, dann hat man $b=o$, daher

$$M = \frac{4\alpha c}{15h}[(3h - 2a)(a+h)^{\frac{3}{2}} + 2a^2\sqrt{a}]$$

und für $a=o$, $M = {}^4/_5 \alpha c h^{\frac{3}{2}}$.

Digitized by Google

1002. Folgesatz 4. Ist aber die Spitze des Dreieckes nach unten gewendet, so erhält man $c=o$, und

$$M=4a[{}^1/_3b((a+h)^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}})-\frac{b}{15h}((3h-2a)(a+h)^{\frac{3}{2}}+2a^2\sqrt{a})]$$

$$=\frac{4ab}{15h}[2(a+h)^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{3}{2}}(2a+5h)]$$

und für $a=o$ $M={}^8/_{15}abh^{\frac{3}{2}}$.

1003. Aufgabe. Die Seitenöffnung in einer vertikalen Wand sei eine Parabel, deren Scheitel in der Entfernung a unter dem Wasserspiegel liegt, und deren Axe senkrecht, aber die begrenzende Ordinate horizontal ist: man sucht die Wassermenge.

Auflösung. Ist h die Höhe, und $2b$ die begrenzende Basis der Seitenöffnung, so erhält man

$$M=\frac{ab}{2\sqrt{h}}\left[(a+2h)\sqrt{(ah+h^2)}-{}^1/_2a^2\lambda\frac{2h+a+2\sqrt{(ah+h^2)}}{a}\right]$$

Beweis. Der Parameter dieser Parabel ist $b^2:h$, demnach $y^2=b^2x:h$ die Gleichung derselben; sie liefert

$$y=bx^{\frac{1}{2}}:h^{\frac{1}{2}}, \text{ und } ydx=bdx\sqrt{(ax+x^2)}:\sqrt{h}$$

nun ist nach Int. 150) für $Q=ax+x^2$, $b=1$

$$\int dx\sqrt{Q}=({}^1/_2x+{}^1/_4a)\sqrt{Q}-{}^1/_8a^2\int dx:\sqrt{Q},$$

und nach Int. 72) $a=o$, $b=a$, $c=1$ setzend

$$\int\frac{dx}{\sqrt{Q}}=\lambda(x+a+2\sqrt{Q}). \text{ Es ist daher}$$

$$\int dx\sqrt{(ax+x^2)}={}^1/_4(a+2x)\sqrt{(ax+x^2)}$$
$$-{}^1/_8a^2\lambda(a+2x+2\sqrt{(ax+x^2)})$$

hiemit erhält man

$$M=2a\int ydx\sqrt{(a+x)}$$

$$=\frac{ab}{2\sqrt{h}}[(a+2x)\sqrt{(ax+x^2)}-{}^1/_2a^2\lambda(a+2x+2\sqrt{(ax+x^2)})]$$

Digitized by Google

da für $x=o$, $M=o$ ist, so folgt $C=\frac{\alpha a^2 b}{4\sqrt{h}}\lambda a$,

mithin ist vollständig

$$M=\frac{\alpha b}{2\sqrt{h}}\left[(a+2x)\sqrt{(ax+x^2)}-{}^1/_2 a^2\lambda\frac{a+2x+2\sqrt{(ax+x^2)}}{a}\right]$$

für $x=h$ wird demnach M wie oben.

1004. Folgesatz. Ist $a=o$ oder reicht der Scheitel der Seitenöffnung an den Wasserspiegel, so ergibt sich $M={}^1/_2\alpha b\sqrt{h^3}$.

1005. Aufgabe. Wenn die Ausflußöffnung eine Ellipse ist, deren große Axe horizontal liegt, und der Wasserspiegel die Ellipse berührt, die abfließende Wassermenge zu finden.

Auflösung. Heißen a, b die beiden Halbaxen der Ellipse, so hat man $M={}^{64}/_{15}ab\sqrt{bg}$.

Beweis. Sei $ADBE$ (Fig. 247) die elliptische Ausflußöffnung, C ihr Mittelpunkt, $MNQR$ ein zwischen zwei unendlich nahen Ordinaten MN, QR gelegenes Element derselben: man beschreibe mit dem Halbmesser CD aus C einen Kreis DmE, ziehe $Cm=b$, und setze den Winkel $DCm=\varphi$, so ist $Pm=b\sin\varphi$, $CP=b\cos\varphi$, also die Druckhöhe $DP=b-b\cos\varphi=b(1-\cos\varphi)=2b\sin^2{}^1/_2\varphi$, daher ist die Geschwindigkeit des durch das Element $MNQR$ ausfließenden Wassers $2\sin^1/_2\varphi\sqrt{bg}$: sodann hat man, wegen $Pm=b\sin\varphi$, $PM=a\sin\varphi$, und $MN=2a\sin\varphi$, $Pp=bd\varphi\sin\varphi$ also der Inhalt des Elements $MR=2ab\sin^2\varphi d\varphi$, und die durch selbes in der Zeiteinheit entweichende Wassermenge

$$dM=4ab\sin^2\varphi\sin^1/_2\varphi d\varphi\sqrt{bg}$$

nun ist $\sin\varphi=2\sin^1/_2\varphi\cos^1/_2\varphi$, $\sin^2\varphi=4\sin^2{}^1/_2\varphi\cos^2{}^1/_2\varphi$
und $\sin^1/_2\varphi d\varphi=-2d(\cos^1/_2\varphi)$, $\sin^2{}^1/_2\varphi=1-\cos^2{}^1/_2\varphi$
mit diesen Werthen erhält man

$$\begin{aligned}dM&=16ab\sin^2{}^1/_2\varphi\cos^2{}^1/_2\varphi d\varphi\sqrt{bg}\\&=-32ab\sin^2{}^1/_2\varphi\cos^2{}^1/_2\varphi.d(\cos^1/_2\varphi)\sqrt{bg}\\&=-32ab(1-\cos^2{}^1/_2\varphi)\cos^2{}^1/_2\varphi\, d(\cos^1/_2\varphi)\sqrt{bg}\end{aligned}$$

setzt man zur Abkürzung $\cos^1/_2\varphi=q$, so wird

Digitized by Google

$$dM = -32ab(q^2dq - q^4dq)\sqrt{bg}, \text{ mithin}$$
$$M = -32ab(^1/_3q^3 - ^1/_5q^5)\sqrt{bg}$$

da nun für $M=o$, $\varphi=o$, $q=1$ wird, so ergibt sich die Konstante $C=32ab(^1/_3 - ^1/_5)\sqrt{bg}$, und man hat vollständig

$$M = 32ab(^1/_3(1-q^3) - ^1/_5(1-q^5))\sqrt{bg}.$$

Für $\varphi=\pi$, wird $q=o$, und somit die Wassermenge durch die ganze Ausflußöffnung $M=32ab(^1/_3 - ^1/_5)\sqrt{bg} = ^{64}/_{15}ab\sqrt{bg}$.

1006. Folgesatz. Wäre aber in der elliptischen Seitenöffnung die kleine Axe der Ellipse horizontal, so hätte man blos a mit b zu verwechseln, wodurch $M = ^{64}/_{15}ab\sqrt{ag}$ wird. Ist aber $a=b$, so fließt durch eine kreisförmige Seitenöffnung, wenn der Wasserspiegel eine Tangente des Kreises ist, eine Wassermenge

$$M = ^{64}/_{15}a^2\sqrt{ag}.$$

1007. Aufgabe. Aus dem gegebenen Wasserstande und den Halbaxen der elliptischen Seitenöffnung die Wassermenge zu finden.

Auflösung. Heißt h der Wasserstand über dem Mittelpunkte der Ausflußöffnung, a und b ihre Halbaxen, die erstere horizontal angenommen, so ist nahe

$$M = ab\pi\left(1 - \frac{b^2}{32h^2} - \frac{b^4}{1024h^4} - \ldots\right)$$

Beweis. Sei die horizontale Gerade durch den Punkt F der Wasserstand des Gefäßes, demnach $CF=h$, so hat man $FP=FC-PC=h-b\cos\varphi$, und die Geschwindigkeit durch die Ausflußöffnung MR gleich

$$\sqrt{2g(h-b\cos\varphi)} = \sqrt{2gh(1-\frac{b}{h}\cos\varphi)} = \sqrt{2gh(1-\beta\cos\varphi)}$$

wenn Kürze halber $b:h=\beta$ gemacht wird.
Nun ist $\sqrt{(1-\beta\cos\varphi)} = 1 - ^1/_2\beta\cos\varphi - ^1/_8\beta^2\cos^2\varphi - ^1/_{16}\beta^3\cos^3\varphi - \ldots$ dies gibt für die durch das Element MR ausfließende Wassermenge

$$dM = 2ab\sin^2\varphi d\varphi(1 - ^1/_2\beta\cos\varphi - ^1/_8\beta^2\cos^2\varphi - ^1/_{16}\beta^3\cos^3\varphi - \ldots)\sqrt{2gh}$$

Digitized by Google

oder wenn man $\sin\varphi = p$, $\cos\varphi = q$ setzt

$$dM = 2abp^2 d\varphi (1 - {}^1/_2 q\beta - {}^1/_8 q^2\beta^2 - {}^1/_{16} q^3\beta^3 - \ldots)\sqrt{2gh}.$$

Es ist aber nach (A. 957)

$$\int p^2 d\varphi = {}^1/_2(\varphi - pq)$$
$$\int p^3 q\, d\varphi = {}^1/_3 p^3,$$
$$\int p^2 q^2 d\varphi = {}^1/_4 p^3 q - {}^1/_8 pq + {}^1/_8\varphi$$
$$\int p^2 q^3 d\varphi = {}^1/_5 p^3 q^2 + {}^2/_{15} p^5$$
$$\int p^2 q^4 d\varphi = {}^1/_6 p^3 q^3 - {}^1/_8 p^3 q - {}^1/_{16} pq + {}^1/_{16}\varphi$$

nimmt man diese Integrale zwischen den Grenzen $\varphi = o$, bis $\varphi = \pi$ so wird da $\sin\varphi = p = o$, $\cos\varphi = q = 1$ ist,

$$\int p^2 d\varphi = {}^1/_2\pi, \int p^2 q\, d\varphi = o, \int p^2 q^2 d\varphi = {}^1/_8\pi, \int p^2 q^3 d\varphi = o$$
$$\int p^2 q^4 d\varphi = {}^1/_{16}\pi. \text{ u. s. f.}$$

Hiernach erhält man

$$M = ab\pi\left(1 - \frac{1b^2}{32h^2} - \frac{5b^4}{1024h^4} - \ldots\right)\sqrt{2bg}.$$

1008. **Folgesatz.** Ist $b = h'$ so folgt $b : h = 1$, und

$$M = ab\pi(1 - {}^1/_{32} + {}^5/_{1024} - \ldots)\sqrt{bg}, \text{ oder nahe}$$
$$M = (987 : 1024)ab\pi\sqrt{2bg} \text{ d. i.}$$
$$M = 4.2823ab\sqrt{bg} \text{ und nach (1006) ist } M = 4.2666ab\sqrt{bg}.$$

Ist b größer als h, welches der Fall ist, wenn der Wasserspiegel einen Punkt der kleinen Axe schneidet, dann ist die Reihe (1007) divergirend, und es läßt sich somit die Wassermenge nach derselben nicht mehr bestimmen. Wenn endlich b gegen h sehr klein ist, so fallen die Potenzen von β ihrer Kleinheit wegen weg, und man hat $M = ab\pi\sqrt{2bg}$, d. i. **die Wassermenge ist gleich dem Inhalte der Ausflußöffnung multiplizirt in die Geschwindigkeit, welche der Druckhöhe ihres Mittelpunktes zugehört.**

1009. **Aufgabe.** Die Zeit zu bestimmen, innerhalb welcher in einem prismatischen Behälter der Wasserstand um eine gegebene Größe niedersinkt, wenn kein Wasser zufließt und der Abfluß durch eine Bodenöffnung vor sich geht.

Digitized by Google

Auflösung. Sei der horizontale Querschnitt des Gefäßes $=A$, der Inhalt der Bodenöffnung $=a$, der Wasserstand zu Anfange des Abflußes $=h$, und nach verflossener Zeit $t=h'$ so hat man

$$t=\frac{2A}{\alpha a}(\sqrt{h}-\sqrt{h'}).$$

Beweis. Setzt man $h-h'=x$, so bezeichnet x die Tiefe, um welchen der Wasserstand in der Zeit t gesunken ist, und Adx ist die in der Zeit dt gesunkenen Wassermenge: und weil eben so viel Wasser in dieser Zeit durch die Bodenöffnung auslaufen muß, so ist

$$Adx=\alpha a\sqrt{(h-x)}dt, \text{ also } dt=\frac{Adx}{\alpha a\sqrt{(h-x)}},$$

welches nach Int. 33) $t=-\frac{2A}{\alpha a}\sqrt{(h-x)}$ liefert.

Da für $t=o$, $x=o$ ist, so folgt $C=2A\sqrt{h}:\alpha a$, mithin ist vollständig

$$t=\frac{2A}{\alpha a}[\sqrt{h}-\sqrt{(h-x)}]=\frac{2A}{\alpha a}(\sqrt{h}-\sqrt{h'}).$$

1010 Folgesatz. Heißt T die Zeit der gänzlichen Entleerung des Behälters, so ist für $t=T$, $h'=o$, somit

$$T=\frac{2A}{\alpha a}\sqrt{h}.$$

1011. Folgesatz 2. Den Wasserstand h' nach verflossener Zeit t findet man

$$h'=h-\frac{\alpha at}{A}\left(\sqrt{h}-\frac{\alpha at}{4A}\right), \text{ daher}$$

die Tiefe um, welche der Wasserspiegel gesunken

$$h-h'=x=\frac{\alpha at}{A}\left(\sqrt{h}-\frac{\alpha at}{4A}\right)$$

Digitized by Google

1012. Aufgabe. Die Zeit zu bestimmen, innerhalb welcher der Wasserstand in einem prismatischen Behälter um eine gegebene Größe sinkt, wenn kein Wasser zufließt, und der Abfluß durch eine rechtwinklige bis an den Wasserspiegel reichende Seitenöffnung Statt hat.

Auflösung. Heißt A der Querschnitt des Behälters, b die Breite der Seitenöffnung, h die Höhe derselben, und zugleich der Wasserstand beim beginnenden Abfluße, x die Tiefe des Sinkens während einer Zeit t, so hat man

$$t=\frac{3A}{\alpha b}\left[\frac{h\sqrt{(h-x)}-(h-x)\sqrt{h}}{h(h-x)}\right]$$

Beweis. Zu Ende der Zeit t ist der Wasserstand nur noch $h-x$, und es fließt in der Zeit dt durch die Seitenöffnung nach (1000) die Wassermenge

$$^2/_3\alpha b(h-x)^{\frac{3}{2}}dt,$$

indem man dort b statt $2b$, und $h-x$ statt h setzt: weil aber der Wasserspiegel im Behälter während dieser Zeit um dx sinkt; so hat man

$$Adx=^2/_3\alpha b(h-x)^{\frac{3}{2}}dt, \text{ woraus}$$

$$dt=\frac{3A}{2\alpha b}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(h-x)^3}}.$$

Setzt man hier $h-x=z$, daher $dx=-dz$, und integrirt, so wird

$$t=\frac{3A}{2\alpha b}\int -z^{-\frac{3}{2}}dz=\frac{3A}{\alpha b}z^{-\frac{1}{2}}=\frac{3A}{\alpha b\sqrt{(h-x)}}.$$

Da für $t=o$, $x=o$ wird, so folgt

$C=-3A:\alpha b\sqrt{h}$, demnach vollständig

$$t=\frac{3A}{\alpha b}\left[\frac{1}{\sqrt{(h-x)}}-\frac{1}{\sqrt{h}}\right]$$

Digitized by Google

oder wenn man mit $h(h-x)$ multiplizirt und dividirt, wird t wie oben.

1013. Folgesatz. Für $x=h$ muß sich das Gefäß ausleeren, und man findet die zugehörige Zeit $T=\infty$, welches daher erklärbar wird, daß bei Seitenöffnungen die letzte Wasserschichte durch eine unendlich kleine Oeffnung abfließen muß, also dieser Abfluß nur tropfenweise vor sich geht. Sobald aber die Tiefe des Sinkens x wie immer wenig vom Wasserstande unterschieden ist, so gibt die Formel stets eine endliche Ausleerungszeit.

1014. Aufgabe. Wenn der prismatische Behälter während seiner Leerung einen Zufluß erhält, der kleiner ist, als der Ausfluß, die Zeit zu bestimmen, in welcher sich der Wasserstand um eine gegebene Größe senkt.

Auflösung. Heißt A der Querschnitt des Behälters, a der der Ausflußöffnung, h die anfängliche Druckhöhe, z die nach Verfluß der Zeit t noch vorhandene, und q das in einer Sekunde in den Behälter nachfließende Wasser, so ist

$$t=\frac{2A}{\alpha^2a^2}\left[\alpha a(\sqrt{h}-\sqrt{z})+2.303q\log.\frac{\alpha a\sqrt{h}-q}{\alpha a\sqrt{z}-q}\right].$$

Beweis. Sei x der Betrag der Senkung während der Zeit t, so wird dx derjenige in der unendlich kleinen Zeit dt, und Adx die am Ende der Zeit dt ausgeflossene Wassermenge sein, für den Fall, daß der Behälter keinen Zufluß erhält: da aber ein solcher von der Größe q in einer Sekunde, und folglich von qdt in der Zeit dt Statt hat, so ist die wirklich ausgeflossene Wassermenge $Adx+qdt$. Die Bodenöffnung liefert aber in der Zeit dt eine Wassermenge $\alpha adt\sqrt{(h-x)}$, somit hat man

$$Adx+qdt=\alpha adt\sqrt{(h-x)}$$

Nun ist $h-x=z$, also $dx=-dz$, daher

$$qdt-Adz=\alpha adt\sqrt{z} \text{ oder } dt\ (\alpha a\sqrt{z}-q)=-Adz,$$

Digitized by Google

woraus $dt=\frac{-Adz}{\alpha a\sqrt{z-q}}$ folgt.

Setzt man zum Behufe der Integrirung $\alpha a\sqrt{z-q}=y$, so entsteht

$$dy=\frac{\alpha a dz}{2\sqrt{z}},\ \frac{qdy}{y}=\frac{\alpha aqdz}{2(\alpha a\sqrt{z-q})\sqrt{z}},\text{ und}$$

$$dy+\frac{qdy}{y}=\frac{\alpha a dz}{2\sqrt{z}}\left(1+\frac{q}{\alpha a\sqrt{z-q}}\right)=\frac{\alpha^2a^2dz}{2(\alpha a\sqrt{z-q})},$$

mit diesem Werthe ergibt sich

$$dt=-\frac{2Adz}{\alpha a\sqrt{z-q}}=-\frac{2A}{\alpha^2a^2}\left(dy+\frac{qdy}{y}\right),\text{ und}$$

$$t=-\frac{A}{\alpha^2a^2}(y+q\lambda y)=-\frac{A}{\alpha^2a^2}[\alpha a\sqrt{z-q}+q\lambda(\alpha a\sqrt{z-q})]$$

wo für den Anfang der Bewegung $t=o$, $z=h$ zu setzen ist; man erhält so

$$t=\frac{2A}{\alpha^2a^2}\left[\alpha a(\sqrt{h}-\sqrt{z})+q\lambda\frac{\alpha a\sqrt{h}-q}{\alpha a\sqrt{z-q}}\right]$$

endlich wird das zweite Glied rechts noch mit 2.303 multiplizirt, um die natürlichen Logarithmen in briggische zu verwandeln.

1015. Folgesatz. Findet kein Zufluß Statt, so ist $q=o$, und man hat

$$t=\frac{2A}{\alpha a}(\sqrt{h}-\sqrt{z})=\frac{2A}{\alpha a}[\sqrt{h}-\sqrt{(h-x)}]$$

übereinstimmend mit (1009).

1016. Anmerkung. Bisher war nur von prismatischen Behältern die Rede: für jede andere Form wird die Bestimmung der Ausflußzeit viel verwickelter, und für eine große Anzahl eintretender Fälle rein unmöglich. Die Fundamentalgleichung ist zwar immer $Adx=\alpha a dt\sqrt{(h-x)}$, aus welcher dt und durch Integration t selbst zu bestimmen kommt: sobald aber A veränderlich ist, so kann

Digitized by Google

die Integration nur gerichtet werden, wenn der Behälter ein Rotationskörper ist, von dem man die Gleichung der Erzeugungskurve kennt. In jedem anderen Falle muß man näherungsweise verfahren. Zu diesem Behufe theilt man den Behälter in horizontale Schichten von kleiner Höhe, betrachtet jede derselben als ein Prisma und bestimmt nach obiger Formel die Ausleerungszeit für einzelne dieser Prismen. Die Summe der so gefundenen Zeiten ist die Zeit, in welcher der Wasserstand um eine der Höhensumme gleiche Größe sich senken wird.

1017. Lehrsatz. Wenn in einem mit Wasser gefüllten Gefäße von gegebener Gestalt z den Abstand einer Wasserschichte von einer als unveränderlich betrachteten Ebene und v ihre Geschwindigkeit der Bewegung bedeutet; so findet man bei einem unveränderlich erhaltenen Wasserspiegel, den Druck p auf die Flächeneinheit dieser Schichte nach der Gleichung

$$dp = g\varrho dz - v\varrho dv.$$

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 248) ein vertikaler Schnitt des Gefäßes, AB die Ausflußöffnung, EF der unveränderliche Wasserspiegel, OZ eine vertikale Axe auf der man die Abstände der Wasserschichten von einem festen Punkte O oder der durch ihn gelegten Horizontalebene rechnet: nach einer vom Anfange der Bewegung an verflossenen Zeit t, sei v die Geschwindigkeit der im Abstande $OP = z$ gelegenen Schichte $MNnm$, y der horizontale Querschnitt des Gefäßes an dieser Stelle, so daß v und z zwei unbekannte Funktionen der Zeit sind, während y eine gegebene von der Gestalt des Gefäßes abhängende Funktion von z ist. Man hat also ydz zum Inhalte, und wenn die Dichtigkeit mit ϱ bezeichnet wird, $g\varrho ydz$ zum Gewicht der beweglichen Scheibe: heißt nun p der Druck auf die Flächeneinheit derselben, so ist yp der Druck auf die Fläche MN, und $y(p+dp)$ der Gegendruck auf die Fläche mn, sonach ist die bewegende Kraft $g\varrho ydz - ydp$, und wenn man dieselbe durch die bewegte Masse ϱydz dividirt, so gibt der Quotient

$$g - \frac{dp}{\varrho dz}, \text{ oder für } \varrho = 1, \text{ der Ausdruck } g - \frac{dp}{dz}$$

Digitized by Google

die beschleunigende Kraft der bewegten Wasserschichten. Man hat also nach (587)

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{dp}{dz}, \text{ woraus sofort folgt}$$

$$dp=gdz-\frac{dz}{dt}.dv, \text{ u. wegen } \frac{dz}{dt}=v, (580), \text{ wird}$$

$$dp=gdz-vdv.$$

1018. Aufgabe. Die Bewegungsgleichung des durch das offene Ende eines Gefäßes von beliebiger Gestalt abfließenden Wassers zu finden.

Auflösung. Heißt a der Querschnitt der Ausflußöffnung, A der des Wasserspiegels, h die Druckhöhe, und u die Geschwindigkeit des abfließenden Wassers, so ist die gesuchte Gleichung, wenn man Kürze halber

$$N=\int\frac{dz}{y} \text{ setzt, } \frac{aNda}{dt}=c+gh-{}^1/_2\left(1-\frac{a^2}{A^2}u^2\right)$$

wo c eine konstante Größe vorstellt.

Beweis. Da die Flüssigkeit sich im Gefäße nicht zusammendrükken läßt, so muß in derselben Zeit gleich viel Wasser durch jeden horizontalen Schnitt des Gefäßes laufen: hieraus kann man schließen, daß die Geschwindigkeiten zweier beliebigen Schichten im verkehrten Verhältnisse ihrer Querschnittsflächen stehen; ist also a die Größe der Ausflußöffnung AB, und u die Geschwindigkeit des Wassers in derselben; so hat man $y:a=u:v$, sonach $v=au:y$. Differentiirt man diese Gleichung in Hinsicht auf die veränderlichen Größen u und y, welche beziehungsweise Funktionen von t und z sind; so erhält man

$$dv=\frac{adu}{y}-\frac{audy}{y^2}$$

und für diese Werthe von v und dv wird die Gleichung (1017)

$$dp=gdz-\frac{a^2udu}{y^2}+\frac{a^2u^2dy}{y^3}$$

Digitized by Google

oder wenn man im zweiten Gliede rechts statt $\frac{au}{y}$ den Werth

$v=\frac{dz}{dt}$ setzt

$$dp=gdz-\frac{adu}{dt}\cdot\frac{dz}{y}+\frac{a^2u^2dy}{y^3}.$$

Integrirt man nach z, und bemerkt, daß die Größen u und $\frac{du}{dt}$ als konstant angenommen werden müssen, so kommt

$$p=gz+\frac{adu}{dt}\int\frac{dz}{y}-\frac{a^2u^2}{2y^2}+C.$$

Die willkürliche Konstante C hängt von dem Drucke ab, den der Wasserspiegel EF erleidet. Wenn also blos die Atmosphäre diesen Druck ausübt, und man annimmt, daß das Integral N bei EF anfängt, und setzt $OH=z'$, $EF=A$, so muß für $z=z'$, $p=P$ dem atmosphärischen Drucke gleich werden, und man erhält

$$P=gz'-\frac{a^2u^2}{2A^2}+C.$$

Der Unterschied beider Gleichungen gibt

$$I.\quad p-P=g(z-z')+\frac{aNdu}{dt}-{}^1/_2a^2u^2\left(\frac{1}{y^2}-\frac{1}{A^2}\right)$$

Aber für die Ausflußöffnung ist $z-z'=h$, $y=a$, $p-P=-c$, somit erhält man $II.\ c+gh-{}^1/_2u^2\left(1-\frac{a^2}{A^2}\right)=\frac{aNdu}{dt}$.

1019. *Folgesatz.* Ist die Ausflußöffnung rücksichtlich der Dimensionen des Gefäßes sehr klein, so kann man ohne merklichen Fehler die in a multiplizirten Glieder vernachläßigen, und die Gleichung $II.$ reduzirt sich auf

$$III.\ c+gh-{}^1/_2u^2=o$$

ist außerdem der Druck auf den Wasserspiegel sowohl als auch auf

Digitized by Google

die Ausflußöffnung derselbe, also $c=o$; so gibt diese Gleichung sofort $gh=\frac{1}{2}u^2$, oder $u=\sqrt{2gh}$ übereinstimmend mit (989).

1020. Folgesatz 2. Ist hingegen c von Null verschieden, oder wenn das Wasser an dem Spiegel einen größeren Druck erleidet als an der Ausflußöffnung: so setze man in *III.* diesen Ueberschuß beider Pressungen $c=2\sqrt{gh'}$, wo h' die Höhe einer Wassersäule vorstellt, welche mit der Beschleunigung der Schwere multiplizirt den Werth c^2 hätte; dann wird $u=\sqrt{2g(h+h')}$, d. h. die Geschwindigkeit des abfließenden Wassers würde dieselbe sein, als ob der Wasserstand $h+h'$ wäre.

1021. Folgesatz 3. Vernachlässiget man eben so in der Gleichung *I.* die in a multiplizirten Glieder; so erhält man

$$p=P+g(z-z'),$$

d. i. wenn die Oeffnung sehr klein wird, so ist der Druck an irgend einem Punkte des Gefäßes gleich dem an dem Wasserspiegel angebrachten, mehr dem aus der Wassersäule $z-z'$ über diesem Punkte entstehenden Drucke, mithin in jedem Augenblicke derselbe, als ob die Flüssigkeit, welche in dem Gefäße enthalten ist, keine Bewegung hätte.

II. Anwendungen vorstehender Lehren.

1. Von den Springwerken.

1022. Erklärung. Unter einem Springwerk (Wasserkunst) versteht man jede Vorrichtung, wodurch das Wasser durch eine Oeffnung, dem Mundstücke, mit einer beträchtlichen Geschwindigkeit hervorspringt. Eine solche Vorrichtung besteht aus einem prismatischen Behälter AC (Fig. 249), welcher an der Seite mit einer an einem Ende E geschlossenen cylindrischen Röhre CE versehen ist und bei F ein nach oben gerichtetes Mundstück besitzt. Die vertikale Höhe, bis zu welcher der Wasserstrahl springt, nennt man die Sprunghöhe. Ist das Mundstück G in der vertikalen Seitenwand des Behälters angebracht, da dann der Wasserstrahl nach einer krummen Linie GH

Digitized by Google

ausfährt, so heißt der Abstand CH des Punktes H in der horizontalen Geraden von der Seitenwand des Gefäßes, die Sprungweite.

1023. Folgesatz. Da die Geschwindigkeit des ausfahrenden Wasserstrahles $c=\sqrt{\alpha h}$, wegen dem Kontraktionskoeffizienten α kleiner ist als die Geschwindigkeit $C=\sqrt{2gh}$, welche ein schwerer materieller Punkt im freien Falle durch die Höhe h erlangt haben würde; so wird der Wasserstrahl beim Aufsteigen stets eine kleinere Sprunghöhe z haben, als die Druckhöhe h war.

1024. Anmerkung. In der Wirklichkeit kommen noch andere Hindernisse zu berücksichtigen, welche die Sprunghöhe vermindern, als: die Reibung der Wassertheile an den Wänden der Zuleitungsröhre, und des Mundstückes, der Widerstand der Luft und der Rückfall des aufgestiegenen Wassers, welcher das nachsteigende Wasser in seinem Laufe hemmt. Die Beobachtung von Mariotte und Bossut geben $z=h-0.1h^2:g$, und hieraus würde folgen, wenn man in einem zweiten Falle bei der Druckhöhe H die Sprunghöhe mit Z bezeichnet, mithin $Z=H-0.1H^2:g$ setzt, der Satz

$$h-z:H-Z=h^2:H^2;$$

allein der Mariotte'sche Satz lautet:

Die Unterschiede zwischen der Druck- und Sprunghöhe verhalten sich wie die Quadrate der Sprunghöhen, oder $H-Z:h-z=Z^2:z^2$, dies gibt, weil nach Mariotte zu einer Sprunghöhe von 5 Fuß eine Druckhöhe von 5 Fuß und 1 Zoll gehört, $H-Z={}^1/_{12}$, $H=5{}^1/_{12}$, $Z=5$, und man findet somit

$$h=z+\frac{z^2}{300} \text{ oder } z=-150+\sqrt{(22500+300h)}.$$

Berechnet man mit diesem Erfahrungssatze die Druckhöhen, welche den gegebenen Sprunghöhen zugehören; so ergibt sich folgende Tafel, wo z in Fußen, h in Fußen und Tausendteln eines Fußes ausgedrückt ist:

Digitized by Google

z	h	z	h	z	h	z	h	z	h
1	1.003	11	11.403	21	22.470	31	34.203	41	46.603
2	2.013	12	12.480	22	23.613	32	35.413	42	47.880
3	3.030	13	13.563	23	24.763	33	36.630	43	49.163
4	4.053	14	14.653	24	25.920	34	37.853	44	50.453
5	5.083	15	15.750	25	27.083	35	39.083	45	51.734
6	6.120	16	16.853	26	28.253	36	40.320	46	53.053
7	7.163	17	17.963	27	29.430	37	41.563	47	54.363
8	8.213	18	19.080	28	30.613	38	42.813	48	55.680
9	9.270	19	20.203	29	31.803	39	44.070	49	57.003
10	10.333	20	21.333	30	33.000	40	45.333	50	58.333

1025. Anmerkung. 2. **Mariotte's Bestimmungen beziehen** sich nur auf Oeffnungen in dünnen Platten, wobei die größte Geschwindigkeit des springenden Wasserstrahles Statt findet. Für cylindrische Mundstücke ist aber die Geschwindigkeit c' nur 0.81 der Geschwindigkeit c im freien Falle, und da sich die Druckhöhen wie die Quadraten der Geschwindigkeiten verhalten, so wird man die Druckhöhe bei einem Mundstücke, in dem Verhältnisse von $(0.81)^2 : 1 = 0.66 : 1$ vergrößern müssen, wenn sie mit einer Oeffnung in einer dünnen Platte gleiche Sprunghöhe geben soll, oder die Sprunghöhe wird in demselben Verhältnisse kleiner ausfallen. Was aber die Weite des Mundstückes anlangt, so erreichte, Versuchen zu Folge, ein Strahl bei einem Mundstücke von $3^1/_2$ Linien im Durchmesser und einer Druckhöhe 3.243 Fuß die größte Sprunghöhe. Nimmt man nun mit Langsdorf (Lehrbuch der Hydraulik. Altenburg 1794. S. 124) den ebenfalls aus Erfahrung gezogenen Satz an, daß sich die Querschnitte der Mundstücke wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen verhalten müssen, so kann man mittelst der Proportion $\sqrt{3.243} : \sqrt{h} = (3.5)^2 : \delta^2$, den Durchmesser δ des Mundstückes in Linien, für eine in Fußen gegebene Druckhöhe h finden.

1026. **Lehrsatz.** Der aus der Seitenwand eines Behälters springende Wasserstrahl beschreibt eine Parabel, deren Parameter die vierfache Druckhöhe ist.

Digitized by Google

Beweis. Nimmt man die Vertikale durch das Mundstück zur Abszissenaxe, und es kommt ein Wassertheilchen nach Verfluß einer Zeit t zu einem Punkt, dessen Abszisse x, Ordinate y wäre; so hat man x gleich dem Raume im freien Falle, also $x=\frac{1}{2}gt^2$, und $y=t\sqrt{2gh}$: hieraus folgt

$$\frac{2x}{g}=t^2, \text{ und } y^2=2ght^2=4hx,$$

welche Gleichung einer Parabel angehört deren Parameter $4h$ ist.

1027. **Folgesatz.** Bringt man in einem Gefäße bei D und E (Fig. 250) zwei Mundstücke in gleichen Entfernungen $CD=CE=k$ von der Mitte C der Druckhöhe $AB=h$ an; so ist für das Mundstück in D, die Druckhöhe $AD=\frac{1}{2}h-k$, die Abszisse $DB=\frac{1}{2}h+k$, also die Sprungweite $b=2\sqrt{(\frac{1}{2}h-k)(\frac{1}{2}h+k)}=2\sqrt{(\frac{1}{4}h^2-k^2)}$, und für das Mundstück in E hat man die Druckhöhe $AE=\frac{1}{2}h+k$, und die Abszisse $BE=\frac{1}{2}h-k$, mithin die Sprungweite $b'=2\sqrt{(\frac{1}{2}h+k)(\frac{1}{2}h-k)}=2\sqrt{(\frac{1}{4}h^2-k^2)}$, d. i. die Sprungweiten sind bei Oeffnungen, welche von der Mitte der Höhe gleich viel abstehen, einerlei.

1028. **Folgesatz 2.** Die größte Sprungweite erhält man, wenn der Ausdruck $b=2\sqrt{(\frac{1}{4}h^2-k^2)}$ ein Maximum wird, welches für $k=o$ Statt hat, man erhält so $B=2\sqrt{\frac{1}{4}h^2}=h=BF=AB$.

2. Von den Ueberfällen.

1029. **Erklärung.** Wenn die Seitenöffnung eines mit Wasser gefüllten Behälters eine bedeutende Höhe hat, so sind die Geschwindigkeiten, der in ihren verschiedenen Höhen abfließenden Wasserfäden ungleich, und wachsen mit der Tiefe des Wasserfadens unter dem Wasserspiegel. Man nennt nun **mittlere Geschwindigkeit** diejenige, bei welcher, wenn alle Wasserfäden der Seitenöffnung dieselbe gemeinschaftlich hätten, gleich viel Wasser durch die Seitenöffnung abfließen würde, als bei ihren verschiedenen Geschwindigkeiten durch dieselbe zum Ausfluße kommt.

Digitized by Google

1030. **Folgesatz.** Man findet also die Wassermenge, welche durch die Seitenöffnung des Behälters in der Zeiteinheit abfließt, wenn man den Inhalt der Ausflußöffnung in die mittlere Geschwindigkeit des abfließenden Wassers multiplizirt, umgekehrt ergibt sich die mittlere Geschwindigkeit, wenn man die wirkliche Wassermenge durch den Querschnitt der Seitenöffnung dividirt.

1031. **Folgesatz 2.** Wenn in einem Behälter die Seitenöffnung ein Rechteck von der Breite b und Höhe h ist, welches sich vom Boden des Behälters bis zum Wasserspiegel des stets voll erhaltenen Behälters erstreckt, so ist $M = {}^2/_3 \alpha b \sqrt{h^3}$ (1000), die Seitenöffnung $a = bh$, demnach die mittlere Geschwindigkeit $c = {}^2/_3 \alpha \sqrt{h}$.

1032. **Erklärung.** Wenn zum Behufe einer Anschwellung des Wassers eine Wehr in dem Querschnitte eines fließenden Wassers angelegt wird; so heißt sie ein Ueberfall. Dieser wird gewöhnlich aus Holz mit dazwischen gelegten Steinen über die ganze Breite des Flußes gebaut, wodurch das Wasser angeschwellt, gestaut wird, um es in einen seitwärts geführten Kanal zum Betriebe einer Maschine zu leiten. Der so künstlich erhaltene Wasserstand heißt der **Wasserstau**. Mann nennt den obersten Balken eines Ueberfalles, über welchen das Wasser zu fließen gezwungen wird, die **Ueberlaßschwelle** oder den **Fachbaum**. Der Ueberfall heißt ein **vollkommener Ueberfall**, wenn der Wasserspiegel des Unterwassers niedriger liegt, als die obere Fläche der Ueberlaßschwelle: ist aber jener höher als diese, oder fließt das Wasser in irgend einer Höhe über die Wehr, so heißt der Ueberfall ein **unvollkommener**. Den Unterschied des Wasserstandes im Ober- und Unterwasser nennt man das **Gefälle des Ueberfalles**.

1033. **Anmerkung.** Das Wasser der Bäche, Flüße und Ströme fließt gewöhnlich nicht so schnell, um unmittelbar daran Wasserwerke legen zu können: wird es aber geschwellt, so erlangt es einen größeren Wasserstand, und somit fließt es mit einer größeren Geschwindigkeit. Liegt die Schwelle des Mühlgerinnes, wie es häufig geschieht in der Sohle des Grundbettes, und wird die Schwelle an der Wehrober-

Digitized by Google

fläche erhöht, so wird auch das Gefälle von dem Mühlgerinne erhöht, demnach liegt es in dem Interesse der Müller, die Schwelle auf den Wehren möglichst hoch zu legen: aber hiedurch werden bei Ueberschwemmungen die angrenzenden Ländereien um so mehr gefährdet. Deßhalb gibt es in allen Ländern eine gesetzliche Bestimmung über die Höhe der Hauptschwellen auf der Oberfläche der Wehren, welche bei Anlage der Gerinne durch einen in Gegenwart eines Beamten der Wasserbaubehörde in die Erde eingeschlagenen eisernen Pflock, den Pegel, als ein unverrückbares Zeichen sichtbar gemacht wird. So ist in Böhmen die gesetzliche Verfügung getroffen, daß die größte Höhe der Schwelle an dem Moldaufluße nie mehr als vierthalb Fuß böhm. Maßes betragen darf: man nennt dies gewöhnlich den **Wasserzoll**.

Der Stau entsteht aber noch durch Einbau von Brückenpfeilern, Buhnen oder Spornen, durch Bildung neuer Schotterbänke u. s. f., welche eine Verengerung des Flußbettes hervorbringen.

1034. **Erklärung.** Hat ein fließendes Wasser ein unregelmäßiges Bett, so ist der Querschnitt desselben eine gleichfalls unregelmäßige Figur, in welcher die senkrechten Linien, welche die Wassertiefen vorstellen, ungleich sind. Verwandelt man den Inhalt des Querschnittes in ein Rechteck, dessen Höhe die **mittlere Wassertiefe**, und dessen Grundlinie die erforderliche Größe hat, so heißt die letztere die **ausgeglichene Breite** des Flußbettes. Das Produkt aus dem Inhalte dieses Rechteckes in die mittlere Geschwindigkeit des fließenden Wassers bildet die **mittlere Wassermenge** desselben.

1035. **Aufgabe.** Die über den Fachbaum eines vollkommenen Ueberfalls abfließende Wassermenge zu bestimmen.

Auflösung. Heißt b die Breite des Ueberfalls, B die ausgeglichene Breite des Flußbettes, c die mittlere Geschwindigkeit, M die mittlere Wassermenge desselben, k die Höhe der Wehre und h der Wasserstand über dem Fachbaum, so ist die gesuchte Wassermenge

$$M' = {}^2/_3 \alpha b \left[\left(h + \frac{M^2}{\alpha^2 B^2 (h+k)^2} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{M^3}{\alpha^3 B^3 (h+k)^3} \right].$$

Beweis. Sei AB (Fig. 251) der vertikale Durchschnitt der Wehre: man ziehe von einem Punkte C, wo der Wasserspiegel noch beinahe horizontal ist, und mit dem vorfließenden Wasser einerlei Neigung hat eine horizontale Gerade CE über die Wehre, so ist $AE = h$ der Wasserstand des Ueberfalls. Da $h+k$ die Tiefe und B die ausgeglichene Breite des Flußbettes vorstellt, so ist die mittlere Wassermenge $M = cB(h+k)$. Betrachtet man die Geschwindigkeit c als durch eine Wassersäule von der Druckhöhe h' entstanden, so ist $c = \alpha \sqrt{h'}$ und

$$h' = \frac{c^2}{\alpha^2} = \frac{M^2}{\alpha^2 B^2 (h+k)^2}$$

mithin werden sämmtliche Wassertheile in dem Querschnitte des Ueberfalls so gedrückt, als ob sich über dem Wasserspiegel eine Wassersäule von der h' befände. Jeder Punkt der abfließenden Wassermasse, dessen Tiefe unter dem Wasserspiegel gleich x ist, leidet daher einen Druck einer Wassersäule von der Höhe $h'+x$, und diese Druckhöhe erzeuget eine Geschwindigkeit $v = \alpha \sqrt{(h'+x)}$, wenn v die Geschwindigkeit in der Tiefe x vorstellt: es fließt somit durch eine Spalte der Ausflußöffnung deren Breite b, Höhe dx ist, die Wassermenge $dM' = \alpha b v dx = \alpha b \sqrt{(h'+x)} dx$, und daraus folgt die Wassermenge, welche vom Wasserspiegel ab, bis zur Tiefe x abfließt

$$M' = \alpha b \int dx \sqrt{(h'+x)} = {}^2/_3 \alpha b (h'+x)^{\frac{3}{2}} + C$$

da für $x = o$, $M' = o$ wird, so ist $C = -{}^2/_3 \alpha b h'^{\frac{3}{2}}$

sonach vollständig

$$M' = {}^2/_3 \alpha b [(h'+x)^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}]$$; für $x = h$ wird

$$M' = {}^2/_3 \alpha b [(h+h')^{\frac{3}{2}} - h'^{\frac{3}{2}}]$$

wo nur noch statt h' der Werth $M^2 : \alpha^2 B^2 (h+h)^2$ zu setzen kommt.

Digitized by Google

1036. Folgesatz. Ist die Wassermenge M' gegeben, so findet man die erforderliche Breite des Ueberfalls

$$b=\frac{3M'}{2a[(h+h')^{\frac{3}{2}}-h'^{\frac{3}{2}}]}$$

wo $h'=\frac{M'^2}{B^2(h+k)^3}$ ist.

1037. Anmerkung. Um den Wasserstand h zu finden, müßte man aus dem Ausdrucke für M' (1035) durch eine Gleichung des 12. Grades den Werth von h suchen: kürzer erhält man einen genäherten Werth von h auf folgendem Wege.

Bei Ueberfällen, wo man den oberen Wasserspiegel als stillstehend annehmen kann, hat man

$$M'=\tfrac{2}{3}ab\sqrt{h^3}, \text{ oder } h=(3M':2ab)^{\frac{2}{3}},$$

welches die zur Erzeugung einer Wassermenge M' erforderliche Druckhöhe bedeutet: weil aber das Wasser schon eine Geschwindigkeit c besitzt, welcher die Höhe $M'^2:a^2B^2(h+k)^2$ entspricht; so wird dadurch ein Theil der vorhandenen Druckhöhe entbehrlich, und man erhält den Wasserstand bei einem vollkommenen Ueberfalle

$$h=\left(\frac{3M'}{2ab}\right)^{\frac{2}{3}}-\frac{M'^2}{a^2B^2(h+k)^2}$$

zwar ist im zweiten Gliede rechts die Größe h wieder enthalten; man kann aber zur Bestimmung eines Näherungswerthes von h, daselbst $h=o$ setzen, und durch eine zweite Rechnung den genaueren Werth von h nach der Formel finden.

1038. Aufgabe. Die Wassermenge bei unvollkommenen Ueberfällen zu bestimmen.

Auflösung. Sei h die Tiefe des Flußes unterhalb der Wehr, H die Stauhöhe, k die Höhe der Wehr, b dessen Breite, B die ausgeglichene Breite des Flußes und M die Wassermenge, so ist in

der Voraussetzung, daß das Wasser oberhalb der Wehre als stillstehend angesehen wird,

$$M = \alpha b(\tfrac{2}{3}H + h - k)\sqrt{H}.$$

Beweis. Sei AB (Fig. 252) der vertikale Durchschnitt des Ueberfalls, DE der Oberwasserspiegel von einem Punkte C an, in welchem das Wasser als stillstehend betrachtet werden kann, CFG der abschießende Wasserspiegel, HH' der Unterwasserspiegel, demnach $EH = H$ die Stauhöhe, und $HB = h$; so ist die durch HF abschießende Wassermenge, wie bei einem vollkommenen Ueberfalle, $= \tfrac{2}{3}\alpha bH\sqrt{H}$, $AH = h - k$, und die in H erlangte Geschwindigkeit $= \alpha\sqrt{H}$, daher die Wassermenge durch AH gleich $\alpha b(h-k)\sqrt{H}$; beide Wassermengen zusammengenommen, liefern den ganzen Abfluß über die Wehre

$$M = \tfrac{2}{3}\alpha bH\sqrt{H} + \alpha b(h-k)\sqrt{H} = \alpha b(\tfrac{2}{3}H + h - k)\sqrt{H}.$$

1039. Folgesatz. Hat aber das Wasser vor der Wehre schon eine Geschwindigkeit, zu welcher h' als Druckhöhe gehört; so wird die durch HF fließende Wassermenge $\tfrac{2}{3}\alpha b(H+h')^{\frac{3}{2}}$, und die durch AH fließende gleich $\alpha b(h-k)\sqrt{(H+h')}$, deren Summe sofort

$$M = \alpha b[\tfrac{2}{3}(H+h') + h - k]\sqrt{(H+h')}$$ gibt, hiebei ist

$$h' = \frac{M^2}{\alpha^2 b^2 (H+h)^2}$$

1040. Aufgabe. Die Stauhöhe bei durch Einbaue verengten Flußbetten zu finden.

Auflösung. Heißt H die Stauhöhe, h die Tiefe des Flußes vor dem Einbaue, c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers, B die Breite des Flußes vor dem Einbau, und b die Breite in dem Einbaue, so findet man H aus der kubischen Gleichung

$$H^3 + \frac{H^2}{\alpha^2}(c^2 + 2\alpha^2 h) + \frac{Hh}{\alpha^2}(2c^2 + \alpha^2 h) - \frac{c^2h^2}{\alpha^2 b^2}(B^2 - b^2) = o.$$

Beweis. Ist H die Höhe, um welche der Wasserspiegel bei

Digitized by Google

dem Einbaue erhöht wird, so ist $M=cBh$ die Wassermenge vor dem Einbaue und $M=c'b(H+h)$ die bei dem Einbaue, mithin die zwischen dem Einbaue erforderliche Geschwindigkeit

$$I.\quad c'=\frac{cBh}{b(H+h)},\ \text{und}\ \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{cBh}{b(H+h)}\right)^2$$

die zu ihrer Hervorbringung nöthige Druckhöhe. Weil aber das Wasser schon die Geschwindigkeit c, mithin die Druckhöhe $c^2:\alpha^2$ bereits besitzt, so darf sich die Oberfläche des Wassers nur noch um die Größe

$$\frac{c^2}{\alpha^2}\left(\frac{Bh}{b(H+h)}\right)^2-\frac{c^2}{\alpha^2}$$

erheben, damit die Geschwindigkeit c' zwischen dem Einbaue zum Vorschein kommt. Daher ist die Stauhöhe

$$II.\quad H=\frac{c^2}{\alpha^2}\left[\frac{B^2h^2}{b^2(H+h)^2}-1\right].$$

Löset man diese Gleichung in Beziehung auf H auf, so ergibt sich

$$III.\quad (c^2+H\alpha^2)b^2(H+h)^2=B^2h^2c^2,$$

woraus man nach gehöriger Reduktion die angegebene kubische Gleichung erhält.

1041. *Folgesatz.* Weil im Ausdrucke für H diese Größe nur klein ist, so kann man als Näherungswerth aus *II.*

$$H=\frac{c^2}{\alpha^2}\left(\frac{B^2}{b^2}-1\right)$$

annehmen, und mit Hilfe dieses etwas zu großen Werthes den genaueren Werth von H nach Formel *II.* berechnen.

1042. *Folgesatz 2.* Aus der Gleichung *III.* ergibt sich die Breite zwischen dem Einbaue

$$b=\frac{Bhc}{(H+h)\sqrt{(\alpha^2H+c^2)}}$$

Digitized by Google

3. Ausfluß aus zusammengesetzten Behältern.

1043. Erklärung. Sind zwei oder drei Behälter blos durch Scheidewände von einander getrennt, und kommuniziren sie mit einander durch die nahe an ihrem Boden in den Scheidewänden angebrachte Seitenöffnungen, so nennt man die Vorrichtung einen zusammengesetzten Behälter.

1044. Aufgabe. Wenn von zwei Behältern, die mitsammen einen zusammengesetzten Behälter bilden, der eine leer ist, der andere immer voll erhalten wird, die Zeit der Anfüllung des leeren Behälters zu bestimmen.

Auflösung. Sei $ABCD$ (Fig. 253) der beständig volle, $DCEF$ der leere Behälter, die mit einander durch die Ausflußöffnung C vom Querschnitte a in Verbindung stehen, sei ferner der Querschnitt AD des ersteren gleich A, und die Druckhöhe $AB=h$, so findet man die Zeit T, in welcher der zweite Behälter auf die ganze Höhe $CD=k$ angefüllt wird.

$$T=\frac{2A\sqrt{h}}{\alpha a}.$$

Beweis. Angenommen, das Wasser steige nach einer Zeit t' auf die Höhe $CG=h'$, so wirkt das Wasser im ersten Behälter mit der Druckhöhe $h-h'$, und wenn es dann in der folgenden Zeit t, auf die Höhe $GI=y$ den Behälter füllt, so vermindert sich die Druckhöhe auf $h-h'-y$, und es ist die aus dem ersten Behälter in der Zeit dt abfließende Wassermenge Ady, und die in eben derselben Zeit dt dem zweiten Behälter zuströmende $\alpha a\sqrt{(h-h'-y)}dt$, mithin $Ady=\alpha a\sqrt{(h-h'-y)}dt$, also

$$dt=\frac{Ady}{\alpha a\sqrt{(h-h'-y)}}$$

dies gibt $t=\frac{A}{\alpha a}\int\frac{dy}{\sqrt{(h-h'-y)}}=\frac{2A}{\alpha a}[\sqrt{(h-h')}-\sqrt{(h-h'-y)}]$.

Digitized by Google

Ist $h=o$, oder rechnet man die Zeit t vom Anfange des in den zweiten Behälter zuströmenden Wassers, so erreicht es eine Höhe $y=h'$ in der Zeit

$$t'=\frac{2A}{aa}[\sqrt{h}-\sqrt{(h-h')}]$$

und für $h=h'$ ergibt sich hieraus die Anfüllungszeit T wie oben.

1015. Anmerkung. Kanäle sind künstliche, durch Menschenhände gegrabene Flußbette, welche durch das Wasser eines benachbarten Flußes gespeiset werden, und zwei entfernte, auf dem flachen Lande gelegene Orte mit einander verbinden. Diese Kanäle wurden seit den ältesten Zeiten zur Erleichterung der Handelsverbindungen mit großen Kosten fast horizontal angelegt; die Lasten wurden auf demselben in Booten oder Schiffen mit sehr geringer Zugkraft fortgebracht, und man fand, daß ein Pferd über 500 Centner mit gleicher Anstrengung fortschaffen konnte, mit welcher es auf einer gut gebauten Landstraße 15 Centner fortzog. Erst im Jahre 1642 ist man auf den glücklichen Gedanken verfallen, durch Anlegung von Schleußen, worin die belasteten Schiffe ohne Anwendung besonderer Zugkraft mehrere Fuße gehoben oder herabgelassen werden können, den Kanälen jede beliebige Richtung, in welcher sie sogar Berge von bedeutender Höhe übersetzen, ohne bedeutender Vermehrung des Kostenaufwandes, zu ertheilen. Zu diesem Ende werden an jenen Stellen, wo der Kanal eine Anhöhe zu überschreiten hat, eine oder mehrere Schleußen angelegt, deren jeder ein Gefälle von 6 bis 8 Fuß gegeben wird, und das zur Schleußung erforderliche Wasser wird aus einem im höchsten Punkte der Anhöhe befindlichen Behälter dem Kanale zugeführt. Kanäle dieser Art, nennt man Kanäle mit Schleußen.

1016. Anmerkung 2. Soll nun ein Schiff den Kanal hinauffahren, so fährt man es bei geöffneten Schleußenthoren in eine Schleußenkammer (841), worauf das untere Thor geschlossen und die im oberen Thore befindliche Schütze aufgezogen wird. Das

Digitized by Google

Wasser strömt durch die Schützenöffnung in die Schleußenkammer, und steigt darin so lange, bis es die Höhe des Wasserspiegels im Kanale oberhalb der Schleuße erreicht hat. Bei diesem Steigen wird das Schiff zugleich gehoben, und sobald die obern Schleußenthore geöffnet werden, fährt es jetzt im Kanale weiter, bis es abermals zu einer Schleuße gelangt. Soll aber ein Schiff aus einem oberen Kanale in einen unteren gelangen, so fährt man es zu dem oberen Schleußenthore, schließt das folgende tiefer liegende Thor der Kammer zu, öffnet das obere Thor, und nun senkt sich das Schiff mit dem abfließenden Wasser so lange, bis es auf den Wasserspiegel im unteren Kanale gekommen ist, da man dann die Thorflügel öffnet und das Schiff hinausfahren läßt.

1047. Aufgabe Die Zeit, binnen welcher eine Schleußenkammer mit Wasser gefüllt wird, zu berechnen.

Auflösung. Heißt Q der Kubikinhalt des Raums $CHGD$ (Fig. 254) und R der des oberen Raumes $ACBD$, h der Wasserstand AC und a der Querschnitt der Schütze bei C, so hat man die Zeit t des Anfüllens

$$t=\frac{Q+2R}{\alpha a\sqrt{h}}.$$

Beweis. Das mit der Geschwindigkeit $\alpha\sqrt{h}$ bei C einströmende Wasser, gibt in der Zeit t', innerhalb welcher der Raum Q gefüllt wird, eine Wassermenge $\alpha a t'\sqrt{h}=Q$, hieraus folgt $t'=Q:\alpha a\sqrt{h}$, und nach (1044), ergibt sich die Zeit t'' der Anfüllung des Raumes R, da $A\sqrt{h}=R:\sqrt{h}$ ist, $t''=2R:\alpha a\sqrt{h}$, mithin ist

$$t=t'+t''=\frac{Q+2R}{\alpha a\sqrt{h}}.$$

1048. Folgesatz. Da bei der Entleerung der Schleußenkammer, deren Gefälle H ist, anfangs die Geschwindigkeit $\alpha\sqrt{H}$, zu Ende aber null ist, so hat man $\frac{1}{2}\alpha\sqrt{H}$ zur mittleren Ge-

Digitized by Google

schwindigkeit, somit ergibt sich $\frac{1}{2}\alpha at\sqrt{H}=Q+R$, und die Zeit, in welcher der kubische Inhalt $Q+R$ der Kammer ausfließt,

$$t=\frac{2(Q+R)}{\alpha a\sqrt{H}}.$$

1049. Aufgabe. Wenn ein zusammengesetzter oben offene Behälter durch zwei Scheidewände in drei Behälter abgetheilt ist, und bei dem ersten eben so viel Wasser abfließt, als bei dem dritten beständig zufließt, die Druckhöhe zu bestimmen.

Auflösung. Sei $ABCD$ (Fig. 255) der zusammengesetzte Behälter, welcher durch die Scheidewände EF, GH in die Behälter N, O, P abgetheilt ist, die durch die Seitenöffnung C ausfließende Wassermenge sei M, und die Querschnitte der Ausflußöffnungen bei C, E, G seien beziehungsweise a, a_1, a_2; so ist die gesuchte Druckhöhe

$$h=M^2(a^2a^2_1+a^2a^2_2+a^2_1a^2_2):\alpha^2a^2a^2_1a^2_2.$$

Beweis. Sobald die Wasserspiegel bei H, I, F einen unveränderlichen Stand angenommen haben, sei die vertikale Entfernung des Wasserspiegels AH von der Ausflußöffnung G, oder $HG=h$, die Differenz der Wasserspiegel $HI=z$, $FK=y$, und die Höhe $DC=x$, so sind z, y, x die Geschwindigkeitshöhen für den Ausfluß des Wassers in den Oeffnungen G, E, C, weil z. B. im Behälter P der Druck der Wassersäule GH, durch den Gegendruck der Wassersäule GI, auf den Druck einer Wassersäule $HI=z$ zurückgeführt wird. Ist nun c die Geschwindigkeit des bei der Seitenöffnung C abfließenden Wassers, so hat man $M=\alpha ac=\alpha a\sqrt{x}$, und $x=M^2:\alpha^2a^2$. Auf gleiche Weise ergibt sich im Gefäße O, die Geschwindigkeitshöhe $y=M^2:\alpha^2a^2_1$, und im Gefäße P, $z=M^2:\alpha^2a^2_2$; somit wird

$$h=x+y+z=\frac{M^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2_1}+\frac{1}{a^2_2}\right)=\frac{M^2}{\alpha^2a^2a^2_1a^2_2}(a^2a^2_1+a^2a^2_2+a^2_1a^2_2).$$

1050. Folgesatz. Ist aber h bekannt, so findet man hieraus

$$M=\frac{\alpha a a_1 a_2 \sqrt{h}}{\sqrt{(a^2a^2_1+a^2a^2_2+a^2_1a^2_2)}}$$

sind hingegen sämmtliche Ausflußöffnungen gleich, oder $a=a_1=a_2$

so wird $h=\frac{3M^2}{a^2a^2}$, und $M=\frac{\alpha a\sqrt{h}}{\sqrt{3}}$

1051. Folgesatz 2. Bei einem aus zwei Behältern zusammengesetzten Behälter ergibt sich

$$h=\frac{M^2}{\alpha^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2_1}\right),\ M=\frac{\alpha a a_1\sqrt{h}}{\sqrt{(a^2+a^2_1)}}$$

und wenn $a=a_1$ ist

$$h=\frac{2M^2}{\alpha^2a^2},\ \text{und}\ M=\frac{\alpha a\sqrt{h}}{\sqrt{2}}.$$

III. Bewegung des Wassers in Flussbetten.

1. Stromgeschwindigkeitsmesser.

1052. Erklärung. Man versteht unter Strom ein fließendes Gewässer, welches sich unmittelbar ins Meer ergießt, unter Fluß hingegen, jedes größere Gewässer, welches zur Schifffahrt benützt werden kann, aber in einen Strom abfließt: kleinere Gewässer, die nicht schiffbar sind, heißen Bäche. Wenn zur Verkürzung der Krümmungen eines Flußes, derselbe einen andern durch Kunst hervorgebrachten Lauf erhält, so heißt dies ein Durchstich. Ein Graben heißt jede in die Erde gegrabene Wasserleitung, welche nicht zur Schifffahrt bestimmt ist: wird sie mit hölzernen Wänden eingefaßt, wo sie auch oberhalb der Erde geführt werden kann, ein Gerinne. Ist der Graben zur Verbindung zweier Flüße oder Meere gezogen, und hat er schon jene Dimensionen, welche zur Verführung beladener Fahrzeuge erfordert werden, so heißt er ein Kanal.

1053. Erklärung 2. Die Höhlungen auf der Oberfläche der Erde, worin ein Strom fließt, bilden seinen Rinnsal oder Bette.

Digitized by Google

Das Grundbette ist zwischen seinen Ufern eingeschlossen. Derjenige Ort, wo sich ein Fluß oder Kanal mit einem anderen vereinigt, heißt seine Mündung. Bei einem Durchstich oder Kanal unterscheidet man den Einfluß, die Einmündung, den Ausfluß, die Ausmündung. Wird ein Fluß oder Kanal senkrecht auf die Richtung des fließenden Wassers geschnitten, so heißt der Durchschnitt ein Querschnitt oder Breitenprofil, dagegen ein Längenprofil wenn die schneidende Ebene vertikal und mit der Richtung seines Laufes übereinfällt. Zieht man durch den Wasserspiegel zu Anfange und Ende des Längenprofils horizontale Linien, so heißt ihr vertikaler Abstand das Gefälle des Längenprofils. Den Quotienten aus der Stromlänge durch das Gefälle nennt man den Abhang des fließenden Wassers.

1054. Erklärung 3. Unter mittlerer Geschwindigkeit des Wassers in einem Breitenprofile versteht man diejenige, mit welcher das Wasser durch alle Theile des Profils fließen müßte, damit eine eben so große Wassermasse durchläuft, als bei den verschiedenen Geschwindigkeiten einzelner Theile desselben gleichzeitig durchfließt. Die mittlere Geschwindigkeit eines Längenprofils ist das arithmetische Mittel aus den Geschwindigkeiten einzelner Wasserfäden, in dessen verschiedenen Tiefen. Die Vorrichtung zur Bestimmung der an einer Stelle des Querprofils Statt habenden Geschwindigkeit des Wassers heißt ein Stromgeschwindigkeitsmesser oder Hydrometer; unter denen der Schwimmer, der Stromquadrant, die Pitot'sche Röhre und der Woltmann'sche Flügel die merkwürdigsten sind.

1055. Erklärung 4. Läßt man Stücke von Eichen- oder Buchenholz, hohle mit Sand, Schrott u. s. f. beschwerte Kugeln oder gläserne Flaschen, deren Gewicht von jenem eines gleichen Volums Wasser wenig verschieden ist, in die schnellste Strömung einsinken, und nachdem sie die Geschwindigkeit des Wassers angenommen haben, beobachtet man an einer guten Sekundenuhr (Chronometer) die Zeit, in der sie eine bestimmte Strecke zurücklegen; so erhält man, indem man den zurückgelegten Weg durch die beobachtete

Digitized by Google

Zeit dividirt, sofort die Geschwindigkeit des Stromstriches. Man nennt solche Körper Schwimmer.

1056. Anmerkung. Bei der Anwendung der Schwimmer, ist Sorge zu tragen, daß sie nicht zu weit über den Wasserspiegel hervorragen, weil sonst die Luft auf ihre Bewegung Einfluß nimmt, und z. B. durch Winde dieselbe beschleuniget oder verzögert werden könnte. Geschieht es, daß der Stromstrich von der Mitte gegen die Ufer des Flußes zu fortlauft, so wird auch der Schwimmer die Richtung annehmen, und man kann somit nicht bestimmen, wie die Geschwindigheit des fließenden Wassers mit dem Abstande der Wasserfäden vom Ufer gegen die Mitte zu wächst. Zur genaueren Bestimmung des vom Schwimmer zurückgelegten Weges, kann man über quer in den Fluß eingeschlagene Flöcke oder über mit eisernen Spitzen versehene Stangen von einem Ufer zum anderen eine Schnur ziehen, welche zur Richtung des fließenden Wassers senkrecht steht, und so weit über den Wasserspiegel sich erhebt, daß der oberhalb der Schnur in das Wasser gebrachte Schwimmer unterhalb derselben fortschwimmen kann. Eine zweite Schnur wird auf dieselbe Weise am Ende des ausgesteckten Weges quer über den Fluß gespannt. In dem Augenblicke, wo der Schwimmer an der oberen Schnur anlangt, bemerkt ein Beobachter die Uhrzeit, geht längst des Stromes in gleicher Richtung fort, bis er zur Richtung der unteren Schnur anlangt, und bemerkt die Uhrzeit des Vorbeischwimmens der Kugel unterhalb derselben; der Unterschied beider Uhrzeiten gibt die Zeit der Bewegung, und der genau gemessene Abstand beider Schnüre den vom Schwimmer zurückgelegten Weg.

1057. Erklärung. Dubuat's Hydrometer besteht aus einem kleinen sehr beweglichen Rädchen von 12 bis 18 Zoll im Durchmesser mit blechernen Schaufeln (Fig. 256). Die Wellzapfen dieses Rädchens endigen sich in genau gedrehte Spitzen, und bewegen sich in einem Rahmen, der an einer Stange mit der Hand fest gehalten wird. Am Umfange der Welle ist entweder eine seidene durch ein kleines Gewicht gespannte Schnur befestiget, welche durch ihre Windungen an der Welle die Zahl der Umläufe in einer gegebenen

Digitized by Google

Zeit anzeigt: oder aber die Welle endiget ſich in ein Gewinde, das in ein kleines Stirnrad von 60 Zähnen eingreift, und man kann durch Abzählen der ausgelöſten Zähne, da bei jeder Umdrehung des Rädchens ein Zahn des Stirnrades geſchoben wird, die Zahl der Umläufe beſtimmen.

1058. Folgeſatz. Heißt n die Zahl der Umläufe innerhalb einer Zeit t Sekunden, ſo iſt $t:n$ die Dauer eines Umlaufes, und wenn r der Halbmeſſer des Rädchens bis zur Mitte der Schaufeln in Fußen iſt, ſo hat man die Geſchwindigkeit $v=2\pi rn:t$. Iſt z. B. $n=360$, $t=120''$, $r=1/2$, ſo findet man $v=9.4$ Fuß.

1059. Erklärung. Die Pitot'ſche Röhre beſteht aus einer gläſernen Röhre von etwa 1 Zoll im Durchmeſſer, die unten mit einem ſenkrecht auf ſie geſtellten Trichter von Meſſingblech eingefaßt iſt. (Fig. 257). Dieſe Röhre iſt an einer Leiſte befeſtiget, die ſich an einem, mit einer eiſernen Spitze verſehenen Pfahle auf- und abſchieben läßt, und man kann mittelſt der eben beſchriebenen Vorrichtung nicht nur an der Oberfläche, ſondern auch in jeder Tiefe die Geſchwindigkeit des fließenden Waſſers beſtimmen.

1060. Aufgabe. Mittelſt der Pitot'ſchen Röhre die Geſchwindigkeit des Waſſers an irgend einer Stelle zu finden.

Auflöſung. Man übertrage den Pfahl ſammt der Röhre an den betreffenden Ort, und ſchiebt den gegen die Richtung des fließenden Waſſers gewendeten Trichter zu jener Tiefe hinab, wo man die Geſchwindigkeit meſſen will. Sobald das Waſſer ſtill ſteht, ſo bleibt es in der Röhre auf gleicher Höhe wie außerhalb derſelben: wofern aber daſſelbe mit einer Geſchwindigkeit in den Trichter einſtrömt; ſo wird das in der Röhre befindliche Waſſer ſo hoch über den äußeren Waſſerſpiegel getrieben, bis der Druck des bewegten Waſſers der Waſſerſäule in der Röhre das Gleichgewicht hält. Heißt alſo h die Höhe der über dem Waſſerſpiegel, gemeſſenen Waſſerſäule, und c die unbekannte Geſchwindigkeit, ſo hat man $c=\alpha\sqrt{h}$, wo α einen Erfahrungskoeffizienten bedeutet, deſſen Werth aus einer Beobachtung mittelſt eines Schwim-

Digitized by Google

mers entnommen werden kann. Ist nämlich C die bekannte Geschwindigkeit an der Oberfläche des Wassers, und H die an der Röhre beobachtete Höhe, so folgt aus der Gleichung $C=\alpha\sqrt{H}$, der Werth $\alpha=C:\sqrt{H}$, womit man im vorigen Versuche c bestimmen kann.

1061. Anmerkung. Beim Ablesen der Geschwindigkeitshöhe an der Skale muß man genau jene Höhe in der Röhre kennen, auf welche das Wasser wegen seines hydrostatischen Druckes stehen bleibt, und welche wegen der Adhäsion des Wassers an Glas um eine kleine Größe unsicher wird. Um diesen Fehler zu beseitigen, bringt man an demselben Stabe, woran die Röhre sammt dem Trichter befestiget ist, noch eine zweite unten und oben offene Röhre von gleichem Durchmesser mit der vorigen an, beobachtet die Wasserhöhe an beiden, und zieht von der Wasserhöhe in der Pitot'schen Röhre, die Wasserhöhe in der zweiten Röhre ab, der Unterschied gibt die eigentliche Geschwindigkeitshöhe des fließenden Wassers. Um einem möglichen Wasserstau an der dem fließenden Wasser zugekehrten Seite des Pfahles vorzubeugen, kann man die Röhren an den zwei anstossenden Flächen des vierseitigen Pfahles so befestigen, daß die Axe des Trichters mit der Diagonalebene des Pfahles parallel lauft, da dann an der zwischenliegenden Kante des Pfahles das Wasser ohne Stauung abfließen wird.

1062. Erklärung. Der Stromquadrant oder das hydrometrische Pendel besteht aus einem vierseitigen rechtwinkligen Rahmen $ABDE$ (Fig. 258) und einer um den Punkt C beweglichen an einem dünnen Metalldraht CP befestigten Kugel P von größerer spezifischen Schwere als das Wasser, dem Pendel: der Rand DE wird mittelst einer am Querstücke CF befestigten Wasserwage horizontal erhalten, und trägt die Skale, welche die Geschwindigkeit des Wassers anzeigt. Wird nun die Vorrichtung in fließendes Wasser so eingesenkt, daß die Ebene des Rahmens vertikal steht und der Rand DE eine horizontale Lage erhält, dann treibt der Stoß des Wassers auf die Kugel, das Pendel von der vertikalen Richtung ab, und stellt es in die Richtung CP', welche den eingetheilten Rand

Digitized by Google

DE in irgend einem Punkte M schneidet: die daselbst an der Skale angeschriebene Zahl liefert sogleich die Geschwindigkeit des fließenden Wassers.

1063. Lehrsatz. Die Geschwindigkeiten des Wassers verhalten sich wie Quadratwurzeln aus den Wegen, welche der Faden an der Skale des Stromquadranten zurücklegt.

Beweis. Fließt das Wasser gegen die Kugel des Pendels mit einer Geschwindigkeit c, so ist Versuchen zu Folge die Größe des Stoßes auf die Kugel in P dem Gewichte einer Wassersäule proportional, deren Höhe der Fallraum ist, bei welchen ein schwerer Körper dieselbe Geschwindigkeit c erlangt hätte, und deren Basis der größte Kreis der Kugel wäre. Heißt also S die Stoßkraft, F die Fläche des größten Kreises der Kugel, so hat man wenn m einen Erfahrungskoeffizienten bedeutet $S=mFc^2\gamma:2g$, und diese Kraft wirkt in einer horizontalen Richtung $P'R$: in vertikaler Richtung $P'Q$ aber ist die Kraft der Schwere $P'Q=p$ thätig, wenn p das Gewicht der Kugel im Wasser vorstellt: beide Kräfte geben die Resultirende $P'N$, welche durch Verzeichnung des Rechteckes $P'RNQ$ sich ergibt, und welche in der Richtung CM des Pendels nach dem Stoße gelegen ist. Bezeichnet man nun CE mit a, EM mit x, so geben die ähnlichen Dreiecke CEM, $P'QN$

$$a:x=p:\frac{mFc^2\gamma}{2g}, \text{ oder } \frac{x}{a}=\frac{mFc^2\gamma}{2pg}.$$

Ist in einem anderen Falle C die Geschwindigkeit, und der Ausschlag des Pendels $x=b$, so folgt eben so

$$\frac{b}{a}=\frac{mFC^2\gamma}{2pg}, \text{ daher hat man}$$

$$b:x=C^2:c^2 \text{ oder } C:c=\sqrt{b}:\sqrt{x}.$$

1064. Anmerkung. Die Messung einer Geschwindigkeit C, welche hier vorausgesetzt wird, kann durch Ziehung dieser Vorrichtung auf ruhig stehendem Wasser ermittelt werden. Allein die oben

Digitized by Google

angestellte Betrachtung beschränkt sich auf den Fall, wo nur die Kugel im Wasser eingesenkt ist, und also die Vorrichtung blos zur Bestimmung der Geschwindigkeit an der Oberfläche und in einer geringen Tiefe unter derselben, wo nämlich die Geschwindigkeit des Wassers mit jener an der Oberfläche noch gleich angenommen werden kann, dienen soll. Wenn es sich aber darum handelt, die Geschwindigkeit in einer größeren Tiefe zu bestimmen, so ist es nöthig zugleich den Wasserstoß auf den Faden zu berücksichtigen, indem dann der Faden für größere Tiefen auch eine größere Länge und somit der erforderlichen Festigkeit halber eine größere Dicke erhalten muß, und die Richtung des Fadens außerhalb des Wassers nicht nur durch den Wasserstoß auf die Kugel, sondern auch durch jenen auf den Faden bestimmt wird.

1065. Erklärung. Der Woltmann'sche Flügel (Fig. 259.) besteht aus zwei oder mehreren blechernen Flügeln, die so wie die Flügel einer Windmühle gestellt, und dem Stoße des Wassers ausgesetzt werden: diese Flügel, wofern sie durch eine angebrachte Feder nicht gesperrt sind, drehen sich mit einer Achse, an welcher sich eine Schraube ohne Ende befindet, welche in ein gezahntes Rad eingreift. Aus der Zahl der in einer gewissen Zeit erfolgten, von dem Instrumente selbst angegebenen Umläufe der Flügel schließt man gerade zu wie (1058) auf die Geschwindigkeit.

2. Mittlere Geschwindigkeit des fließenden Wassers.

1066. Aufgabe. Die Wassermenge eines durch einen gegebenen Querschnitt fließenden Wassers zu bestimmen.

Auflösung. Die Wassermenge der Bäche, Kanäle, kleiner Flüße kann man dadurch finden, daß man den Lauf des Wassers durch eine Bretterwand sperrt, und das Wasser zwingt, durch eine in derselben angebrachte Oeffnung abzufließen. Aus den bekannten Dimensionen der Oeffnung und der gemessenen Druckhöhe ergibt sich die Wassermenge nach (1000).

Bei größeren Flüssen wo keine Schützenöffnungen oder Wehre

Digitized by Google

vorhanden sind, die man zur Bestimmung der Wassermenge benützen kann, bedient man sich folgenden Verfahrens: Man zerlegt das Breitenprofil durch Vertikallinien in Flächen oder Streifen, bestimmt in einem jeden dieser Streifen vermittelst eines Hydrometers die Geschwindigkeiten des Wassers in verschiedenen Punkten von der Oberfläche ab gegen die Sohle des Flußes, deren Tiefen um gleich viel zunehmen: die Summe der gemessenen Werthe dividirt durch ihre Anzahl gibt die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in dem Streifen, und wenn man hiemit den Inhalt des letzteren multiplizirt; so erhält man die Wassermenge, welche durch diesen Theil des Breitenprofils abfließt. Summirt man endlich die für jeden Streifen des Profils so erhaltenen Wassermengen, so liefert das Ergebniß die Wassermenge des ganzen Breitenprofils.

1067. Anmerkung. Man muß diese Bestimmung an einer Stelle des Flußbettes vornehmen, wo das Breitenprofil nicht zu unregelmäßig ist und die Geschwindigkeiten in den verschiedenen Theilen desselben nicht gar zu ungleich sind, auch keine stagnirenden Wassertheile, Wirbel u. dgl. vorhanden sind: ferner hat man eine solche Stromstrecke auszusuchen, wo das Grundbette fest ist, und die Ufer auf einige Entfernung mit einander parallel laufen. Die Aufnahme des Breitenprofils geschieht mit dem Meßtische und einigen mit Eisen beschlagenen Stangen. Man bestimmt zuvörderst die Richtung AB (Fig 260), welche auf dem Stromstriche senkrecht steht und aus einem Punkte C am Ufer, in der Verlängerung von AB visirt man gegen B und zeichnet die Richtungslinie cb auf dem Meßtische, hierauf wählt man eine Standlinie CD längst des Ufers, die wenigstens so groß als die Breite des Flußes sein muß, visirt gegen D, mißt die Standlinie und trägt sie im verkleinerten Maßstabe auf dem Meßtische von c gegen d; sodann wird der Meßtisch nach D übertragen, und so aufgestellt daß der Punkt d senkrecht über D, und die Linie cd in die Richtung DC fällt. Nun fährt ein Gehilfe mit einem Schiffe oberhalb der Linie AB beiläufig auf jene Entfernung vom Ufer, wo man die Tiefe messen will, und überläßt dort das Schiff dem Strome, er stellt sich mit der Son-

Digitized by Google

dirstange auf dem Vordertheile des Schiffes, setzt diese Stange, so wie er in die Linie AB kommt, senkrecht in den Fluß ein, und läßt inzwischen das Schiff einhalten. Der Ingenieur bei dem Meßtische visirt diese Stange an, numerirt die Beobachtung und die mit der Stange gemessene Tiefe. Ist dieses geschehen, so fährt der Gehilfe wieder stromaufwärts, jedoch weiter vom Ufer, und mißt auf gleiche Art eine zweite Tiefe in dem Breitenprofile durch AB, deren Ort auf dem Meßtische auf dieselbe Art bestimmt wird. Um nun das Profil zu verzeichnen, so werden die Abstände $A1$, $A2$, $A3$... in einem nicht zu kleinen Maßstabe auf eine gerade Linie aufgetragen, und in ihnen die Senkrechten von unbestimmter Länge errichtet, und weil die Tiefen gegen die Breite des Flußes gewöhnlich unbedeutend sind, die in den einzelnen Standpunkten gemessenen Tiefen nach einem vergrößerten etwa zehnfachen Maßstabe auf diese Senkrechten nach einander aufgetragen. Der Inhalt des so verzeichneten Breitenprofiles ergibt sich, indem man jeden Streifen als ein Trapez berechnet, und sodann das Ergebniß durch 10 dividirt.

1068. Folgesatz. Dividirt man die so erhaltene Wassermenge eines Flußbettes durch den Inhalt des Breitenprofils, so ergibt sich die mittlere Geschwindigkeit dieses Profils.

1069. Erklärung. Das Gesetz, nach welchem die Geschwindigkeiten des Flußes vom Wasserspiegel ab in zunehmenden Tiefen abnehmen, läßt sich durch eine krumme Linie veranschaulichen, bei welcher die vertikalen Abszissen die Wassertiefen, und die zugehörigen horizontalen Ordinaten die Geschwindigkeiten des in jenen Tiefen fließenden Wassers darstellen. Man nennt sie die Geschwindigkeitsskale.

1070. Anmerkung. Die Ermittelung der Geschwindigkeitsskale eines gegebenen Flußes ist eine der wichtigsten Aufgaben der Hydraulik. Leider besitzen wir nur wenige Versuche zur Lösung derselben; es scheint, als ob die behagliche Stellung, in welche die Männer dieses Faches sich zu versetzen wissen, jeden Wissenstrieb in ihnen erstickt hätte.

Digitized by Google

Brünnigs ein Holländer und der Abbate Ximenes ein Florentiner, nebſt Eytelwein, Dubuat, Boſſut, Langsdorf und einigen Wenigen machen jedoch eine rühmliche Ausnahme von der Regel: die beiden Erſtgenannten haben genaue Verſuche über die Geſchwindigkeit des Waſſers in verſchiedenen Tiefen, und zwar der erſtere am Oberrhein, Niederrhein, und an der Waal, der andere hingegen am Arnofluße angeſtellt, und dieſelben in folgenden Schriften: Brünnigs' Abhandlung über die Geſchwindigkeit des fließenden Waſſers, und von den Mitteln dieſelbe auf allen Tiefen zu beſtimmen, aus dem Holländiſchen überſ. von Krönke. Frankfurt am Main 1798, und *Ximenes Nuove sperienze Idrauliche, fatte ne' Canali e ne' Fiumi per verificare le principali leggi e fenomeni delle acque correnti. Siena* 1780 bekannt gemacht. Die Ergebniſſe dieſer Verſuche beziehen ſich auf rheinländiſches Fußmaß, und ſind in folgender Tafel enthalten.

Waſſertiefe in Fußen	Geſchwindigkeit in rheinländiſchen Zollen			
	am Oberrhein	am Niederrhein	an der Waal	am Arno
0	54.33	54.72	46.30	38.26
1	56.11	56.76	46.87	38.08
2	53.44	55.45	46.08	37.88
3	54.79	54.12	46.46	37.66
4	55.45	54.12	46.87	37.42
5	54.79	54.79	46.08	37.14
6	52.75	52.75	46.08	36.85
7	54.12	52.75	44.46	36 52
8	52.05	54.79	43.63	36.17
9	52.05	50.62	43.63	35.79
10	51.46	50.62	44.46	35.39
11	46.87	46.08	42.78	34.95
12	44.46	45.28	49.04	34.48
13	46.87	44.46	38.27	33.98
14	43.63	46.08	36.30	33.45
15	41.04	—	35.28	32.88

Digitized by Google

1071. Aufgabe. Aus den in gegebenen Tiefen beobachteten Geschwindigkeiten des Wassers die Geschwindigkeitsskale desselben zu berechnen.

Auflösung. Seien die in den um dieselbe Größe a zunehmenden Tiefen des Wassers wirklich gemessene Geschwindigkeiten p, q, r, s u. s. f. man setze bei noch unbestimmten Koeffizienten A, B, C, D

$$p^2 = A + Ba + Ca^2 + Da^3$$
$$q^2 = A + 2Ba + 4Ca^2 + 8Da^3$$
$$r^2 = A + 3Ba + 9Ca^2 + 27Da^3$$
$$s^2 = A + 4Ba + 16Ca^2 + 64Da^3$$

so erhält man beim Abziehen dieser Gleichungen

$$q^2 - p^2 = Ba + 3Ca^2 + 7Da^3 = P$$
$$r^2 - q^2 = Ba + 5Ca^2 + 19Da^3 = Q$$
$$s^2 - r^2 = Ba + 7Ca^2 + 37Da^3 = R$$

und beim abermaligen Abziehen derselben

$$\left.\begin{array}{l} Q - P = 2Ca^2 + 12Da^3 = S \\ R - Q = 2Ca^2 + 18Da^3 = T \end{array}\right\} \text{Kürze halber}$$
$$\text{endlich } T - S = 6Da^3,$$

woraus sich der Koeffizient D ergibt: setzt man dessen Werth in die Gleichung $2Ca^2 + 12Da^3 = S$, so findet man C, und mit diesen Werthen von C und D erhält man aus der Gleichung

$$Ba + 3Ca^2 + 7Da^3 = P$$

den Koeffizienten B, endlich aus der ersten Gleichung den Koeffizienten A.

1072. Anmerkung. Bei der Anwendung dieser Methode ist zu bemerken, daß sie genau richtige Ergebnisse liefert, wenn die Größen p, q, r, s, so wie die Wassertiefen a, $2a$, $3a$, $4a$ genau gemessen wurden. Da jedoch die Messungen dieser Größen stets

Digitized by Google

kleinen Fehlern unterworfen sind, welche sich bei Berechnung der Koeffizienten A, B, C, D auf eine unübersehbare Weise vergrößern; so ist rathsam, immer alle Beobachtungen in Rechnung zu nehmen, und statt jeder dieser 4 Gleichungen die Summe von a auf einander folgenden Gleichungen gezogen aus allen Beobachtungen zu setzen, ferner die neu erhaltenen Gleichungen so zu kombiniren, daß der Divisor zur Bestimmung eines Koeffizienten nie zu klein wird. Berechnet man hiernach die in (1070) angeführten Beobachtungen, so erhält man die Gleichungen für die Geschwindigkeitsskale, wenn v die mit der Tiefe x zusammenhängende Geschwindigkeit bedeutet, wie folgt:

1. für den Oberrhein ist

$$v^2 = 2951.963 + 58.425x - 10.0575x^2,$$

2. für den Niederrhein

$$v^2 = 2994.127 + 47\,50x - 9.6750x^2,$$

3. für den Waalfluß

$$v^2 = 2144.100 + 26.167x - 5.7075x^2,$$

4. für den Arnofluß

$$v^2 = 1463.550 - 12.427x - 0.8700x^2.$$

1073. *Folgesatz.* Da die Gleichungen für die Geschwindigkeitsskale dieser Flüße vom zweiten Grade sind, und überdies in jeder derselben $B^2 < 4AC$ ist, so ist die zugehörige krumme Linie (A. 1120) eine Ellipse mit einer lothrechter Abszissenare. Um ihre Hauptaren a, b zu berechnen, dividire man die Gleichungen mit $-C$, und setze zugleich $-C$ als Faktor an, so erhält man, Kürze halber $A:C = \alpha$, $B:C = \beta$ setzend, die Gleichung

$$v^2 = -C(x^2 - \beta x - \alpha).$$

Versetzt man den Anfangspunkt um die Größe $\frac{1}{2}\beta$ tiefer, und bezeichnet mit t die von diesem Punkte gezählten Abszissen, so wird $x = t + \frac{1}{2}\beta$, und die Gleichung verwandelt sich in die Mittelpunktsgleichung der Ellipse $v^2 = C(\alpha + \frac{1}{4}\beta^2 - t^2)$. Substituirt man hierin die für α, β, C aus den Koeffizienten der Geschwindigkeitsskale

Digitized by Google

sich ergebenden numerischen Werthe, so erhält man folgende Gleichungen, und zwar für den

$$\text{Oberrhein } v=\frac{55.11}{17.38}\sqrt{[(17.38)^2-t^2]},$$

$$\text{Niederrhein } v=\frac{55.26}{17.76}\sqrt{[(17.76)^2-t^2]},$$

$$\text{Waalfluß } v=\frac{46.63}{19.52}\sqrt{[(19.52)^2-t^2]},$$

$$\text{Arnofluß } v=\frac{38.83}{41.63}\sqrt{[(41.63)^2-t^2]},$$

es sind also die Geschwindigkeitsskalen der 4 Flüße Ellipsen, deren Mittelpunkt bei den ersteren drei und zwar am Oberrhein um die Größe 2.90 Fuß, am Niederrhein um 4.18, am Waalfluß um 2.29 Fuß tiefer liegt als der Wasserspiegel, bei dem Arnofluße hingegen steht derselbe um 7.14 Fuß höher als die Oberfläche des Flußes. Zu bemerken ist noch, daß die kleine Axe der Ellipse die größte Geschwindigkeit dieser Flüsse mißt, und daher in Zollen ausgedrückt ist, die große Axe aber bezieht sich auf Fuße.

1074. *Folgesatz.* Nimmt man das arithmetische Mittel c aller beobachteten Geschwindigkeiten in (1070), und setzt in den Geschwindigkeitsskalen $x=o$, so ergeben sich die Geschwindigkeiten an der Oberfläche des Wassers, nämlich für den

Oberrhein $v^2=2951.963$, $v=54.33$, $c=50.89$,
Niederrhein $v^2=2994.127$, $v=54.77$, $c=51.56$,
Waalfluß $v^2=2144.100$, $v=46.30$, $c=43.41$,
Arnofluß $v^2=1463.550$, $v=38.26$, $c=36.06$.

1075. *Anmerkung.* Aus dieser Zusammenstellung der Geschwindigkeiten des Wassers an der Oberfläche mit dessen mittlerer Geschwindigkeit erhellet, daß diese von jener auf irgend eine Weise

Digitized by Google

abhängt. Prony hat durch Vergleichung der Dubuat'ſchen Erfahrungen gefunden, daß

$$c=\frac{v(v+0.24181g)}{v+0.32146g}\text{ oder }c=\frac{v(v+90.679)}{v+120.547}\text{, Wien. Zoll ſei.}$$

Eytelwein ſchließt hingegen mit Recht, daß auch die Tiefe des Flußes auf deſſen mittlere Geſchwindigkeit einen Einfluß ausübt. Heißt v die Geſchwindigkeit in einem vertikalen Streifen des Querſchnittes an der Oberfläche, v' die in der Tiefe x unter derſelben, ſo iſt $v'=v(1-0.004x)$; mithin

$$c=\tfrac{1}{2}(v+v')=v(1-0.002x).$$

1076. Lehrſatz. Die Widerſtände zweier gleichförmig fließenden Gewäſſer verhalten ſich direkt wie die Gefälle, und verkehrt wie die Längen, auf welche dieſe Gefälle genommen werden.

Beweis. Alle Flüße erlangen, bevor ſie ſich in einen anderen größeren Fluß oder aber in das Meer ergießen, ein bedeutendes Gefälle, und ſie müßten, wofern es keine Widerſtände ihrer Bewegung gäbe, in einer beſchleunigten Bewegung, wie ein ſchwerer Körper auf einer ſchiefen Ebene, dem Meere zuſtrömen. Die Erfahrung lehrt aber im Gegentheile, daß Flüße in ihrem Verlaufe an ihrer Geſchwindigkeit verlieren, je mehr ſie ſich dem Meere ſelbſt nähern; es muß daher ein Widerſtand vorhanden ſein, welcher die Bewegung des Waſſers aufhält, und dadurch deſſen Geſchwindigkeit vermindert. Man kann daher mit Dubuat annehmen, daß, wenn in einem Flußbette, wo alle Querſchnitte einander gleich ſind, die Bewegung des fließenden Waſſers gleichförmig iſt, die beſchleunigende Kraft, welche aus dem Gefälle des Flußbettes entſteht, dem Widerſtande des Waſſers im Flußbette gleich ſein muß: nun iſt die erſtere dem Gefälle des fließenden Waſſers direkt, und der Länge, auf welche das Gefälle genommen wird, verkehrt proportional; heißen alſo bei zwei Flußbetten dieſer Art, W und w die Widerſtände, A und a die Gefälle, L und l die Längen, ſo iſt

$$W:w=Al:aL$$

1077. Anmerkung. Der Widerstand in fließenden Gewässern rührt von zwei Ursachen her, die theils permanent in jedem fließenden Wasser ohne Unterschied Statt haben, theils zufällig sind. Jene begreift man unter dem Namen der Reibung, welche in der Adhäsion der Wassertheile an die Wände des Flußbettes, und in der obschon geringen Kohäsion der Wassertheile unter einander ihren Grund hat. Zu den zufälligen Ursachen der Verzögerung des fließenden Wassers können aber gerechnet werden: die Winde, welche wenn sie in einer der Richtung des fließenden Wassers entgegengesetzten Richtung einwirken, den Lauf des Wassers hemmen, der Frost, Eisgänge, Wasserpflanzen, Anschwellungen beim Ausfluß, sodann Untiefen, Sandbänke, Krümmungen des Flußbettes u. s. f.

1078. Lehrsatz. In einem Flußbette von nahe gleichen Querschnitten ist der permanente Theil des Widerstandes dem benetzten Umfange des Querschnittes und dem Quadrate der Geschwindigkeit direkt, und zugleich dem Flächeninhalte des Querschnittes verkehrt proportional.

Beweis. Daß beim Abfließen einer Wassermenge durch einen Querschnitt desto mehr Wassertheile sich von den Wänden des Flußbettes losreißen müssen, je größer der benetzte Theil des Querschnittes ist, unterliegt wohl keinem Zweifel: daß aber der Widerstand mit dem Quadrate der Geschwindigkeit des fließenden Wassers wächst, erhellet daraus, weil die mit einer $n$fachen Geschwindigkeit in Bewegung befindlichen Wassertheile nicht nur in $n$facher Menge dem Querschnitte zufließen, sondern auch jedes Wassertheilchen in einer $n$mal kürzeren Zeit von der Wand des Flußbettes losgerissen werden muß, als dies der Fall bei einer einfachen Geschwindigkeit wäre. Endlich nimmt der Widerstand mit der Menge des im ganzen Querschnitte fließenden Wassers, also mit dem Inhalte des Querschnittes ab, weil bei $n$facher Menge des Wassers, der von der Reibung erzeugte Widerstand unter $n$mal so viel Wassertheile vertheilt wird, also im Mittel genommen, für jedes einzelne Wassertheilchen $n$mal kleiner werden muß.

Digitized by Google

1079. Folgeſatz. Sind alſo in vier verſchiedenen Flußbetten

W, W', W'', w die Widerſtände

C, c, c, c die mittleren Geſchwindigkeiten

P, P, p, p die benetzten Perimeter und

S, S, S, s die Inhalte der Querſchnitte: ſo hat man

$W : W' = C^2 : c^2$
$W' : W'' = P : p$
$W'' : w = s : S$

demnach $W : w = C^2Ps : c^2pS$, und daher nach (1076)

$$Al : aL = C^2Ps : c^2pS.$$

Hieraus folgt $Ac^2lpS = aC^2LPs$, oder

$$C^2 : c^2 = ASlp : asLP, \text{ und}$$

$$c^2 = \frac{C^2LP}{AS} \cdot \frac{as}{pl}: \text{ dies gibt}$$

$$c = C\sqrt{\frac{LP}{AS}} \cdot \sqrt{\frac{as}{pl}} = \alpha\sqrt{\frac{as}{pl}}$$

wenn man die durch Verſuche zu beſtimmende Größe $C\sqrt{LP} : \sqrt{AS}$ mit α bezeichnet.

1080. Anmerkung. Wenn alle Größen ſich auf rheinländiſches zwölftheiliges Fußmaß beziehen, ſo iſt nach einer Mittelzahl von 36 Beobachtungen Dubuat's, der Koeffizient $\alpha = 90.9$. Bedeutet r die Zahl, mit welcher man den rheinländiſchen Fuß multipliziren muß, um ihn in ein anderes Fußmaß zu verwandeln, und es bezeichnen α', C', L', P', A', S beziehungsweiſe dasjenige, was α, C, L, P, A, S im rheinländiſchen Fußmaße vorſtellt: ſo hat man $C' = rC$, $L' = rL$, $P' = rP$, $A' = rA$, $S' = r^2S$ hiemit wird

$$\alpha' = C\sqrt{\frac{L'P'}{A'S'}} = rC\sqrt{\frac{r^2LP}{r^3AS}} = \alpha\sqrt{r}$$

Man hat alſo für rheinländiſches Fußmaß

$$c = 90.9\sqrt{\frac{as}{pl}} \text{ und } c = 90.9\sqrt{\frac{ars}{pl}} \text{ für jedes andere Fußmaß.}$$

Digitized by Google

Die hier aufgestellte sehr einfache Formel für die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in Flußbetten, gilt nur für jene Fälle, wo das Wasser eine gleichförmige Bewegung angenommen hat, und die Querprofile des geradlinig fortlaufenden Flußbettes nahe einander gleich sind, daher für die mittlere Geschwindigkeit in Kanälen, Gerinnen u. s. f. Wo diese Bedingungen nicht Statt haben, oder die Strombahn Krümmungen hat, kann keine Anwendung der Formel gemacht werden, wie denn überhaupt für die unbedingte Anwendung derselben, noch mehrere Erfahrungen bei großen Strömen zu wünschen sind.

1081. Aufgabe. Wenn das Querprofil eines Flußbettes ein Rechteck ist, die mittlere Geschwindigkeit des fließenden Wassers zu bestimmen.

Auflösung. Heißt b die Breite, h die benetzte Höhe des Querprofils, so hat man unter a und l das Gefälle und die Länge, auf welche das Gefälle genommen wird, verstanden,

$$c=90.9\sqrt{\frac{abh}{l(b+2h)}}$$

Beweis. Setzt man in (1080) $s=bh$, $p=b+2h$, so ergibt sich sofort der verlangte Ausdruck für c.

1082. Folgesatz. Für $k=(90.9)^2=8268.8$ folgt hieraus

$$c^2l(b+2h)=abhk,$$

und wenn diese Gleichung nach einander in Beziehung auf b, h, a, l aufgelöset wird, so erhält man

$$b=\frac{2hc^2}{ahk-c^2l},\quad h=\frac{bc^2l}{abk-2c^2l}$$

$$a=\frac{c^2(b+2h)l}{bhk},\quad l=\frac{abhk}{c^2(b+2h)}.$$

1083. Folgesatz 2. Wird durch außerordentliche Zuflüße die Höhe des Wassers in Flußbetten oder Kanälen mit Querschnitten, welche Rechtecke von der Breite b, Höhe h sind, vergrößert, und

Digitized by Google

es ſteigt die Waſſertiefe h auf h' das Gefälle a auf a', ſo iſt dann die zugehörige mittlere Geſchwindigkeit c' nach (1080)

$$c'=90.9\sqrt{\frac{a'bh'}{l(b+2h')}}$$

$$\text{mithin } c:c'=\sqrt{\frac{ah}{b+2h}}:\sqrt{\frac{a'h'}{b+2h'}}$$

bei breiten Strömen ſind die Gefälle a, a' nicht merklich von einander verſchieden, und man kann $b+2h$ nahe gleich $b+2h'$ annehmen, hiedurch ergibt ſich $c:c'=\sqrt{h}:\sqrt{h'}$ d. i. bei breiten Strömen verhalten ſich bei verſchiedenen Anſchwellungen die mittleren Geſchwindigkeiten nahe wie die Quadratwurzeln aus den mittleren Waſſertiefen.

1084. *Folgeſatz* 3. Heißt M die Waſſermenge, welche in jeder Sekunde durch den Querſchnitt eines Flußes läuft, ſo hat man $M=cs$, und wegen (1080)

$$M=90.9s\sqrt{\frac{as}{pl}},\ \text{ſetzt man } k=(90.9)^2=8262.8$$

ſo folgt $M^2pl=kas^3$, woraus ſich

$$s=\sqrt[3]{\frac{M^2pl}{ak}},\quad a=\frac{M^2pl}{ks^3},\quad p=\frac{aks^3}{M^2l}\ \text{ergibt.}$$

1085. *Folgeſatz* 4. Iſt aber $s=bh$, $p=b+2h$, oder der Querſchnitt des Flußbettes ein Rechteck, ſo erhält man

$$M=90.9bh\sqrt{\frac{abh}{l(b+2h)}},\ a=\frac{M^2l(b+2h)}{akb^3h^3}$$

die Breite des vierſeitigen rechtwinkligen Profils nach der kubiſchen Gleichung

$$b^3-\frac{M^2l}{akh^3}b-\frac{2M^2hl}{akh^3}=o$$

die Höhe deſſelben aber

$$h^3-\frac{2M^2l}{akb^3}h-\frac{M^2l}{akb^2}=o.$$

Digitized by Google

3. Ueber die vortheilhafteste Gestalt der Kanäle.

1086. Anmerkung Die Gestalt, welche man bei einem gegebenen Querschnitte einem Kanal ertheilt, hat auf die Menge des gleichzeitig durchfließenden Wassers einen wichtigen Einfluß, weil diese Menge desto geringer ausfällt, je größer der benetzte Umfang des Querschnittes hinsichtlich dessen Inhaltes ist. Unter allen Flächen hat aber der Kreis den kleinsten Umfang bei demselben Inhalte; sonach liefert ein Flußbett oder ein Kanal, dessen Querschnitt ein Halbkreis wäre, die größte Menge Wassers. Nach dem Kreise sind es die regelmäßigen einem Kreise eingeschriebenen Vielecke, denen diese Eigenschaft um so mehr zukommt, je größer die Seitenzahl des Vieleckes ist. Allein bei einem Querschnitte, welches ein Quadrat, ein regelmäßiges Fünfeck oder Sechseck wäre, würde die Neigung der Seitenwände des Kanals gegen die Sohle zu groß, um ohne kostspielige Fütterung des Flußbettes mit bearbeiteten Quadersteinen oder hölzernen Bohlen im natürlichen Erdreiche einen Kanal anlegen zu können.

1087. Aufgabe. Wenn das Querprofil eines Kanales ein Rechteck vom gegebenen Inhalte ist, dessen Abmessungen so zu bestimmen, daß das durchfließende Wasser den kleinsten Umfang benetzt.

Auflösung. Bezeichnet man mit a^2 den gegebenen Inhalt des Rechteckes, so ist $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ seine Höhe, und seine Breite doppelt so groß.

Beweis. Soll nämlich das Querprofil eines Kanals, welches den kleinsten Umfang benetzt, ein Rechteck von der Höhe x und der Breite y werden, so hat man $xy=a^2$ und wenn dessen benetzte Umfang p heißt, $p=y+2x$. Aus der ersten Gleichung folgt $y=a^2:x$, somit $p=a^2:x+2x=(a^2+2x^2):x$ und dieser Ausdruck wird ein Minimum für $x=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, wodurch $y=a\sqrt{2}$ wird.

1088. Aufgabe. Ein Rechteck, dessen Breite das Doppelte seiner Höhe ist, in ein Trapez zu verwandeln, dessen benetzte Umfang und Querschnitt so groß wie beim Rechtecke ist.

Digitized by Google

Auflöſung. Sei $ABCD$ (Fig. 261) das gegebene Rechteck, man ſchneide die Grundlinie CD in den Punkten E, F in drei gleiche Theile, und halbire die Seiten BC, AD in den Punkten G, H, verbinde F mit G, und E mit H und verlängere dieſe Geraden bis ſie die beiderſeits verlängerte Gerade AB in den Punkten I, K ſchneiden, ſo iſt das Trapez $IKFE$ ſowohl dem Querſchnitte als auch dem benetzten Umfange nach dem Rechtecke $ABCD$ gleich.

Beweis. Heißt h die Höhe BC des Rechteckes, $2h$ deſſen Grundlinie AB; ſo iſt $2h^2$ der Inhalt des Rechteckes, und $4h$ der benetzte Umfang. Nun iſt $FG=\sqrt{(FC^2+GC^2)}=\sqrt{(^1/_9h^2+^1/_4h^2)}=^5/_6h$, ſomit wegen $FG=GK$, $FK=^5/_3h=EI$, $LK=LB+BK=LB+FC=^5/_3h$, daher $IK=^{10}/_3h$, und der Inhalt des Trapezes $(^{10}/_3h+^2/_3h)^1/_2h=2h^2$, benetzte Umfang $FK+EF+EI=^{10}/_3h+^2/_3h=4h$.

1089. Folgeſatz. Heißt $a:l$ der Abhang eines Flußbettes mit dieſem Trapez als Querſchnitte, ſo folgt aus (1080 und 1084), wegen $s=2h^2$, $p=4h$

$$c=90.9\sqrt{\frac{ah}{2l}},\quad M=2h^2c=181.8h^2\sqrt{\frac{ah}{2l}},$$

$$h=\sqrt[5]{\frac{M^2l}{2a^k}},\quad a=\frac{2c^2l}{kh}.$$

1090. Aufgabe. Ein Trapez zu finden, welches bei einer gegebenen Neigung ſeiner Seite gegen den Horizont und gegebenen Querſchnitte den kleinſten benetzten Umfang hätte.

Auflöſung. Heißt die Unterbreite des Trapezes x, die Seite y, der Böſchungswinkel α und der gegebene Inhalt a^2, ſo hat man

$$x=\frac{2(1-\cos\alpha)a}{\sqrt{\sin\alpha(2-\cos\alpha)}},\quad y=\frac{a}{\sqrt{\sin\alpha(2-\cos\alpha)}}.$$

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 262) das geſuchte Trapez, $BCE=\alpha$ der Böſchungswinkel, man ſetze $CD=x$, $BC=y$; ſo iſt $CF=y\sin\alpha$, $BF=y\cos\alpha=AG$, alſo die Oberbreite AB

Digitized by Google

$=x+2y\cos\alpha$: hieraus folgt der Inhalt $a^2=y\sin\alpha(x+y\cos\alpha)$,

$$\text{woraus } x=\frac{a^2-y^2\sin\alpha\cos\alpha}{y\sin\alpha} \text{ sich ergibt}$$

und der von Waſſer benetzte Perimeter wird

$$x+2y=\frac{a^2}{y\sin\alpha}+y(2-\cos\alpha),$$

welcher Ausdruck ein Minimum wird für

$$y=\frac{a}{\sqrt{\sin\alpha(2-\cos\alpha)}},$$

wodurch man das zugehörige x wie oben erhält.

1091. Folgeſatz. Für $\alpha=90^0$, ergibt ſich hieraus $y=a:\sqrt{2}$ $=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$, $x=a\sqrt{2}$ alſo $x=2y$ übereinſtimmend mit (1087). Für $\alpha=60^0$, wird $\sin\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, mithin

$$x=2a:\sqrt{(3\sqrt{3})}=y,$$

wie es ſein ſoll, da x und y Seiten eines regelmäßigen Sechseckes ſind.

1092. Folgeſatz. 2. Mit dieſen Werthen für x und y, wird der Perimeter

$$x+2y=a\sqrt{\frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}}+a\sqrt{\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}}, \text{ und der Inhalt,}$$

$$a\sqrt{\frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}}\times a\sqrt{\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}}=a^2.$$

1093. Anmerkung. Folgende Tafel liefert die Unterbreite, die Seite und den benetzten Umfang für ein trapezförmiges Querprofil des ſchnellſten Abfluſſes, deſſen Fläche $a^2=1$ iſt, wenn die Seitenböſchung zwiſchen 30^0 und 90^0 enthalten iſt.

Digitized by Google

Gr.	Untbr.	Seite	Umfg.	Gr.	Untbr.	Seite	Umfg.
30	0.3558	1.3280	3.0119	60	0.8774	0.8774	2.6321
31	3723	3034	2.9792	61	8951	8687	6324
32	3890	2799	9487	62	9127	8602	6332
33	4057	2574	9185	63	9304	8520	6345
34	4225	2358	8941	64	9481	8441	6363
35	4395	2151	8697	65	9658	8364	6385
36	4565	1952	8469	66	9835	8289	6412
37	4736	1761	8258	67	1.0012	8216	6444
38	4908	1577	8061	68	0189	8146	6481
39	5081	1399	7879	69	0366	8078	6521
40	0.5254	1.1228	2.7801	70	1.0543	0.8012	2.6566
41	5428	1063	7555	71	0720	7948	6615
42	5602	0904	7410	72	0897	7885	6668
43	5776	0751	7278	73	1075	7825	6726
44	5951	0602	7156	74	1253	7767	6787
45	6127	0459	7044	75	1430	7711	6852
46	6302	0320	6932	76	1608	7656	6921
47	6478	0185	6848	77	1787	7604	6994
48	6654	0055	6765	78	1965	7553	7071
49	6830	0.9929	2.6689	79	2144	7504	7152
50	0.7007	9807	6621	80	1.2323	0.7456	2.7236
51	7183	9689	6561	81	2503	7411	7324
52	7360	9574	6509	82	2683	7367	7416
53	7536	9463	6463	83	2863	7324	7512
54	7713	9356	6424	84	3044	7283	7611
55	7890	9251	6392	85	3226	7244	7714
56	8067	9150	6366	86	3408	7206	7821
57	8243	9051	6346	87	3590	7171	7931
58	8420	8956	6332	88	3773	7136	8045
59	0.8597	0.8864	2.6324	89	1.3957	0.7103	2.8163

1094. Anmerkung 2. Beim Gebrauche dieſer Tafel, muß vorerſt aus dem gegebenen Inhalte, des Querſchnittes die Quadratwurzel gezogen werden: dieſe iſt der Modul a aller Zahlen in der Tafel. Sodann geht man mit dem gegebenen Neigungswinkel der

Digitized by Google

Seite des trapezförmigen Querprofils in die Tafel, und schreibt die drei neben der Grade-Anzahl stehenden Zahlen: die Unterbreite, die Seite und den benetzten Umfang. Multiplizirt man die Seite mit dem Sinus des Neigungswinkels, so erhält man die Höhe des Trapezes, und das Produkt aus der Seite in den Kosinus des Neigungswinkels gibt den Ueberschuß der halben Oberbreite über die halbe Unterbreite, woraus sich denn auch die Oberbreite ergibt. Die so gefundenen Zahlen beziehen sich jedoch auf $a=1$, daher sie sämmtlich mit a noch zu multipliziren sind, um die Abmessungen des trapezförmigen Querschnittes zu bekommen, dessen benetzte Umfang bei dem gegebenen Neigungswinkel ein Minimum ist. Gibt man daher einem Kanale ein Querprofil mit diesen Abmessungen, so wird der Abfluß des Wassers in demselben die möglichst kleine Reibung zu überwinden haben, und somit unter den angegebenen Bedingungen am schnellsten Statt haben.

Beispiel. Die Abmessungen eines Querprofils vom schnellsten Abfluße zu bestimmen, wenn die Seite des Trapezes eine Neigung von 53 Grade hat, und dessen Fläche 1000 Quadratfuß hält. Hier ist $a^2=1000$, mithin $a=31.6228$ und $\alpha=53^0$: die Tafel gibt Unterbreite $=0.7536$, Seite $=0.9463$, Umfang $=2.6463$

log. $0.9463=0.97603-1$
log. a $=1.50000$
log. sin 53^0 $=9.90235$
log. Höhe $=1.37838$
Höhe $=23'.899$

log. $0.9463=0.97603-1$
log. a $=1.50000$
log. cos 53^0 $=9.77946$
1.25549
$18'.009$

Es ist also der Ueberschuß der Oberbreite $36'.018$

log. $0.7536=0.897714-1$.
log. $a=1.50000$
1.37714
Unterbreite $=23'831$
Ueberschuß $=36.018$
Oberbreite $=59'849$

Die halbe Summe aus der Ober- und Unterbreite ist nun
$\sigma=41.840$
log. $\sigma=1.62159$
log. Höhe $=1.37838$
log. Inhalt $=2.99997$
Inhalt $=999.94$ oder nahe 1000 Quadrat Fuß.

Man hat also für das verlangte Trapez Unterbreite 23′.831, Oberbreite 59′.849, Höhe 23′.899, Seite 29′.925, und dieses Trapez hat unter allen möglichen vom gleichen Querschnitte und Neigung der Seitenwand den kleinsten benetzten Umfang von 83′.681.

1095. Aufgabe. Ein Kanal, dessen Querprofil ein Rechteck ist, hat eine horizontale Sohle, man soll aus der gegebenen Wassertiefe in der Ausmündung die Entfernung jenes Querprofils bestimmen, wo die Wassertiefe um eine gegebene Größe gestiegen ist.

Auflösung. Es bezeichnen M die Wassermenge des Kanales, b seine Breite, h die Wassertiefe in der Ausmündung p, den benetzten Umfang in derselben; so hat man wenn die vorgegebene Wassertiefe x heißt, und Kürze halber $k=8268.8$ gesetzt wird, den Abstand y von der Ausmündung

$$y=\frac{kb^3}{8M^2}\left[b^2(x-h)-b(x^2-h^2)+{}^4/_3(x^3-h^3)-{}^1/_2b^3\lambda\frac{b+2x}{b+2h}\right].$$

Beweis. In einem Kanale mit horizontaler Sohle müßte das Wasser stille stehen, wenn nicht dem Wasserspiegel ein Abhang oder Gefälle gegeben wird, wodurch seine Tiefen oberhalb der Ausmündung bis zur Einmündung hinauf nach irgend einem Gesetze zunehmen. Ist nun x die unbekannte Wassertiefe des Kanals in einem nach dem Wasserspiegel gemessenen Abstande y von der Ausmündung, so wächst x um dx, wenn y um dy zunimmt, daher wird in der Formel (1085)

$$\frac{a}{l}=\frac{dx}{dy},\ h=x \text{ zu setzen sein: dies gibt}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{M^2(b+2x)}{kb^3x^3},\ \text{oder } dy=\frac{kb^3}{M^2}\cdot\frac{x^3dx}{b+2x}.$$

Um diese Differentialformel zu integriren, setze man

$b+2x=z$, $b+2h=p$, wodurch $x={}^1/_2(z-b)$, $dx={}^1/_2dz$ wird: nach Substitution dieser Werthe in der obigen Differentialformel erhält man, die beständige Größe $kb^3:16M^2=k'$ setzend

$$dy=k'(z^2-3bz+3b^2)dz-k'b^3dz:z, \text{ mithin}$$

Digitized by Google

$$y = k'(\tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{3}{2}bz^2 + 3b^2z - b^3\lambda z) + C$$

da für $y = o$, $x = h$, also $z = b + 2h = p$ wird

so hat man $C = -k'(\tfrac{1}{3}p^3 - \tfrac{3}{2}bp^2 + 3b^2p - b^3\lambda p)$,

daher ist vollständig

$$y = k'[\tfrac{1}{3}(z^3 - p^3) - \tfrac{3}{2}b(z^2 - p^2) + 3b^2(z - p) - b^3\lambda(z:p)].$$

Setzt man aber für z und p ihre angenommenen Werthe, und verrichtet die angegebenen Reduktionen, so findet man

$$\tfrac{1}{3}(z^3 - p^3) = 2b^2(x - h) + 4b(x^2 - h^2) + \tfrac{8}{3}(x^3 - h^3)$$
$$-\tfrac{3}{2}(z^2 - p^2) = 6b^2(x - h) - 6b(x^2 - h^2)$$
$$3b^2(z - p) = 6b^3(x - h)$$

hiemit erhält man nun

$$y = 2k'[b^2(x - h) - b(x^2 - h^2) + \tfrac{4}{3}(x^3 - h^3) - \tfrac{1}{2}b^3\lambda(b + 2x) : (b + 2h)]$$

wie oben.

1096. *Folgesatz.* Mittelst dieses Ausdruckes findet man zu einer beliebigen Wassertiefe x größer als h, die zugehörige Entfernung des Querschnittes von der Ausmündung des Kanals. Nimmt man also statt $x - h$ nach einander 0.1, 0.2, 0.3.... Fuße an; so läßt sich der zugehörige Werth von y aus den gegebenen Abmessungen des Kanals und dessen Wassermenge M genau berechnen.

1097. *Folgesatz.* 2. Frägt man hingegen wie y von x abhängt, so sind noch mehrere Reduktionen vorzunehmen.

Es ist $\dfrac{b + 2x}{b + 2h} = 1 + \dfrac{2(x - h)}{b + 2h}$, daher nach (A. 644),

$$\lambda\frac{b + 2x}{b + 2h} = \lambda\left[1 + \frac{2(x - h)}{b + 2h}\right]$$
$$= \frac{2(x - h)}{b + 2h} - \frac{2(x - h)^2}{(b + 2h)^2} + \frac{8(x - h)^3}{3(b + 2h)^3} - \ldots.$$

und von dieser stark konvergirenden Reihe die zwei ersten Glieder beibehaltend, und Alles nach x ordnend, erhält man

$$y = \tfrac{8}{3}k'\left[x^3 - \frac{3bh(b + h)}{(b + 2h)^2}x^2 + \frac{3b^2h^2x}{(b + 2h)^2} - \frac{(b^2 + bh + 4h^2)h^3}{(b + 2h)^2}\right].$$

Ist nun l die gegebene Länge an dem Wasserspiegel, in welcher die

Digitized by Google

Einmündung des Kanals sich befindet, so ergibt sich durch Auflösung der kubischen Gleichung

$$x^3-\frac{3bh(b+h)}{(b+2h)^2}x^2+\frac{3b^2h^2x}{(b+2h)^2}=\frac{6lM^2}{kb^3}+\frac{(b^2+bh+4h^2)h^3}{(b+2h)^2}$$

die zugehörige Wassertiefe x, und das erforderliche Gefälle $x-h$.

1098. Erklärung. Wenn durch den Einbau einer Wehre die ursprüngliche Oberfläche AB (Fig. 263) eines Flußes, welche mit dem Grundbette CD parallel läuft, gehoben wird, so daß der Wasserspiegel des Flußes eine krumme Fläche $AGMB$ bildet, so heißt die größte Anschwellung EM die Stauhöhe: reicht die Anschwellung bis an den Punkt A, woselbst der Fluß noch seine ursprüngliche Tiefe hat, so nennt man AM die Stauweite.

1099. Aufgabe. Aus der bekannten Stauhöhe, der Wassermenge und den Abmessungen des Flußes dessen Stauweite zu bestimmen.

Auflösung. Heißt H die Stauhöhe, b die natürliche Breite vor dem Einbau, h die Tiefe des Flußes und M die Wassermenge, so hat man die Stauweite W hinreichend genau

$$W=\frac{15700Hb^3h^3(H+h)^3}{M^2[(b+2h)(H+h)^3-(b+2(H+h))h^3]}$$

Beweis. Man ziehe zu der Oberfläche AGM in M die Tangente MT bis an den ursprünglichen Wasserspiegel des Flußes: ferner sei auf eine willkürliche Länge l, das ursprüngliche Gefälle gleich a und das Gefälle des angeschwellten Flußes im höchsten Punkte M gleich a'. Durch den Punkt T sei FG vertikal und TH horizontal gezogen, so ist

$$\frac{a}{l}=\frac{HE}{TH}, \text{ und } \frac{a'}{l}=\frac{HM}{TH}$$

der Quotient beider Ausdrücke gibt die Proportion

$$a:a'=HE:HM, \text{ und}$$

$$a-a':a'=HE-HM:HM=ME:HM$$

nun ist $ME=H$, und man findet

$$HM=\frac{H.a'}{a-a'},\ TH=\frac{l.HM}{a'}=\frac{Hl}{a-a'}.$$

Nach Dubuat's Erfahrungen ist aber stets die Stauweite nahe gleich $^{19}/_{10}\ TM$; mithin ist

$$W=\frac{19}{10}\cdot\frac{Hl}{a-a'}.$$

Wird nun das Querprofil des Flußes als ein Rechteck angenommen, dessen Breite b, Tiefe h ist, so hat man nach (1085)

$$a=\frac{M^2(b+2h)l}{kb^3h^3},\ \text{für } k=8262.8$$

und auf gleiche Weise, da h in $H+h$ übergeht, ist

$$a'=\frac{M^2(b+2(H+h))l}{kb^3(H+h)^3}$$

demnach ihr Unterschied

$$a-a'=\frac{M^2l}{kb^3}\left[\frac{(b+2h)(H+h)^3-(b+2(H+h))h^3}{(H+h)^3h^3}\right]$$

setzt man diesen Werth im Ausdrucke für W, so folgt sofort, wegen $^{19}/_{10}\ k=15700$ der vorhin angegebene Ausdruck.

1100. Anmerkung. Die Auflösung dieser Aufgabe in Gerstner's o. a. Mechanik Band II. S. 334 hat eine Celebrität erhalten, welche der rühmlichst bekannte Verfasser gewiß nicht beabsichtiget hat. Die Herausgeber des zweiten Bandes, welcher gegen den Willen des bald darnach verstorbenen Verfassers erschienen ist, haben sich in diese Arbeit getheilt, und so wurden die verschiedenen Kapitel dieses Bandes von eben so vielen Individuen bearbeitet. Daß die Herausgeber nicht immer die hiezu nöthigen Kenntnisse hatten, beweiset eben die in Rede stehende Aufgabe. Um die Formel S. 338 integriren zu können, wird stillschweigend die Annahme gemacht, daß das Profil rechtwinklig sei, und daß die Breite für den benetzten Umfang gesetzt werden könne, woraus denn folgerecht geschlossen wurde, daß die Stauweite eigentlich unendlich groß sei.

1101. Anmerkung. 2. Die bisherigen Betrachtungen gelten eigentlich für gleichförmige Bewegung des fließenden Wassers, dessen

Digitized by Google

mittlere Geschwindigkeit nur klein ist, da dann die Annahme (1078), daß der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional sei, nahe richtig ist. Fließt das Wasser mit einer größeren Geschwindigkeit, so ist diese Annahme unstatthaft, und es hat schon Newton (*princ. phil. nat. lib. II. prop. XXI.*) den Satz aufgestellt, daß der Widerstand des Wassers, theils dem Quadrate und theils der einfachen Geschwindigkeit proportional sei. Ist nämlich s der Querschnitt des Flußbettes, p der benetzte Umfang, l die Länge, auf welche demselben ein Gefälle a entspricht, und c die beobachtete Geschwindigkeit: so hat man eigentlich

$$\frac{sa}{pl} = Ac^2 + Bc \text{ zu setzen,}$$

und die Koeffizienten A, B aus Beobachtungen zu bestimmen. Bei 91 Versuchen, welche von verschiedenen Beobachtern mit verschiedenen Instrumenten und unter mannigfaltigen Umständen angestellt wurden, ergibt sich nach Eytelwein (o. a. Hydraulik S. 380)

$$A = 0.0001147368,\ B = 0.0000242652$$

woraus die Geschwindigkeit in Pariser Zollen

$$c = -1.2261 + \sqrt{(101059.7(as : pl) + 0.503356)}$$

und im rheinländischen Fußmaße

$$c = -0.1557 + \sqrt{(8751.6(as : pl) + 0.01118)}$$

folgt. Die schöne Uebereinstimmung dieser Formel mit den Versuchen findet man eben da S. 382.

1102. Anmerkung. 3. In Flüßen ist jedoch die Bewegung selten gleichförmig, weil entweder das Bett nicht regelmäßig hergestellt werden kann, oder das Wasser in den meisten Fällen eine fortwährende Neigung hat das Bette zu ändern. In Gegenden nämlich, wo der Fluß sich zwischen Felsen und Hügeln durchwindet, kann er sich nicht so ausbreiten, wie in der Ebene, und er ist dann häufig so beschränkt, daß ihm das zu einer gleichförmigen Bewegung auf eine gegebene Länge erforderliche Gefälle nicht ertheilt werden kann: sein Gefälle ist daher zu groß, und er fließt in dieser Gegend mit einer großen Geschwindigkeit, welche bei dem Hochwasser noch mehr steigt. Je weiter man aber stromabwärts kommt, desto

Digitized by Google

geringer wird das Gefälle, und die damit zusammenhängende Geschwindigkeit, zumal, wo das Wasser in einer Ebene sich ein breiteres Bett bilden kann, daher dann die Geschwindigkeit des fließenden Wassers mit der Länge des Weges abnimmt, und beim Ausfluße in das Meer ist sie gewöhnlich sehr klein. In den Gegenden des oberen Laufes lösen sich die Erde und die Felsen von ihren zu Tage stehenden Lagerstätten durch den Einfluß der Witterung los, und werden allmälig durch die Regenwasser über die steilen Abhänge der Berge in die Bette der Bäche und Flüsse hinabgeführt. Beim Hochwasser ist die Geschwindigkeit des Wassers mehr als hinreichend, um auch die größeren Bruchstücke nach den unteren Gegenden abzuführen, wo sie, wie die Geschwindigkeit nach und nach abnimmt nach Maßgabe ihrer Größe vom obern Laufe an, in verschiedenen Entfernungen niederfallen und liegen bleiben. In allen Flüssen wird daher kleines Material als Sand, Steine und Erde am weitesten verführt, und bei Ueberschwemmungen auch auf die angrenzenden Thäler und Flächen gebracht, woraus denn die Erhöhungen der Uferthäler sich erklären lassen. Am Nilfluße hebt sich die Thalfläche in 100 Jahren um $4^1/_2$ Zoll. Eine Folge der Versandung der Bette ist, daß sich der Strom in der Ebene ein neues Bett sucht, und Inseln bildet.

IV. Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen.

1103. Erklärung. Wird das Wasser aus einem Behälter durch eine gerade gegen den Horizont geneigte Röhre geleitet, so müßte das am anderen Ende der Röhre ausfließende Wasser, wenn kein Widerstand der Bewegung in der Röhre vorhanden wäre, diejenige Geschwindigkeit erhalten, welche aus dem Wasserstande im Behälter und aus dem Gefälle der geneigten Röhre sich ergibt. Die dieser Geschwindigkeit zugehörige Höhe oder der lothrechte Abstand des Wasserspiegels im Behälter vom Mittelpunkte der Ausflußöffnung der Röhre heißt nun die Druckhöhe, des aus der Röhre abfließenden Wassers. Die wirkliche Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers ist aber Versuchen zu Folge, bedeutend kleiner als jene und man kann sich vorstellen, als ob die Druckhöhe, um die Höhe

Digitized by Google

einer Wassersäule, welche dem Widerstande der Bewegung des Wassers in der Röhre gleich kommt, und welche man die **Widerstandshöhe** nennt, vermindert worden wäre. Endlich nennt man die Höhe einer Wassersäule, welche ohne Hindernisse diejenige Geschwindigkeit erzeugt haben würde, welche der wirklichen Geschwindigkeit des aus der Röhre ausfließenden Wassers gleich ist, die **Geschwindigkeitshöhe** desselben.

1104. **Folgesatz.** Heißt c die wirkliche Geschwindigkeit des Abflusses, α der Kontrakzionskoeffizient, H die Geschwindigkeitshöhe, h die Druckhöhe, und h' die Widerstandshöhe, so hat man stets $c^2=\alpha^2 H$, und $H=h-h'$.

1105. **Lehrsatz.** Die Widerstandshöhen zweier Röhren verhalten sich wie die Röhrenlängen, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten und verkehrt wie die Durchmesser dieser Röhren.

Beweis. Die Bewegung des Wassers in einer längeren und weiteren Röhre muß einen größeren Widerstand erfahren als in einer kürzeren und engeren Röhre, weil je größer die innere Fläche einer Röhre ist, desto größer ist die Anzahl Wassertheile, die sich jeden Augenblick von der Röhrenwand losreißen müssen: ferner nehmen die Widerstände mit dem Quadrate der Geschwindigkeit zu, indem bei einer größeren Geschwindigkeit auch eine größere Anzahl Wassertheile durch die Röhre läuft, und jeder derselben in einer kürzeren Zeit sich losreißen muß: endlich je größer der Querschnitt der Röhre ist, auf desto mehr Wassertheile vertheilt sich der ganze Widerstand d. i. der Widerstand ist dem Querschnitte der Röhren, oder weil diese sich wie die Quadrate der Durchmesser verhalten, dem Quadrate derselben umgekehrt proportional. Bezeichnet man daher mit H', h' die Widerstandshöhen zweier Röhren

L, l ihre Längen
D, d ihre Durchmesser
C, c die Geschwindigkeiten des Wassers

so ist $H' : h' = \frac{DLC^2}{D^2} : \frac{dlc^2}{d^2} = \frac{LC^2}{D} : \frac{lc^2}{d}$.

Digitized by Google

1106. **Folgesatz.** Man findet hieraus $H'Dlc^2 = h'LC^2d$, mithin

$$c^2 = \frac{LC^2}{DH'} \cdot \frac{h'd}{l}, \text{ und } c = C\sqrt{\frac{L}{DH'}} \cdot \sqrt{\frac{h'd}{l}}$$

oder wenn man den ersten Faktor mit β bezeichnet, und seinen Werth durch Versuche bestimmt, so wird

$$c = \beta\sqrt{\frac{h'd}{l}}.$$

1107. **Anmerkung.** Aus 51 Versuchen, welche ***Dubuat*** bei sehr verschiedenen Röhrenleitungen angestellt hat, ergab sich im Mittel, wenn sich alle Größen auf Pariser Zollmaß beziehen, $\beta = 152.47$ oder wenn Alles in rheinländischen Fußen bestimmt wird, $\beta = 44.79$:

$$\text{es ist also } c = 44.79\sqrt{\frac{h'd}{l}} \text{ rheinl. Fuße.}$$

Für ein anderes Fußmaß, wenn r die Zahl bedeutet, mit welcher man den rheinländischen Fuß zu multipliziren hat, um ihn in jenes zu verwandeln, ergibt sich nach (1080) $c = 44.79\sqrt{rh'd} : \sqrt{l}$.

1108. **Aufgabe.** Die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhrenleitung durch die Druckhöhe darzustellen.

Auflösung. Man hat für rheinländisches Fußmaß

$$c = 6.42\sqrt{\frac{50hd}{l+50d}}.$$

Beweis. Der Ausdruck für c (1107) enthält die Widerstandshöhe h', statt welcher nun die Druckhöhe h aus (1104) zu substituiren kommt. Es ist aber $h' = h - H = h - c^2 : \alpha^2$, und man erhält, wenn man den Ausdruck (1107) quadrirt, und statt h' diesen Werth setzt

$$c^2 l = (44.79)^2\left(h - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)d, \text{ oder } \frac{c^2 l}{(44.79)^2 d} + \frac{c^2}{\alpha^2} = h.$$

Hieraus folgt

$$c^2 = \alpha^2 h : \left(\frac{\alpha^2 l}{(44.79)^2 d} + 1\right)$$

Digitized by Google

nun iſt $\alpha=6.42$, $\alpha^2=41.22$, alſo $\alpha^2:(44.79)^2=0.0205$, wofür man $0.02=1/50$ annehmen kann; es iſt daher die mittlere Geſchwindigkeit, womit das Waſſer aus einer Röhrenleitung fließt, wie oben.

1109. Anmerkung. Die Annahme (1105), daß die Widerſtandshöhe dem Quadrate der Geſchwindigkeit proportional ſei, iſt nicht ſtreng richtig (1101): vielmehr muß bei größeren Geſchwindigkeiten des in Röhren fließenden Waſſers geſetzt werden

$$h'=\frac{4Al}{d}(c^2+Bc),$$

wo A, B zwei Erfahrungskoeffizienten vorſtellen: und es iſt nach Couplet für das metriſche Syſtem $A=0.0003425$, $B=0.055$, und für rheinländiſches Fußmaß iſt nach Eytelwein

$$c=\frac{-l+\sqrt{[l^2+(176017l+12121336d)hd]}}{7.87+542d}$$

nach Gerſtner iſt

$$h=\frac{c^2}{2g}+\frac{l}{45d}\left(\frac{c^2}{2g}+\frac{c}{100\sqrt{d}}\right).$$

1110. Folgeſatz. Multiplizirt man den für c erhaltenen Werth in den Querſchnitt der Röhre, ſo gibt das Produkt die Waſſermenge

$$M=1/4\pi d^2c=5.04d^2\sqrt{\frac{50hd}{l+50d}}.$$

1111. Folgeſatz 2. Wird die Gleichung (1108) quadrirt, ſo ergibt ſich

$$41.22hd=c^2(0.02l+d), \text{ und daher}$$

$$h=\frac{(0.02l+d)c^2}{41.22d},\quad l=\left(\frac{41.22h}{c^2}-1\right)50d.$$

1112. Folgeſatz. 3. Verlangt man aber den Durchmeſſer der Röhre zu beſtimmen, welche eine gegebene Waſſermenge M bei der Druckhöhe h und Länge l liefert, ſo folgt aus (1110).

Digitized by Google

$$M^2(l+50d)=(5.04)^2d^4.\ 50hd=1270d^5h$$

woraus man die Gleichung erhält

$$d^5-\frac{M^2}{25.4h}-\frac{M^2l}{1270h}=o.$$

Für die erste Näherungsberechnung läßt man das mittlere Glied weg und hat so $d=\sqrt[5]{(M^2l:1270h)}$, setzt man diesen etwas zu kleinen Werth in die Gleichung, und mehrt ihn stufenweise bis sich der Betrag der Gleichung auf Null reduzirt, so erhält man den gesuchten Durchmesser.

Beispiel. Sei $M=0.8$ Kubikfuß, $h=30'$, $l=1000'$, so ist $M^2l=640$, $1270h=38100$ und die Gleichung

$$d^5-0.000840d-0.016798=o$$

log. 640 = 2.80618
log. 38100 = 4.58092
log. d^5 = 3.22526 — 5
log. d = 0.64505 — 1, $d=0.441$

für $d=0.45$ ist der Rest 0.00128; folglich nahe $d=0'.45=5.4$ Zolle.

1113. Erklärung. Wenn eine Röhre so gelegen ist, daß sie durchgängig ihre Weite behält und die verlängerten Axen AC, BC im Punkte C (Fig. 264) zusammentreffen, so sagt man, die Krümmung bei C habe eine Anprallung: zieht man im Punkte C eine Tangente DE, so ist $DCA=BCE$ der Anprallungswinkel, ACB hingegen der Krümmungswinkel. Finden in einer Krümmung mehrere Anprallungen Statt, so lassen sich für jede derselben der zugehörige Anprallungswinkel bestimmen. Der Theil der Druckhöhe, welcher zur Ueberwältigung des Widerstandes, der von den Krümmungen der Röhre entsteht, verwendet wird, heißt die Widerstandshöhe wegen der Krümmung.

1114. Anmerkung. Bei jeder Anprallung geht ein Theil der Druckhöhe verloren, welcher dem Quadrate des Sinus des Anprallungswinkels proportional ist. Nach *Dubuat*'s Versuchen ist die Widerstandshöhe wegen den Anprallungen des Wassers in einer gekrümmten Röhre gleich der Summe der Quadrate von dem Sinus aller Anprallungswinkel multiplizirt in das Quadrat

der Geschwindigkeit und in den nahe konstanten Faktor 0.00387, wenn die Anprallungswinkel nicht über 36 bis 40 Grade steigen, und sich alle Größen auf rheinländisches Fußmaß beziehen. Heißt also h'' diese Widerstandshöhe, S^2 die Summe der Quadrate der Sinus sämmtlicher Anprallungswinkel, c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre, so hat man

$$h''=0.00387\ c^2S^2.$$

1115. Folgesatz. Hiemit wird $h'+h''=h-H$ oder

$$h'=h-\frac{c^2}{\alpha^2}-0.00387c^2S^2,$$

setzt man diesen Werth statt h' in (1107), so ergibt sich

$$c^2l=(44.79)^2\left(h-\frac{c^2}{\alpha^2}-0.00387c^2S^2\right)d, \text{ oder}$$

$$c^2\left[l+\frac{(44.79)^2d}{\alpha^2}+(44.79)^2\,.\,(0.00387S^2)d\right]=(44.79)^2h$$

multiplizirt man beiderseits mit $\frac{\alpha^2}{(44.79)^2}=0.02$, so folgt

$$c^2[0.02l+d+\alpha^2(0.00387S^2)d]=\alpha^2hd$$

$$\text{und } c=6.42\sqrt{\frac{hd}{0.02l+d+0.16S^2d}}.$$

1116. Folgesatz 2. Verlangt man denjenigen Theil der Druckhöhe h zu wissen, welcher als Widerstandshöhe h'' zur Ueberwältigung der Hindernisse längst einer Röhre von gegebener Länge l und Durchmesser d für eine bestimmte Geschwindigkeit c erfordert wird, so ist nach (1107) für eine gerade Röhre

$$44.79\sqrt{\frac{dh'}{l}}=c\text{, also } h'=\frac{lc^2}{(44.79)^2d}=\frac{lc^2}{2006.14d}$$

und für eine gekrümmte Röhre kommt nach (1114) die Widerstandshöhe wegen der Krümmung hiezu, so daß

$$h'=\frac{lc^2}{2006.14d}+h''=\frac{lc^2}{2006.14d}+0.00387c^2S^2 \text{ wird.}$$

Digitized by Google

1117. Aufgabe. Bei einer kreisförmig gewundenen Röhre die Widerstandshöhe wegen der Krümmung zu bestimmen.

Auflösung. Man bezeichne mit ϱ den Halbmesser der gewundenen Röhre, mit r den Halbmesser des Kreises, nach welchem die Röhre gebogen ist, so ist für die Geschwindigkeit des Wassers c, und die Länge des Bogens in der centrischen Linie l

$$\beta = arc\sin\frac{\sqrt{(2r+3\varrho)\varrho}}{r+\varrho}, \quad h'' = \frac{c^2 l(2r+3\varrho)\varrho}{516(r+\varrho)^2\beta}.$$

Beweis. Sei $AO=r$ (Fig. 265) $AB=\varrho$: man ziehe von dem einen Endpunkte B des wasserhaltenden Bogens BD die Tangente BC, und von C aus die Tangente CT, so ist $TCB=\beta$ der Anprallungswinkel des Wassertheilchens in B, und gleich dem Winkel BOC. Nun ist, wenn man den Durchmesser DOC zieht, $BC^2=CD\times CE$, oder wenn $BC=t$ gesetzt wird, weil $CB=2r+3\varrho$, $CE=\varrho$ ist, $t^2=(2r+3\varrho)\varrho$: ferner ist $(r+\varrho)\sin\beta=t$, oder

$$\beta = arc\sin\frac{\sqrt{(2r+3\varrho)\varrho}}{r+\varrho}.$$

So oft nun 2β in l enthalten ist, eben so viele Mahle wird dasselbe Wassertheilchen B einander gleiche Anprallungen in der Röhre erleiden, dies gibt:

$$h'' = 0.00387c^2S^2 = \frac{0.00387c^2 l(2r+3\varrho)\varrho}{2(r+\varrho)^2\beta} = \frac{c^2 l(2r+3\varrho)\varrho}{516(r+\varrho)^2\beta},$$

1118. Folgesatz. Vereiniget man diesen Werth mit dem ersten Theile des Ausdruckes h' in (1116): so ergibt sich da $d=2\varrho$ ist,

$$h' = \frac{lc^2}{4012\varrho} + \frac{c^2 l(2r+3\varrho)\varrho}{516(r+\varrho)^2\beta} = \frac{c^2 l[(r+\varrho)^2\beta + 8(2r+3\varrho)\varrho^2]}{4012(r+\varrho)^2\varrho\beta} \text{ nahe.}$$

1119. Aufgabe. Das Wasser eines Behälters, welcher beständig voll erhalten wird, durch horizontale Röhren von gegebener Länge an mehrere Punkte so hin zu leiten, daß jede derselben eine beliebige im voraus bestimmte, Wassermenge erhalte, man frägt nach den erforderlichen Durchmessern der Zuleitungsröhren und dem Wasserstande des Behälters.

Auflösung. Sei $ABCD$ (Fig. 266) der Grundriß eines

Digitized by Google

hinreichend weiten Behälters, l die Länge der wagerechten Hauptröhre, d ihr Durchmesser, M die in jeder Sekunde ausfließende Wassermenge, und h die Druckhöhe des Wassers im Behälter. Bezeichnet man den Kontraktionskoeffizienten für die Einmündung der Röhre mit α, wo $\alpha=6.42$, $\alpha^2=41.220$ bedeutet, so ist die zur Erzeugung der Geschwindigkeit c des Wassers in der Röhre erforderliche Druckhöhe $c^2:a^2$, und die dieser Geschwindigkeit entsprechende Widerstandshöhe $c^2l:\beta^2d$, wo $\beta=44.79$, $\beta^2=2006.144$ ist. Man hat also

$$h=\frac{c^2}{\alpha^2}+\frac{c^2l}{\beta^2d}=c^2\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{l}{\beta^2d}\right)$$

anderseits ist $M=\frac{1}{4}\pi d^2c$, mithin

$$c^2=\frac{16M^2}{\pi^2d^4}\text{: hiemit wird } h=\frac{16M^2}{\pi^2d^4}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{l}{\beta^2d}\right)$$

oder, wenn wir den ersten Faktor, der von M und d abhängt mit P, den andern Faktor aber, welcher durch l und d gegeben ist, mit Q bezeichnen, so ist 1) $h=PQ$, zugleich haben wir zur Bestimmung von d aus 1), die Gleichung

$$d^5-\frac{16M^2d}{\pi^2\alpha^2h}-\frac{16M^2l}{\pi^2\beta^2h}=o,\text{ oder für 2) } N=\frac{16M^2}{\pi^2h}.$$

$$3)\quad d^5-\frac{Nd}{\alpha^2}-\frac{Nl}{\beta^2}=o,$$

diese Gleichung hat stets nur eine reelle Wurzel, welche nach (1112) mit hinreichender Genauigkeit sich finden läßt, die anderen vier Wurzeln sind aber imaginär.

Für eine mehrfach verzweigte Röhrenleitung, deren einzelne gerade Röhren in einer horizontalen Ebene liegen, sei die Röhre l in Verbindung mit den Röhren l_1, l_2, die Röhre l_1 mit l_3 und l_4, die Röhre l_2 aber mit den Röhren l_5, l_6, l_7 u. s. f. man bezeichne die Längen dieser Röhren mit den angegebenen Buchstaben, die einzelnen Röhren zugehörigen Druckhöhen aber mit h, h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, hingegen sei nun H die erforderliche Druckhöhe im Behälter, ferner seien

$$d,\ d_1,\ d_2\ \ldots\ d_7 \quad \text{die Durchmesser dieser Röhren}$$

Digitized by Google

$a, a_1, a_2 \ldots a_7$ die Querschnitte derselben,
$c, c_1, c_2 \ldots c_7$ die Geschwindigkeiten des Wassers,
$M, M_1, M_2 \ldots M_7$ die von ihnen gelieferten Wassermengen,
endlich $\left.\begin{matrix} N, N_1, N_2 \ldots N_7 \\ P, P_1, P_2 \ldots P_7 \\ Q, Q_1, Q_2 \ldots Q_7 \end{matrix}\right\}$ dasjenige, was aus N, P, Q wird wenn in den Ausdrücken

bedeuten

$$N=\frac{16M^2}{\pi^2 h},\quad P=\frac{16M^2}{\pi^2 d^4},\quad Q=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{l}{\beta^2 d}$$

die Größen M, h, d, l in andere gleichnamige übergehen. Die gesammte Wassermenge M, welche der Behälter liefert, strömmt durch die Ausflußöffnungen der fünf Röhren l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, aber auch durch die zwei Zwischenröhren l_1 und l_2: eben so speiset die Röhre l_1 die beiden l_3 und l_4, und die Röhre l_2 die drei l_5, l_6, l_7. Man hat daher

$$4)\quad \begin{cases} M = M_3+M_4+M_5+M_6+M_7 \\ M_1 = M_3+M_4 \\ M_2 = M_5+M_6+M_7. \end{cases}$$

Soll aus jeder Ausflußöffnung die erforderliche Wassermenge auslaufen, so kann dies nur durch die gesammte Druckhöhe H bewirkt werden, und diese muß daher für jede Ausflußröhre eben so groß sein, als die Summe von den einzelnen Druckhöhen der zwischenliegenden Röhren, durch welche jene ihr Wasser erhält. Dies gibt

$$5)\quad \begin{Bmatrix} H=h+h_1+h_3 \\ H=h+h_1+h_4 \\ H=h+h_2+h_5 \\ H=h+h_2+h_6 \\ H=h+h_2+h_7 \end{Bmatrix}$$

Wird nun der Gleichung 1) gemäß, $h_7=P_7Q_7$ gesetzt, und man bestimmt aus den gegebenen M_7, l_7 die Größe d_7 durch Versuche, nimmt aber d_7 so klein, als es die Umstände gestatten, so erhält man, da den Gleichungen 5) zu Folge $h_7=h_6=h_5$ ist, durch Auflösung der Gleichungen

$$d^5{}_6-\frac{N_6 d_6}{\alpha^2}-\frac{N_6 l_6}{\beta^2}=o,\quad d^5{}_5-\frac{N_5 d_5}{\alpha^2}-\frac{N_5 l_5}{\beta^2}=o$$

Digitized by Google

ſowohl d_6 als d_5, und folglich auch die Querſchnitte a_7, a_6, a_5. Nun beſtimme man d_2 ſo, daß $a_2=a_7+a_6+a_5$ ſei, ſo ergibt ſich h_2.

Abermals wird aus der Gleichung $h_4=P_4Q_4$ die Größe d_4 willkürlich, aber ſo klein angenommen, als es angemeſſen iſt: da nach 5) $h_3=h_4$, ſo kennt man auch h_3, und hieraus erhält man nach der Gleichung

$$d^5{}_3-\frac{N_3d_3}{\alpha^2}-\frac{N_3l_3}{\beta^2}=o$$

den Durchmeſſer d_3; folglich kennt man auch $a_1=a_3+a_4$, und daher d_1, h_1. Da aber $a=a_1+a_2$ iſt, ſo ergibt ſich daraus d, und hiemit $h=PQ$, und endlich die ganze Druckhöhe

$$H=h+h_1+h_3=h+h_2+h_5.$$

1120. Anmerkung. Bei der vorſtehenden Beſtimmung werden die Röhren ganz glatt ohne Unebenheiten und ohne ſcharfer Ränder, in der gemeinſchaftlichen Verbindung von je zwei oder drei derſelben, vorausgeſetzt; da aber bei der Ausführung dieſer Grad der Vollkommenheit nicht wohl ſich erwarten läßt; ſo dürfte es gerathen ſein, die ſo durch Rechnung beſtimmten Durchmeſſer der Röhren, um ihren vierten Theil zu vergrößern, da ohnehin durch einen bei jeder Ausflußröhre angebrachten Hahn, die über den Bedarf etwa zufließende Waſſermenge ſich abſperren läßt. Eine andere Vorſicht, welche bei Anlage von Röhrenleitungen zu berückſichtigen kommt, bezieht ſich auf die ſogenannten Windſtöcke, welches kleine vertikale Luftröhren ſind, die in angemeſſenen Entfernungen an den Zuleitungsröhren angebracht werden, um der Luft, welche ſich während der Bewegung des Waſſers entwickelt und die Bewegung deſſelben verhindert, einen Ausgang zu verſchaffen. Eben ſo müſſen die Röhren zur Abſetzung des Schlammes, Sandes und anderer Unreinigkeiten, welche das Waſſer mit ſich führt, in angemeſſenen Entfernungen mit Schlammkäſten oder Wechſelhäuschen verſehen ſein. Bei Röhrenleitungen, welche nicht in einer horizontalen Ebene liegen, werden die Windſtöcke an den höchſten und die Wechſelhäuschen an den niedrigſten Stellen der Leitung, am beſten aber da angebracht, wo ſich die Röhren verzweigen, weil hiedurch die

Digitized by Google

nachtheiligen Krümmungen derselben vermieden werden. Endlich ist darauf zu achten, daß die Orte E, F, G, H, I denen das Wasser aus dem Behälter zugeführt wird, durch ein Röhrensystem so mit dem Behälter verbunden werden, daß die Totallänge möglichst klein wird.

1121. Aufgabe. Wenn bei einer verzweigten Röhrenleitung die Ausflußöffnungen der Endröhren nicht in einerlei horizontalen Ebene liegen, die Durchmesser der Röhren sowohl als auch den Wasserstand des beständig voll erhaltenen Behälters so zu bestimmen, daß jede Endröhre die vorgegebene Wassermenge liefert.

Auflösung. Mit Beibehaltung der Bezeichnung von (1119) seien noch b_3, b_4, b_5, b_6, b_7 die vertikalen Vertiefungen der Mitte der Ausflußöffnungen der Endröhren von einer horizontalen Ebene, welche zwar willkürlich aber so gewählt wird, daß auch die höchste Ausflußöffnung noch unterhalb dieser Ebene fällt; so sind $H+b_3$, $H+b_4$, $H+b_5$, $H+b_6$, $H+b_7$ die Druckhöhen, welche dem Ausfluß des Wassers jener Endröhren zugehören, und man hat die Gleichungen 4) wie in (1119), allein die Gleichungen 5) stellen sich jetzt so heraus.

$$6)\begin{cases} H+b_3=h+h_1+h_3, & H+b_4=h+h_1+h_4, & H+b_5=h+h_2+h_5, \\ H+b_6=h+h_2+h_6, & H+b_7=h+h_2+h_7. \end{cases}$$

Sind nun sämmtliche Längen der Röhren und die ihnen zugehörenden Wassermengen nebst den senkrechten Abständen der Ausflußöffnungen unter der angenommenen horizontalen Ebene gegeben, und man sucht sämmtliche Durchmesser der Röhren, so nimmt man wie vorhin d_7 willkürlich und so klein als sich thun läßt, an, und berechnet $h_7=P_7Q_7$: nach den Gleichungen 6) ist nun $h_6=b_6-b_7+h_7$, $h_5=b_5-b_6+h_6$ daher findet man d_6 und d_5 nach den Gleichungen

$$d^5{}_6-\frac{N_6d_6}{\alpha^2}-\frac{N_6l_6}{\beta^2}=o\,,\quad d^5{}_5-\frac{N_5d_5}{\alpha^2}-\frac{N_5l_5}{\beta^2}=o,$$

hierauf setzt man $a_2=a_5+a_6+a_7$, und bestimmt demnach d_2, und $h_2=P_2Q_2$. Jetzt wird d_4 willkürlich aber so klein gewählt, als es die Umstände zulassen, bestimmt $h_4=P_4Q_4$, $h_3=b_3-b_4+h_4$, und sucht d_3 nach der Gleichung

Digitized by Google

$$d^5 - \frac{N_3 d_3}{a^2} - \frac{M_3 l_3}{\beta^2} = o$$

bestimmt dann $a_1 = a_3 + a_4$, und hieraus d_1, $h_1 = P_1 Q_1$, macht endlich $a = a_1 + a_2$, berechnet d aus a, und $h = PQ$; so ergeben sich die gesuchten Durchmesser, und $H = h + h_2 + h_7 - b_7$.

1122. Anmerkung. Wenn das Terrain eine geradlinige Anlage der Röhrenleitung, wie es die Rechnung voraussetzt nicht zuläßt, so müssen stellenweise, wo die geradlinige Röhrenleitung eine andere Richtung erhält, kreisförmig gebogene Röhren eingelegt werden: da dann noch der Widerstand wegen der Krümmung an diesen Stellen zu berücksichtigen kommt, welcher nach (1118) oder auch direkt nach der Formel $h'' = 0.00387 c^2 S^2$ berechnet werden kann.

1123. Anmerkung 2. Es verdient hier noch eine zweite Bestimmungsweise des Widerstandes in gebogenen Röhren angeführt zu werden, welche Gerstner in seinem Handbuche der Mechanik aufstellt. Ist FC (Fig. 264) die Geschwindigkeit eines Wassertheilchens in der centrischen Linie der Röhre, so prallt es in C an die Röhrenwand an, und setzt seinen Weg nach der Richtung CB mit einer Geschwindigkeit CG fort: durch die Verzeichnung des Parallelogramms $FCGH$, ergibt sich die Resultirende CH, und es ist, wenn CG von CF nicht merklich verschieden ist, CH senkrecht auf der Tangente DE: bezeichnet man den Krümmungswinkel FCG mit w, so ist der Druck im Punkte C, oder $CH = 2CI = 2\cos^1/_2 w = 2\sin\beta$, wenn der Anprallungswinkel $FCD = \beta$ ist. Ist der Winkel w kleiner, also β größer, so haben mehrere Anprallungen Statt, bevor das Wassertheilchen in die völlig geänderte Richtung CG gelangt. Die hiezu erforderliche Widerstandshöhe wird also der Summe aus den Sinus sämmtlicher Anprallungswinkel proportional sein; man hat also $h'' = 2mc^2 S$, wenn S diese Summe vorstellt, und m einen Erfahrungskoeffizienten bezeichnet. Nimmt man jeden der Anprallungswinkel nicht größer als einen Grad an, so läßt sich dessen Sinus mit dem Winkel selbst verwechseln und es geht S über in $n\pi : 180$, wo n die Gradezahl des Win-

Digitized by Google

kels β bedeutet. Hiemit wird $h''=2mc^2n\pi:180$. Eine Vergleichung dieser Formel mit den Ergebnissen der Versuche Dubuat's liefert

$$h''=\frac{n}{923}\cdot\frac{c^2}{2g}, \text{ also nahe } h''=\frac{n}{1000}\cdot\frac{c^2}{2g}.$$

Vereiniget man diesen Ausdruck mit der Widerstandshöhe für die Bewegung des Wassers in geraden Röhren (1100), so erhält man die Gerstner'sche Formel für gebogene Röhren

$$h=\frac{c^2}{2g}+\frac{l}{45d}\left(\frac{c^2}{2g}+\frac{c}{100\sqrt{d}}\right)+\frac{n}{1000}\cdot\frac{c^2}{2g}.$$

1124. Folgesatz. Heißt nun z die Sprunghöhe einer Wasserkunst, also $z=c^2:2g$ ein Näherungswerth derselben, so ergibt sich, wenn man aus diesem Ausdruck den Faktor $c^2:2g$ heraushebt, genauer

$$z=\frac{c^2}{2g}=h:\left[1+\frac{l}{45d}+\frac{2gl}{4500cd\sqrt{d}}+\frac{n}{1000}\right],$$

oder für c die Größe $\sqrt{2gh}$ substituirt

$$z=h:\left[1+\frac{l}{45d}+\frac{l}{4500d}\sqrt{\frac{2g}{hd}}+\frac{n}{1000}\right].$$

1125. Folgesatz. Zur Vereinfachung und näheren Bestimmung der Sprunghöhe, setzen wir den Durchmesser der Ausflußmündung $=\delta$, die Geschwindigkeit des Wassers daselbst $=c$ und den Kontraktionskoeffizienten $=\alpha$, ferner die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre $=v$, so ist $^1/_4\alpha\pi\delta^2.c=^1/_4\pi d^2v$, also $v=\alpha c\delta^2:d^2$; dies gibt, wenn man das Glied mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit unbeachtet läßt,

$$h=\frac{c^2}{2g}+\frac{l}{45d}\cdot\frac{\alpha^2\delta^4}{d^4}\cdot\frac{c^2}{2g}+\frac{\alpha^2\delta^4}{d^4}\cdot\frac{c^2}{2g}\cdot\frac{n}{1000}, \text{ woraus sich}$$

$$z=\frac{c^2}{2g}=h:\left[1+\frac{\alpha^2\delta^4}{d^4}\left(\frac{l}{45d}+\frac{n}{1000}\right)\right] \text{ ergibt,}$$

und wenn $n=o$ ist, so erhält man den erforderlichen Durchmesser der Zuleitungsröhre

Digitized by Google

$$d=\delta\sqrt[5]{\frac{\alpha^2 lz}{45\delta(h-z)}}.$$

Beispiel. Für $d=2''$, $\delta=\frac{1}{2}''$, $\alpha=0.619$, $n=200$ Grad $l=3000'$, $h=30$ Fuß, folgt $z=2.9$ Fuß. Bestimmt man aber d so, daß $z=20'$, $\delta=1''$ sei, die anderen Größen wie vorhin, so findet man $d=3.6$ Zoll, wofür man der Sicherheit wegen $4''$ nehmen kann. Mit diesem Werthe erhält man nun $z=23.1$ Fuß. Man ersieht hieraus, welchen bedeutenden Einfluß das Verhältniß der Durchmesser in der Ausflußöffnung und der Zuleitungsröhre auf die Sprunghöhe nimmt.

1126. Aufgabe. Die erforderliche Druckhöhe bei einem konischen Ausgußrohre zu bestimmen, wenn der Wasserstrahl mit einer gegebenen Geschwindigkeit ausfahren soll?

Auflösung. Heißt bei einem konischen Ausgußrohre a die Länge, B, b die Halbmesser der Kreisförmigen Grundflächen, und c die Geschwindigkeit, so folgt die erforderliche Druckhöhe h

$$h=\frac{a}{360B}\left(1+\frac{b}{B}\right)\left(1+\frac{b^2}{B^2}\right)\frac{c^2}{2g}.$$

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 267) der Querschnitt der konischen Ausgußröhre $BE=b$, $FC=B$, $EF=a$, $EP=x$, $PN=y$ und die Geschwindigkeit des Wassers in MN gleich v. Bei der Bewegung des Wassers durch das Element Mn, findet ein Widerstand Statt, zu dessen Ueberwindung eine Druckhöhe erfordert wird, welche aus (1123) sich ergibt, wenn man dort dh statt h, dx statt l, $2y$ statt d und v statt c schreibt

$$dh=\frac{dx}{45.2y}\cdot\frac{v^2}{2g}.$$

Es ist aber, wenn BG zu EF parallel gezogen wird,

$BQ:QN=BG:GC$ oder $x:QN=a:B-b$, dies gibt

$$QN=\frac{x(B-b)}{a},\quad PN=y=b+\frac{x(B-b)}{a}=b\left(1+\frac{x(B-b)}{ab}\right)$$

Digitized by Google

die Wassermenge durch die Oeffnung AB ist $\pi b^2 c$, durch den Querschnitt MN hingegen $\pi y^2 v$, also $b^2 c = y^2 v$, mithin

$$v = \frac{b^2 c}{y^2}, \quad \frac{v^3}{y} = \frac{b^4 c^2}{y^5}, \text{ und demnach}$$

$$dh = \frac{dx b^4}{90 y^5} \cdot \frac{c^2}{2g} = \frac{c^2}{90.2gb} \frac{dx}{\left[1+\frac{(B-b)x}{ba}\right]^5}, \text{ woraus nach Int. 30)}$$

$$h = -\frac{ac^2}{360.2g(B-b)} \cdot \frac{1}{[1+(B-b)x:ab]^4} + C,$$

und weil mit der Länge x die zugehörige Widerstandshöhe verschwindet, so ist $C = \frac{ac^2}{360.2g(B-b)}$, also vollständig,

$$h = \frac{ac^2}{360.2g(B-b)} \left[1 - \frac{1}{[1+(B-b)x:ab]^4}\right].$$

Wird $x=a$ gesetzt, so erhält man nach einigen Reduktionen den obigen Ausdruck.

Ist z. B. $2b = 7\frac{1}{2}$ Linien, $2B = 1\frac{1}{2}$ Zolle, $a = 42$ Zolle, so findet man $h = 0.259c^2 : 2g$, mithin beträgt der Widerstand in der Gußröhre der Spritze, beiläufig den vierten Theil der ganzen Steighöhe.

1127. Aufgabe. Wenn das Mundstück des Ausgußrohres die Gestalt des zusammengezogenen Wasserstrahles besitzt, aus der gegebenen Steighöhe des Wasserstrahles die gehörige Druckhöhe zu bestimmen.

Auflösung. Heißt A die Steighöhe, δ der Durchmesser der Ausflußöffnung, d der Durchmesser, l die Länge des Ausgußrohres, so ist die erforderliche Druckhöhe

$$H = A\left(1 + \frac{l(2\delta)^4}{45d^5} + \frac{1}{90}\right).$$

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 280) der vertikale Schnitt des Mundstückes von der Form des zusammengezogenen Wasserstrahles, so sind

Digitized by Google

nach genauen Meſſungen die Bogen BC, AD Kreisbögen, deren Halbmeſſer $R=\frac{3}{2}CD=3r$, $EB=\delta=0.787r$, $EF=a=\frac{10}{9}R$, woraus folgt $BH=r-\delta=r(1-0.787)=0.213r=\beta$ Kürze halber. Setzen wir nun für den Punkt M die Ordinate $MG=x$, und die Abſziſſe $EG=y$; ſo iſt $BG=y-\delta=u$, und die Gleichung des Kreiſes BMC wird $x^2=(2R-u)u$, da u gegen $2R$ nur klein iſt, ſo kann man $x^2=2Ru$ ſetzen, und auf gleiche Weiſe wird $a^2=2R\beta$, demnach

$$\frac{u}{\beta}=\frac{x^2}{a^2}, \text{ und } y=\delta+u=\delta\left(1+\frac{\beta x^2}{a^2\delta}\right).$$

Heißt v die Geſchwindigkeit im Querſchnitte MN, und c die Geſchwindigkeit in AB, ſo iſt $v=cd^2:y^2$, hiermit wird die Widerſtandshöhe $=h'$ geſetzt,

$$dh'=\frac{c^2}{90.2g\delta}\cdot dx:\left(1+\frac{\beta x^2}{a^2\delta}\right)^5=\frac{c^2dx}{90.2g\delta}\cdot\left(1+\frac{\beta x^2}{a^2\delta}\right)^{-5}$$

$$=\frac{c^2dx}{90.2g\delta}\left(1-\frac{5\beta}{\delta}\cdot\frac{x^2}{a^2}+\frac{15\beta^2}{\delta^2}\cdot\frac{x^4}{a^4}-\frac{35\beta^3}{\delta^3}\cdot\frac{x^6}{a^6}+\ldots\right)$$

hiedurch wird

$$h'=\frac{c^2}{90.2g\delta}\left(x-\frac{5\beta}{3\delta}\cdot\frac{x^3}{a^2}+\frac{3\beta^2}{\delta^2}\cdot\frac{x^5}{a^4}-\frac{5\beta^3}{\delta^3}\cdot\frac{x^7}{a^6}+\ldots\right)$$

Für $x=a$ erhält man

$$h'=\frac{c^2}{2g}\cdot\frac{a}{90\delta}\left(1-\frac{5\beta}{3\delta}+\frac{3\beta^2}{\delta^2}-\frac{5\beta^3}{\delta^3}+\frac{70\beta^4}{9\delta^4}-\ldots\right).$$

Es iſt aber $\frac{a}{\delta}=\frac{10}{9}R:0.787R=1.4118$, $\frac{\beta}{\delta}=\frac{0.213R}{0.787R}=0.2706$

$$\text{mithin } h'=\frac{c^2}{2g}\cdot\frac{1.4118}{90}(1-0.451+0.220-0.099+0.042$$
$$-0.017+0.006-\ldots)$$

$$\text{oder } h'=\frac{c^2}{2g}\cdot\frac{0.9897}{90}, \text{ alſo nahe}=\frac{1}{90}\cdot\frac{c^2}{2g}.$$

Sei nun v die Geſchwindigkeit im Gußrohre, d ihr Durchmeſſer, ſo hat man $v=4cd^2:d^2$, und die zur Bewirkung der Sprunghöhe $c^2:2g$ nöthige Druckhöhe

Digitized by Google

$$H' = \frac{c^2}{2g} + \frac{16 l \delta^4 c^2}{45 d^5 2g} + \frac{1}{90} \cdot \frac{c^2}{2g}.$$

Ist also $A = c^2 : 2g$ die gegebene Steighöhe, so folgt indem man diesen Faktor herausſetzt, die erforderliche Druckhöhe wie oben.

1128. Folgeſatz. Die Waſſermenge M des Gußrohres einer Feuerſpritze wird offenbar $M = \pi \delta^2 c = \pi \delta^2 \sqrt{2gA}$, und man kann, wenn unter den Größen M, δ, A zwei gegeben ſind, die dritte hiernach beſtimmen. Uebrigens erhellet wie in (603), daß die größte Wurfsweite des Waſſers unter einem Winkel von 45 Graden Statt habe: ſie iſt der doppelten Höhe des ſenkrecht ſteigenden Strahles gleich (1028).

V. Die Waſſerräder.

1. Stoß des Waſſers.

1129. Erklärung. Wird eine ebene Fläche der Wirkung eines fließenden Waſſers ausgeſetzt, ſo wird dieſelbe ihre Lage ſogleich ändern, wofern ſie nicht durch eine Kraft feſtgehalten wird, welche eben dieſe Wirkung aufhebt. Man nennt dieſelbe, oder die ihr gleichgeltende Kraft den Waſſerſtoß. Zur Meſſung des Waſſerſtoßes kann man ſich einer Vorrichtung bedienen, welche der, unter dem Namen des Tachometers auch der hydrauliſchen Schnellwage von Brünings bekannten, ähnlich iſt. Dieſe beſteht aus einer ebenen Tafel AB (Fig. 268) von einem Quadratfuß Fläche, welche mittelſt einer Stange AC mit dem Hebel DE in Verbindung ſteht, der ſelbſt um den fixen Punkt C ſich drehen läßt: ein längſt des Armes CE verſchiebbares Gewicht P gibt durch ſeine Entfernung von dem Drehpunkte C die jedesmalige Größe des Waſſerſtoßes. Zu dieſem Ende ſtellt man den Winkelhebel nahe einem Behälter EH, der bis an EF mit Waſſer gefüllt iſt, ſeinen Waſſerſtand unveränderlich behält, und der bei G eine mit einer Schütze zu verſchließende Oeffnung beſitzt. Sobald die Schütze aufgezogen wird, ſtößt das herausſtrömende Waſſer gegen die Tafel AB, und man kann jederzeit das Gewicht P ſo ſtellen, daß ſein Moment dem Momente des Waſſerſtoßes hinſichtlich der Drehare C gleich

Digitized by Google

wird, in diesem Falle bleibt aber die Tafel in ihrer vertikalen Lage.

1130. **Erklärung.** In Beziehung auf die ebene Fläche, welche vom Wasser den Stoß erleidet, unterscheidet man den geraden von dem schiefen Stoße, bei jenem steht die Ebene zur Richtung des abfließenden Wassers senkrecht, bei diesen ist sie aber unter einem Winkel gegen die Richtung desselben geneigt. Hat der gestoßene Körper eine krumme Oberfläche, so erleiden einige Theile einen geraden, alle anderen Theile der Oberfläche einen schiefen Stoß. Bewegt sich die ebene Fläche selbst mit einer Geschwindigkeit, die kleiner ist als die Geschwindigkeit des einstürzenden Wassers, so heißt der Stoß auf dieselbe ein relativer Stoß.

1131. **Erklärung.** In Beziehuug auf das anstoßende Wasser unterscheidet man den Stoß isolirter Strahlen, wenn der Wasserstrahl nach allen Seiten von freier Luft umgeben ist, indem er gegen die Fläche stößt; den Stoß im unbegrenzten Wasser, wobei zwar das Wasser in einem Bette fließt, aber die gestoßene Fläche gegen den Querschnitt des Wassers nur sehr klein ist, und den Stoß im begrenzten Wasser oder in Gerinnen, wenn die Querschnitte des Wassers und jener der gestoßenen Fläche nahe gleich sind.

1132. **Anmerkung.** So einfach die Lehre vom Stoße fester Körper ist, so vielen kaum übersteiglichen Hindernissen unterliegt die Lehre vom Stoße des Wassers, und wenn schon bei Bewegung des Wassers keine ganz genaue Ergebnisse erzielt wurden, so läßt sich dies um so weniger bei dem Stoße des Wassers erwarten. Was also darüber im Folgenden angeführt wird, ist fast durchgängig der Erfahrung entnommen, und nur als eine Annäherung zur Wahrheit zu betrachten.

Unter den neueren Schriften über diesen Gegenstand verdienen empfohlen zu werden: U. Fickler Theorie der Größe der Kraft sich bewegender flüssiger Massen. Jülich 1832. J. F. d'Aubisson de Voisins Handbuch der Hydraulik. Deutsch bearbeitet von G. Th. Fischer. Leipzig 1835. Adam Burg, k. k. Regierungsrath, Compen-

Digitized by Google

dium der Mechanik und Maschinenlehre. Wien 1845, nebst Eytelwein's, Kayser's u. a. Werken.

1133. Lehrsatz. Der Stoß des Wassers gegen eine ebene Fläche ist gleich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Grundfläche der Querschnitt des Strahles, und deren Höhe die doppelte Geschwindigkeitshöhe des Wassers ist.

Beweis. Man stelle sich vor, die an die Fläche CD (Fig. 269) anströmende Wassermenge in horizontale Schichten vom Querschnitte f getheilt, und $ABMN$ sei der Weg, welcher eine dieser Schichten gegen die ruhende Fläche CD verfolgt: die Geschwindigkeit eines Elements im Punkte A, wo der Stoß noch keine Rückwirkung auf die Geschwindigkeit des fließenden Wassers äußert, sei c, demnach der in der Zeit dt vom Elemente zurückgelegte Raum cdt; so wird der kubische Inhalt der in derselben Zeit zuströmenden Wassermenge in dieser Schichte $dM=fcdt$, und ihr Gewicht $\gamma fcdt=dQ$ sein. Ist nun das Element des Wassers aus A in M nahe vor die Fläche CD angelangt, so wird dasselbe in diesem Augenblicke nach der Richtung der Tangente MT sich gegen die Fläche bewegen: sei dann der veränderliche Winkel $CTM=\omega$, seine Geschwindigkeit w, also der in der Zeit dt beschriebene Raum $MN=ds=wdt$, sei ferner f' der Querschnitt dieser Wasserschichte im Punkte M mithin ihr Inhalt $f'\omega dt=fcdt$ und dQ wie vorhin. Zerlegt man die Bewegung $LM=wdt$ in die Seitenbewegungen senkrecht und parallel zur Fläche CD, so ist die erstere, welche allein den Stoß ausübt $wdt\sin\omega=MO$, letztere $wdt\cos\omega=MP$. Sei noch P die unbekannte Kraft des Stoßes, also dP derjenige Theil, welchen die anstürzende Wasserschichte vom Querschnitte f erzeugt, so ist die Größe dieser Kraft auf die Einheit der Masse, oder die Beschleunigung der Bewegung (577)

$$\frac{dP}{dQ}=-\frac{d(w\sin\omega)}{gdt},\text{ woraus }dP=-\frac{\gamma fc}{g}d(w\sin\omega)$$

folgt. Die Integration gibt, da P für $w\sin\omega=c$ verschwindet, und der Querschnitt f der Wasserschichte in den Querschnitt F des ganzen Wasserstrahles übergeht

$$P=\frac{\gamma Fc}{g}(c-w\sin\omega).$$

Ist nun die entgegenstehende Fläche CD so groß, daß alle Wasserschichten zum Stoße gelangen, so ist im Augenblicke des Stoßes ihre horizontale Geschwindigkeit $w\sin\omega=o$, entweder weil im Augenblicke des Stoßes die Wassertheile an der Fläche herabfließen, also $\omega=o$ wird, oder weil durch die festgehaltene Fläche CD die Geschwindigkeit vernichtet wird; man hat also für den Stoß

$$P=\frac{\gamma Fc^2}{g}=\frac{Mc\gamma}{g}=2\gamma Fh$$

wenn h die Geschwindigkeitshöhe $c^2:2g$ bedeutet.

1134. Folgesatz. Für eine andere Geschwindigkeit c' sei P' der Stoß, so folgt eben so $P'=\gamma Fc'^2:g$, mithin ist auch

$$P:P'=c^2:c'^2$$

oder der Wasserstoß ist dem Quadrate der Geschwindigkeit des anströmenden Wassers proportional.

1135. Anmerkung. Diese Theorie setzt voraus, daß sämmtliche Wassertheilchen des anströmenden Wassers zum Stoße gelangen, wozu erfordert wird, daß die angestossene Fläche wenigstens zehnmal größer ist, als der Querschnitt des Strahles, ferner daß der flüssige Körper seine Geschwindigkeit ganz verliere, welches aber selten vollständig geschieht; daher unterscheidet man die wirkliche Stoßkraft von der obigen, welche man die hypothetische nennt. Heißt also μ ein Erfahrungskoeffizient, so kann man setzen

$$P=\frac{\mu Fc^2\gamma}{2g}=\mu\gamma Fh.$$

Die in dieser Hinsicht vorgenommenen Versuche von Bossut, Dubuat, Langsdorf, Venturoli u. A. zeigen,

1. daß $\mu=2$, oder nahe daran ist, wenn die Fläche wenigstens zehnmal den Querschnitt des Wasserstrahles übertrifft, und nebstbei die Entfernung der Fläche von der Ausflußöffnung ungefähr dem dreifachen mittleren Durchmesser des Strahles gleich ist.

2. Daß $\mu=1$ ist, wenn die getroffene Fläche zwar hinreichend

Digitized by Google

groß, aber ihre Entfernung von der Oeffnung, aus welcher der Wasserstrahl fährt, sehr klein ist; oder aber wenn die Fläche in der vortheilhaftesten Entfernung gestellt nicht größer ist, als der Querschnitt des Strahles: dann hat man $P=\gamma Fh$.

3. Daß beim Stoße auf eine Ebene im unbegrenzten Wasser ebenfalls $P=\gamma Fh$ ist: weil nicht alle Wassertheile im Querschnitte des auf die Ebene strömenden Wasserprisma zum Stoße gelangen, indem schon in einiger Entfernung vor der Fläche die Wasserfäden von ihrer Richtung abgelenkt werden, und auch durch die Rückwirkung der gestoßenen Fläche die Geschwindigkeit der Wassertheilchen verzögert wird.

1136. Lehrsatz. Beim relativen Stoße ist der Wasserstoß dem Gewichte eines Prisma gleich, dessen Basis der Querschnitt des Wasserstrahles und dessen Höhe die zum Unterschiede der Geschwindigkeiten des Wassers und der ebenen Fläche zugehörige doppelte Geschwindigkeitshöhe ist.

Beweis. Bewegt sich nämlich die Fläche nach einerlei Richtung mit dem anstossenden Wasser mit einer Geschwindigkeit v, so kann nicht die gesammte Wassermenge $M=cF$ zum Stoße gelangen, wie bei ruhender Fläche, weil sie mit der Geschwindigkeit v ausweicht, wodurch nur eine Wassermenge $F(c-v)$ den Stoß ausübt, während die Wassermenge Fv ohne Wirkung abfließt; es ist daher beim relativen Stoße

$$P=\frac{(c-v)F\gamma(c-v)}{g}=\frac{(c-v)^2F\gamma}{g}.$$

1137. Folgesatz. Da bei eingeschaufelten unterschlächtigen Rädern die Fläche F jeden Augenblick durch eine andere ersetzt wird, so daß kein Wassertheilchen ohne zu stoßen abfließen kann, so ist hier $M=cF$, also

$$P=\frac{c-v}{g}\,.\,cF\gamma=\frac{c-v}{g}M\gamma.$$

1138. Erklärung. Sei AB (Fig. 270) eine ebene Fläche, welche dem Stoße eines einzelnen Wasserfadens CD, ausgesetzt

Digitized by Google

wird. Die Neigung seiner Richtung gegen die Ebene oder der Winkel DCA sei β: zerlegt man die Kraft des Stoßes $P=CD$ durch Verzeichnung des Rechtecks $CEDE'$ in die auf AB senkrechte CE und die der AB parallele DE, so heißt CE der Normalstoß. Verzeichnet man ferner das Rechteck $EFCG$, dessen Diagonale CE der Normalstoß ist; so zerfällt derselbe in CF, den Seitenstoß, und CG den Parallelstoß.

1139. Lehrsatz. Der Stoß gegen eine schiefe Ebene nach der Richtung des anstossenden Wassers ergibt sich, wenn man den auf ihre vertikale Projektion senkrechten Wasserstoß mit dem Quadrate vom Sinus des Einfallswinkels multiplizirt.

Beweis. Denn bezeichnet man den Wasserstoß mit P, den Normalstoß mit Q, und den Parallelstoß mit R, so ist in dem Dreiecke DCE, wo der Winkel $DCE=90^0-DCA=90^0-\beta$ ist, also CE oder $Q=P\sin\beta$, und im Dreiecke CGE ist $CG=CE\cos GCE$, oder $R=Q\sin\beta=P\sin^2\beta$.

1140. Anmerkung. Die Versuche, welche in dieser Beziehung angestellt wurden, stimmen jedoch durchaus nicht mit der eben vorangeschickten theoretischen Bestimmung des Parallelstoßes; vielmehr kann man für denselben folgenden Ausdruck annehmen

$$R=P[\sin^2\beta+(1-\sin\beta)0.4]$$

bis nicht genauere und zahlreiche Versuche bekannt geworden sind. Die folgende Aufgabe hat daher blos ein theoretisches Interesse.

1141. Aufgabe. Bei einer schwimmenden Kugel, die ganz im Wasser versenkt ist, den Parallelstoß zu bestimmen.

Auflösung. Ist r der Halbmesser der Kugel, und P der Wasserstoß auf die Fläche ihres größten Kreises; so hat man, wenn der Parallelstoß nach (1139) dem Quadrate des Sinus des Einfallswinkels, proportional ist, den Parallelstoß $Q=\frac{1}{2}P$, wenn er hingegen der ersten Potenz dieses Winkels proportional ist $Q=\frac{2}{3}P$.

Beweis. Sei Q der Parallelstoß auf die Halbkugel ABD (Fig. 271) P der senkrechte Stoß auf die Projektion ACB, fer-

Digitized by Google

ner sei q der Parallelstoß auf das zur Abszisse $DL=x$ zugehörige Stück MDN der Kugel, p der senkrechte Stoß auf dessen Projektion MLN; man setze ferner $AC=r, ML=y$, so ist

$$p : P = \text{Fläche } MN : \text{Fläche } AB$$

$$= \pi(2rx - x^2) : \pi r^2, \text{ also}$$

$$p = \frac{P(2rx-x^2)}{r^2}, \quad dp = \frac{2P(r-x)}{r^2}dx.$$

Hieraus folgt $dq = dp \sin^2 mME = dp \sin^2 CML$

oder $dq = \frac{(r-x)^2 dp}{r^2} = \frac{2P(r-x)^3 dx}{r^4}$, mithin

$$q = \frac{2P}{r^4}(r^3x - \tfrac{3}{2}r^2x^2 + rx^3 - \tfrac{1}{4}x^4) + C$$

wo C mit q und x verschwindet, für $x=r$ wird daher $Q = \frac{1}{2}P$.

Setzt man aber $dq = dp \sin mME$

so wird $dq = \frac{(r-x)}{r}dp = \frac{2P}{r^3}(r-x)^2 dx$, und

$$q = \frac{2P}{r^3}(r^2x - rx^2 + \tfrac{1}{3}x^3), \text{ für } x=r, \text{ wird } Q = \tfrac{2}{3}P.$$

Eytelwein's Versuche über den Stoß des Wassers in einem Fluße gegen eine Kugel, geben $Q = 0.7886P$.

2. Das oberschlächtige Wasserrad.

1142. Erklärung. Diejenigen Räder, welche dazu dienen, die bewegende Kraft des Wassers aufzunehmen und fortzupflanzen nennt man Wasserräder. Die Hauptheile eines Wasserrades sind: der Radkranz, auf welchen das Wasser unmittelbar wirkt, die Welle, welche mit dem Radkranze durch vier oder mehrere Arme fest verbunden ist und bei großen Rädern durch Viertelstücke oder durch Helfarme verstärkt wird, und vermittelst der daran befindlichen Zahnräder, Hebedaumen u. s. f. die Bewegung auf die übrigen Maschinentheile fortpflanzt: sie ruhet vermittelst vorragenden eiser-

Digitized by Google

nen Zapfen in den festen Lagern eines Gestelles, welches das Rad trägt und welches sammt dem Rade, um es vor dem Einfluße der Witterung zu schützen, in einem bedeckten Raume, der Radstube untergebracht ist.

1143. Erklärung. Hinsichtlich der Lage der Axe unterscheidet man die Wasserräder, in Vertikalräder mit horizontaler Axe, und in Horizontalräder auch Kreiselräder, Turbinen genannt, deren Axe vertikal steht. Die Vertikalräder unterscheidet man ferner nach der Wirkungsart des Wassers durch Druck oder Stoß in oberschlächtige, unterschlächtige und Kropfräder. Bei oberschlächtigen Rädern wirkt das Wasser durch sein Gewicht, bei unterschlächtigen durch seinen Stoß, bei Kropfrädern theils durch Gewicht, theils durch Stoß.

1144. Anmerkung. Die Theile eines Rades werden entweder alle, mit Ausnahme der Zapfen und Lager aus Holz verfertiget, oder sie werden aus Gußeisen und Stabeisen zusammengesetzt. Ein hölzernes Rad, selbst wenn es überbaut ist, dauert nur etwa 15 Jahre: während eiserne Räder die längste Zeit Dienste leisten, und selbst wenn schon wegen Alter unbrauchbar, als Material noch immer einen Werth haben, daher die beträchtlicheren Kosten ihrer Beischaffung sich zweifelsohne verzinsen.

1145. Erklärung. Wenn bei einem Gefälle von mindestens 7 Fuß das Wasser am Scheitel eines Rades einstürzt, und von den am Umfange desselben befindlichen Zellen aufgefangen, die Umdrehung des Rades bewirkt, so heißt die Vorrichtung ein oberschlächtiges Wasserrad. Zu diesem Ende besteht der Radkranz eines hölzernen Wasserrades, aus zwei, und bei größeren Rädern, aus drei oder vier parallelen Felgen, welche durch eingelassene Stützen in gleichen Abständen mit einander befestiget sind: die Felgen aber haben die Gestalt eines großen zwischen zwei konzentrischen Kreisen enthaltenen Ringes, und das ganze Rad erhält das Ansehen eines Cylinders mit ringförmigen Grundflächen. Die Zellen des Rades, welche zur Aufnahme des Wassers bestimmt sind, wer-

Digitized by Google

den dadurch gebildet, daß man zwischen die Felgen in gleichen Abständen von einander dünne Bretter oder Schaufeln in die Nuthen der Felgen einschiebt, und den inneren Umfang beider Kränze mit Bretern verschallt: man nennt dies den Boden des Rades.

1146. Erklärung. Soll das Rad das einfallende Wasser leicht aufnehmen, und es nicht zu bald verschütten, so wird jede Schaufel gebrochen, d. h. aus zwei Theilen zusammengesetzt, und man nennt den Theil zunächst dem äußeren Radumfange die Stoß- oder Setzschaufel und den anderen Theil die Boden- oder Riegelschaufel. Die Schaufelung wird aber auf folgende Art vorgenommen. Wenn AB (Fig 272) der Durchmesser des Wasserrades ist, so nimmt man gewöhnlich die Breite der Kränze zwölf Zoll groß an, theilt AD in drei gleiche Theile, nimmt von D bis E ein Drittel der Breite, und schlägt aus dem Mittelpunkte C durch E einen Kreis, den sogenannten Theilriß, den man in so viele gleiche Theile theilt, als das Rad Schaufeln erhalten soll, gewöhnlich in dreimal so viel Theile, als der Durchmesser Fuße enthält, bei wenig Aufschlagwasser einige mehr, bei viel Wasser einige weniger. Die Lage der Stoßschaufel wird gefunden, indem man die Dicke des einfallenden Wasserstrahles zum Halbmesser nimmt, und damit aus einem Punkte G des Theilrisses den Bogen mn beschreibt, an den man aus dem nächsten Punkte H des Theilrisses die Tangente IH zieht. Die Lage der Bodenschaufel läßt sich auf zweierlei Weise bestimmen: entweder zieht man von dem Ende H der Stoßschaufel eine gerade Linie HF nach dem Mittelpunkte des Rades, so wird HF die Bodenschaufel, welche mit der nächsten Stoßschaufel HI wasserdicht verbunden wird, und mit dem Theile FF' des Radbodens die Zelle $F'FHI$ bildet: oder man errichtet am Ende einer Stoßschaufel, wie KL in L eine Senkrechte LN, dadurch ergibt sich die Zelle $KLNN'$.

1147. Erklärung. Oberhalb des Wasserrades befindet sich das Gerinne AB (Fig. 273), welches das Wasser aus einem Behälter oder Fluße dem Rade zuführt, und in dessen Boden bei C eine Oeffnung, das Schlundloch, angebracht ist, welches mit einem kleinen

Digitized by Google

Schutzbrete verschlossen werden kann. So wie das Wasser in der Nähe des Scheitels in die Zellen fällt, nimmt es unmittelbar die Geschwindigkeit des Rades an, mit der es sich herabbewegt, bis seine Oberfläche den oberen Rand der Schaufel erreicht, worauf es nach und nach ausfließt, bis die Zellen geleert sind. Damit aber das Wasser ehe die Zellen ihren tiefsten Stand erreicht haben, nicht abfließe, so wird der Untertheil des Rades mit einem befestigten Mantel umgeben, welcher kreisförmig gebogen ist, und dadurch noch vortheilhafter wird, daß man ihn etwas weiter vom Rade absetzt, und mit kleinen Schaufeln versieht, welche gegen die Zellen so gekehrt sind, daß das auf sie spritzende Wasser gleich wieder gegen das Rad in die Zellen fließt. Den Theil des Theilrisses, dessen Zellen gleichzeitig mit Wasser sich füllen, nennt man den wasserhaltenden Bogen. Wasserräder ohne Mäntel müssen 8 bis 12 Zolle vom Wasserspiegel des Unterwassers abstehen, damit das abfließende Wasser der Umdrehung des Rades nicht hemmend entgegen trete, dies nennt man das Freihängen des Rades. Die Figur (274) stellt eine Radstube mit einem oberschlächtigen Wasserrade vor, *AB* ist der Radkranz mit 48 Zellen, welcher durch 4 Arme mit der Welle *C* verbunden ist. *DEFGH* ist der Mantel des Wasserrades, *FI* ist das Gerinne für den Abfluß, *KL* das Gerinne für den Zufluß, unterhalb *M* ist das Schlundloch, welches durch eine Schütze *N* geöffnet oder geschlossen werden kann: das Bret *no* dient dazu, um das einstürzende Wasser zu hindern nicht über die zweite Zelle zu fließen.

1148. Anmerkung. Die Kraft des oberschlächtigen Rades hängt von dem Gewichte des Wassers ab, welches am Umfange desselben vertheilt ist, und von dem Stoße, mit welchem das einstürzende Wasser die Schaufeln trift. Bei Rädern die keine Mäntel haben, geht von dem Wasser, welches als Gewicht wirkt, um so mehr verloren, je kleiner diese Räder sind. Im Durchschnitte rechnet man, daß die Höhe des wasserhaltenden Bogens $^5/_6$ bei eisernen Wasserrädern $^7/_8$ von dem Durchmesser des Theilrisses betrage. Bei Rädern mit Mänteln kann man den ganzen Durchmesser des Theilrisses als Höhe des wasserhaltenden Bogens

Digitized by Google

annehmen. Das Gerinne wird gewöhnlich so vorgerichtet, daß das Wasser in die zweite Zelle von oben fällt, und man rechnet die Geschwindigkeitshöhe des einfallenden Wassers bis in die zweite Zelle des Theilrisses. Nach Gerstner erhält das Wasserrad 21mal so viele Zellen, als der Durchmesser des Theilrisses Fuße enthält.

1149. Lehrsatz. Das statische Moment des wasserhaltenden Bogens zur Umdrehung des Rades ist gleich dem statischen Momente einer am Theilrisse aufgerichteten Wassersäule, deren Grundfläche der Querschnitt, und deren Höhe die Höhe des wasserhaltenden Bogens ist.

Beweis. Das Wasser ist zwar nicht gleichförmig über den Umfang des wasserhaltenden Bogens vertheilt, weil die höheren Zellen mehr Wasser als die tieferen Zellen, wo schon das Wasser sich zu entleeren anfängt, enthalten: indessen kann man immer einen Bogen MP (Fig. 272) in der centrischen Linie als von derjenigen Länge betrachten, auf welcher das Wasser gleichförmig verbreitet ist: man fälle von M auf eine durch den Endpunkt P dieses Bogens gezogene horizontale PQ das Perpendikel MQ, so ist $MQ=h$ die Höhe des wasserhaltenden Bogens, und wenn man den Winkel MCP durch die Gerade CR halbirt, so liegt der Schwerpunkt dieses Bogens in einem Punkte S, dessen Abstand CS nach (87) bestimmt wird. Sei nun für den Halbmesser $=1$, der Winkel $MCO=\alpha$, $OCP=\beta$, so ist wenn man den Halbmesser des Theilrisses $CO=r$ setzt, $MC=r\sin\alpha$, $QU=r\sin\beta$, also, $h=r(\sin\alpha+\sin\beta)$, ferner ist die Sehne $MP=2r\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)$. und die Bogenlänge $MP=r(\alpha+\beta)$; man hat also nach (87)

$$r(\alpha+\beta):2r\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)=r:CS,\text{ dies gibt}$$

$$CS=\frac{2r\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}$$

aber $RCO=MCO-MCR=\alpha-{}^1/_2(\alpha+\beta)={}^1/_2(\alpha-\beta)$

und $CT=CS\cos RCO=CS\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)$, hiermit wird

$$CF=\frac{2r\sin{}^1/_2(\alpha+\beta)\cos{}^1/_2(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}=\frac{r(\sin\alpha+\sin\beta)}{\alpha+\beta}=\frac{h}{\alpha+\beta}.$$

Digitized by Google

Der Querschnitt des wasserhaltenden Bogens sei k, so ist sein Gewicht $kr(\alpha+\beta)\gamma$, also sein statisches Moment $kr(\alpha+\beta)\gamma \times CT = krh\gamma$, und dieser Ausdruck gibt auch das statische Moment einer am Punkte O des Theilrisses aufgestellten Wassersäule von der Höhe h und dem Querschnitte k.

1150. Folgesatz. Heißt M die während einer Sekunde in die Zellen des Rades einstürzende Wassermenge, und v die Geschwindigkeit des Theilrisses, so ist $M=kv$, mithin $k=M:v$. Hiedurch wird die Kraft P am Umfange des Theilrisses, welche zur Umdrehung des Rades gerade so beiträgt, als das Gewicht des wasserhaltenden Bogens, $P=Mh\gamma:v$, wo bei Wasserrädern mit Mänteln $h=2v$ zu setzen ist.

1151. Aufgabe. Die bewegende Kraft eines oberschlächtigen Wasserrades zu berechnen.

Auflösung. Wenn c die Geschwindigkeit des in die Zellen einstürzenden Wassers, v die Geschwindigkeit des Theilrisses, M die Waßermenge in einer Sekunde, h die Höhe des wasserhaltenden Bogens und α den Winkel des einfallenden Strahles mit dem Horizonte bedeutet, so hat man die bewegende Kraft P des Wasserrades

$$P=\left(\frac{h}{v}+\frac{c\cos\alpha-v}{g}\right)M\gamma.$$

Beweis. Die Geschwindigkeit c des anstossenden Wassers zerlege man in zwei Seitengeschwindigkeiten, wovon eine $c\sin\alpha$ senkrecht auf dem Radumfange ist, und durch die Festigkeit der gestützten Radwelle aufgehoben wird, die andere $c\cos\alpha$ nach der Tangente im obersten Punkte des Rades wirkt: der Wasserstoß ist daher, nach (1137) $(c\cos\alpha-v)M\gamma:g$ folglich die ganze nach der Tangente des Theilrisses wirkende Kraft

$$P=Mh\gamma:v+M\gamma(c\cos\alpha-v):g \text{ wie oben.}$$

1152. Folgesatz. Hieraus ergibt sich das statische Moment dieser Kraft

$$Pr=r\left(\frac{h}{v}+\frac{c\cos\alpha-v}{g}\right)M\gamma, \text{ und}$$

Digitized by Google

das mechanische Moment oder der nutzbare Effekt der Maschine

$$Pv=[h+(c\cos\alpha-v)v:g]M\gamma$$

und dieses Moment wird am größten, sobald

$$d(c\cos\alpha-v)v=(c\cos\alpha-2v)dv=o$$ gesetzt wird, woraus

$$v=\tfrac{1}{2}c\cos\alpha$$ folgt

d. h. die Geschwindigkeit des Theilrißes muß der halben tangentialen Seitengeschwindigkeit des einfallenden Aufschlagwassers gleich sein.

1153. Folgesatz 2. Ist der Winkel α nur so klein, daß man $c\cos\alpha=c$ setzen kann, dann erhält man für den nutzbaren Effekt, $v=\tfrac{1}{2}c$ setzend,

$$Pc=[2h+c^2:2g]M\gamma.$$

Ist aber $v=c$, so wird der mechanische Effekt $Pc=hM\gamma$ und wenn es ein Wasserrad mit einem Mantel, wo $h=2r$ ist, so wird $Pc=2Mr\gamma$. Sei nun für ein anderes Rad vom Halbmesser r', die Wassermenge M', Geschwindigkeit c', so wird eben so $P'c'=2r'M'\gamma$, und daher $Pc:P'c'=rM:r'M'$ d. h. die Effekte zweier oberschlächtigen Wasserräder verhalten sich wie die Produkte aus den Wassermengen, welche in gleichen Zeiten auf dieselben stürzen, in die Halbmesser der Räder.

1154. Anmerkung. Nach dieser Regel halten sich wirklich die praktischen Mühlenbauer um oberschlächtige Wasserräder zu konstruiren, bei denen die Kraft P, Geschwindigkeit c, Halbmesser r und Wassermenge M gegeben sind. Da nämlich ein Rad, um alles Wasser aufzunehmen, desto breiter sein muß, je langsamer es umlauft, und hiedurch ein stärkerer Bau desselben auch eine größere Reibung an den Zapfen erzeugt, weil ferner der Stoß durch das einstürzende Wasser selten sehr beträchtlich ist, und keinen Ersatz für den Abgang am Durchmesser des Randes liefert: so pflegt man in der Ausübung den oberschlächtigen Rädern jene Geschwindigkeit zu geben, welche das einstürzende Wasser selbst hat, d. h. man macht $v=c$, wodurch eben der Satz (1153) seine Richtigkeit erhält.

Eine umständlichere Betrachtung der oberschlächtigen Räder

Digitized by Google

findet man in M. Gerzabek Anweisung zur Bauart der oberschlächtigen Wasserräder. Gratz, 1840, ferner in Gerstner's Mechanik. Band II. Kap. VII. und in Kayser's Mechanik S. 609 u. d. f.

3. Das unterschlächtige Wasserrad.

1155. Erklärung. Wird ein vertikal hängendes Wasserrad an seinem Umfange mit Schaufeln versehen, damit solche den Stoß eines dagegen strömenden Wassers auffangen, und dieses Wasser fließt unterhalb des Rades gegen die Schaufeln, so heißt die Vorrichtung ein **unterschlächtiges Wasserrad**. Sind die Schaufeln auf den beiden vertikalen Seiten des Rades in die Felgen eingefaßt, wie (Fig. 275) so heißt es ein **Staberrad**: wenn aber die Schaufeln nur in der Stirne eines Kranzes befestiget sind und keine Einfassung von beiden Seiten haben ein **Strauberrad** (Fig. 276), sind endlich die Schaufeln lang und werden an zwei oder drei mit einander verbundenen Radfelgen befestiget, so erhält man ein **Schiffmühlenrad** (Fig. 277).

1156. Erklärung. Man unterscheidet **freihängende Wasserräder**, bei welchen das Wasser von allen Seiten abfließen kann, wie bei Schiffmühlen, von den **eingeschlossenen Wasserrädern**, welche von den Wänden eines Gerinnes umgeben sind. Geht der Abschußboden eines Gerinnes in einer geraden Linie unter dem Rade fort wie (Fig. 275); so heißt das Gerinne ein **gerades** auch **Schußgerinne**, wenn aber der Abschußboden unter dem Rade gekrümmt ist (Fig. 278) ein **Kropfgerinne**. Ist der Kropf so groß, daß er beinahe die Höhe vom Halbmesser des Wasserrades hat, so heißt das Wasserrad ein **Kropfrad**, oder ein **halboberschlächtiges Rad** (Fig. 279).

1157. Erklärung. Ein **Panstерzeug** heißt eine Vorrichtung, welche dazu dient die Radeswelle nach Umständen höher oder tiefer zu stellen; das so eingerichtete Rad aber heißt ein **Panstерrad**. Wird nun das Zapfenlager mittelst eines Hebebaumes erhöht, und an beiden Enden desselben durch Bolzen, die man in höhere Löcher der ausgepfalzten Panstersäulen steckt, gehalten, so heißt die Vorrichtung ein **Stockpanster**: wenn hingegen das Zapfenlager mit-

Digitized by Google

telst einer Kette, welche über eine Welle geht, aufgezogen wird, ein Ziehpanster. Bei Pansterrädern bringt man noch ein bewegliches Gerinne, Schwimmgerinne unter dem Rade an, welches so viel in die Höhe gebracht wird, als das Rad aufgezogen wurde: wodurch verhindert wird, daß beim aufgezogenen Rade kein Wasser ungenutzt unten wegfließe. Zur Vermeidung des Zwischenraumes an beiden Seiten des Rades bringt man Wasserbänke an, d. i. zwei Seitenbreter, die von der Schutzöffnung bis an die Kränze des Rades und bogenförmig unter diese Kränze gehen, damit das Wasser zwischen denselben in einer solchen Breite gegen das Rad fließe, welche der Länge der Schaufeln im Lichten gleich ist.

1158. Erklärung. Die Regulirung des im Gerinne zufließenden Wassers wird durch das Schutzbret bewirkt, welches so nahe als möglich an das Rad kommen muß. In der Figur 275 bewegt sich das Schutzbret vertikal in den Nuthen der Griesfäulen. Um aber die Schutzöffnung noch näher an die Stelle des Rades zu bringen, an welcher der Stoß des Wassers vor sich geht, kann man dem Schutzbrete eine Neigung gegen den Horizont geben, und dasselbe zwischen zwei Wangenbreter, die auf beiden Seiten des Gerinnes nach der Richtung des Schutzbretes befestiget sind, sich bewegen lassen (Fig. 279).

1159. Anmerkung. Die vertikale Höhe der Schutzöffnung muß jedesmal kleiner sein als die Höhe der Schaufeln, weil sonst das Wasser über die Schaufeln schlagen würde, so wie auch die horizontale Breite der Schutzöffnung nur der Länge der Schaufeln zwischen den Kränzen des Rades gleich sein darf.

Bei einem geraden Gerinne stellt man die ebenen Schaufeln nach der Richtung des Halbmessers, indem man ihre gegen das Unterwasser gekehrten Ecken etwas abflacht, weil hiedurch der Austritt der Schaufeln aus dem Wasser erleichtert wird. Man nimmt gewöhnlich an, daß bei einem 8 bis 12 Fuß hohen Wasserrade sich 3, bei einem größeren Wasserrade sich 4 bis 5 zugleich eintauchen, und bestimmt darnach ihre Anzahl. Die Tiefe des Einsinkens einer Schaufel wird zu $\frac{2}{3}$ ihrer Höhe bestimmt.

Digitized by Google

1160. **Erklärung.** Bei einem Kropfgerinne sind aber die Schaufeln nicht eben, sondern wie bei einem oberschlächtigen Wasserrade gebrochen, und bestehen aus einer nach dem äußeren Radkranze gerichteten Stoßschaufel, und einer Kropfschaufel, welche wasserdicht mit einander verbunden mit dem Boden des Rades Zellen bilden, die sich zum Theil mit Wasser füllen, so daß die Umdrehung des Wasserrades nicht nur durch den Stoß, sondern auch durch das Gewicht des wasserhaltenden Bogens bewirkt wird. Dergleichen Räder heißen **Sackräder**.

1161. **Anmerkung.** Die Schaufelung eines Sackrades geschieht so: Sobald man die Anzahl der Zellen wie bei einem oberschlächtigen Rade bestimmt hat, zieht man aus dem Mittelpunkte *C* (Fig. 278) mit einem Halbmesser *CD*, der an die Mitte des Radkranzes, dessen Breite *AB* ist, reicht, den Theilriß, und theilt dessen Halbmesser *CD* in so viele gleiche Theile, als Zellen im Quadranten *DF* sich befinden, in der benannten Figur in 8 gleiche Theile, und bezeichnet die Theilungspunkte von *C* ab mit den Ziffern 1, 2, 3 ... 8 und eben so die Punkte am Umfange des Theilrisses von *D* gegen *F*; so gibt die Linie 44, welche von *E* nach dem gleichnamigen Punkte des Halbmessers gezogen ist, die Lage der Stoßschaufel *GE*, und wenn man aus dem Punkte *E* mit dem Halbmesser *GE* in den inneren Umfang des Rades bei *H* einschneidet, so erhält man sofort die Lage der Kropfschaufel *EH*. Wollte man der leichteren Bearbeitung wegen die Kropfschaufel senkrecht auf der Stoßschaufel anbringen, dann theile man die Breite *AB* des Radkranzes in drei gleiche Theile, und ziehe den Theilriß, wie bei den oberschlächtigen Rädern, durch den dem inneren Umfange näheren Theilungspunkt. **Wasserräder mit cylindrischen Schaufeln**, deren vertikale Querschnitt eine krumme Linie ist, hat *Poncelet* zuerst unternommen, und ausgeführt. Aus vielen Versuchen hat er gefunden, daß das unterste Schaufelelement die Richtung des aufschlagenden Wassers, mithin die der Tangente des Radumfanges an der betreffenden Stelle besitzen müsse. Ein solches Rad stellt (Fig. 281) vor.

1162. **Aufgabe.** Die bewegende Kraft eines unterschlächtigen Wasserrades zu bestimmen.

Digitized by Google

Auflösung. Sei die in einer Sekunde zufließende Wassermenge M, die mittlere Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers c, die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der eingetauchten Schaufel v, der Inhalt von dem senkrecht auf die Richtung des Wassers eingetauchten Theile der Schaufel F; so ist die gesuchte Kraft

$$P=\frac{(c-v)M\gamma}{g}=\frac{(c-v)cF\gamma}{g}.$$

Beweis. Da bei denjenigen unterschlächtigen Wasserrädern im geschlossenen Gerinne, wo die ebenen Schaufeln hinreichend hoch sind, und nicht zu weit von einander abstehen, sämmtliches Wasser zum Stoße gelangt; so kann die Wassermenge $M=cF$ so angesehen werden, als wenn sie mit der Geschwindigkeit $c-v$ gegen die Schaufeln anschlägt, weßhalb der relative Stoß nach (1137) hier seine Anwendung findet; man erhält daher P wie oben.

1163. Folgesatz. Heißen h und h' die den Geschwindigkeiten c, v zugehörigen Höhen, so ist

$$c=\sqrt{2gh},\ v=\sqrt{2gh'},\ \text{somit auch}$$

$$P=2[h-\sqrt{hh'}]F\gamma$$

für Schiffmühlenräder im offenen Strome ist (1135)

$$P=\frac{(c-v)}{2g}M\gamma=\frac{(c-v)c}{2g}F\gamma=[h-\sqrt{hh'}]F\gamma.$$

1164. Folgesatz. 2. Hat das Gerinne einen Kropf, und es ist d die vertikale Höhe des wasserhaltenden Bogens, so ist (1151)

$$P=\left(\frac{d}{v}+\frac{c-v}{g}\right)M\gamma=2\left[h-\sqrt{hh'}+{}^1/_2 d\sqrt{\frac{h}{h'}}\right]F\gamma.$$

1165. Folgesatz. 3. Für Räder im geraden Gerinne erhält man das mechanische Moment

$$Pv=\frac{cv-v^2}{g}M\gamma,$$

Digitized by Google

welches ein Maximum wird, wenn $v=\frac{1}{2}c$ ist, d. h. die Geschwindigkeit der Schaufeln muß halb so groß sein, als die Geschwindigkeit des Wassers, wenn das mechanische Moment am größten werden soll.

1166. Folgesatz 4. Mit diesem Werthe von $v=\frac{1}{2}c$, ergibt sich der größte Effekt im geraden Gerinne

$$Pv=\tfrac{1}{2}hM\gamma, \text{ und } Pv=(\tfrac{1}{2}h+d)M\gamma$$

im Kropfgerinne, sofern die Höhe des wasserhaltenden Bogens im Kropfe unveränderlich ist.

Um diese Effekte mit einander zu vergleichen, sei für beiderlei Räder H das ganze Gefälle, M die Wassermenge, so ist wegen $H=h+d$, $\frac{1}{2}h+d=\frac{1}{2}(H+d)$, daher im geraden Gerinne $Pv=\frac{1}{2}HM\gamma$ und beim Rade im Kropfgerinne $Pv=\frac{1}{2}(H+d)M\gamma$: es sind also unter übrigens gleichen Umständen die Räder im Kropfgerinne vortheilhafter, als die in geraden Gerinnen.

1167. Aufgabe. An einem horizontalen Gerinne sollen zwei unterschlächtige Wasserräder hintereinander angebracht werden, man sucht ihre Geschwindigkeiten für den Fall wenn ihre mechanischen Momente einander gleich sind.

Auflösung. Sollen beide Wasserräder gleiche Nutzeffekte besitzen, so muß die Geschwindigkeit des ersten Wasserrades $\frac{4}{5}$ der Geschwindigkeit des zuströmenden Wassers, und die Geschwindigkeit des zweiten Wasserrades halb so groß sein als die des ersten.

Beweis. Sei c die Geschwindigkeit des zuströmenden Wassers, v die Geschwindigkeit des ersten Rades, und v' die des zweiten, Rades, so ist nach (1165) das mechanische Moment des ersten Rades

$$\frac{v(c-v)M\gamma}{g}, \text{ und jenes des zweiten } \frac{v'(v-v')M\gamma}{g}.$$

Zur Erzielung des größten Effekts bei dem zweiten Rade wird erfordert, daß $v'=\frac{1}{2}v$ sei, womit das mechanische Moment des zweiten Rades in $v^2M\gamma:4g$ übergeht: man hat also

$$\frac{v(c-v)M\gamma}{g} = \frac{v^2M\gamma}{4g}, \text{ oder}$$

$$v(c-v) = {}^1/_4v^2, \text{ und } v = {}^4/_5c.$$

Es ist aber, $^4/_5c$ statt v gesetzt, das mechanische Moment des ersten Rades $4c^2M\gamma : 25g$ und das mechanische Moment des zweiten Rades $v^2M\gamma : 4g = 4c^2M\gamma : 25g$.

1168. *Folgesatz.* Hätte man anstatt beide Räder hintereinander zu legen, solche nebeneinander in abgesonderten Gerinnen gestellt; so wäre bei einerlei Gefälle und unveränderter Wassermenge das mechanische Moment derselben (1165) $c^2M\gamma : 4g$. Zieht man diesen größtmöglichen Effekt von dem bei zwei hintereinander liegenden Rädern ab, so ergibt sich

$$\frac{8c^2M\gamma}{25g} - \frac{c^2M\gamma}{4g} = \frac{7c^2M\gamma}{100g}$$

als der Ueberschuß des Effektes beider Räder hintereinander.

1169. *Aufgabe.* In einem geneigten geraden Gerinne oder aber in einem Kropfgerinne sollen zwei unterschlächtigen Wasserräder hintereinander angebracht werden, man sucht die Geschwindigkeit eines jeden derselben, wenn die Summe der Nutzeffekte den größten Werth erhält.

Auflösung. Die Summe ihrer Nutzeffekte wird am größten, wenn die Geschwindigkeit des ersten Rades zwei Drittel der Geschwindigkeit des zufließenden Wassers, und dabei das Quadrat der Geschwindigkeit des zweiten Rades den vierten Theil aus der Summe der Quadrate der Geschwindigkeit des ersten Rades und der Geschwindigkeit, welche ein schwerer Körper im freien Falle durch das Gefälle des Gerinnes erhalten haben würde, beträgt.

Beweis. Sei a das Gefälle zwischen den beiden Wasserrädern, so daß das zweite derselben um diese Größe tiefer liegt als das erste, sei ferner x die unbekannte Geschwindigkeit des ersten und y, die des zweiten Wasserrades, beide Geschwindigkeiten auf die Mitte des eingetauchten Theiles der Schaufeln bezogen; so ist die Geschwindigkeit des vom ersten Rade abfließenden Wassers nach der Richtung der

Digitized by Google

Tangente dieses Rades, welche horizontal ist, gleich x, dies ist die eine Seitengeschwindigkeit, die andere Seitengeschwindigkeit entsteht wegen dem Gefälle a nach einer vertikalen Richtung und wird $\sqrt{2ag}$: da beide unter einem rechten Winkel wirken; so wird ihre Resultirende $\sqrt{(x^2+2ag)}$ die Geschwindigkeit vorstellen, mit welcher das zweite Rad getroffen wird. Aus diesen Größen, ergibt sich nach (1165) das mechanische Moment des oberen Wasserrades $x(c-x)M\gamma : g$, und da bei dem unteren Wasserrade die Größen c und v beziehungsweise in $\sqrt{(x^2+2ag)}$ und y übergehen; so ist dessen mechanisches Moment

$$y[\sqrt{(x^2+2ag)}-y]M\gamma : g$$

man hat also für die Summe der Nutzeffekte den Ausdruck

$$\frac{M\gamma}{g}[cx-x^2+y\sqrt{(x^2+2ag)}-y^2]=T$$

und es sind die Werthe von x und y der Bedingung gemäß zu bestimmen, daß T ein Größtes wird. Zu diesem Ende hat man nach (A. 806.)

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)=c-2x+\frac{xy}{\sqrt{(x^2+2ag)}},\quad \left(\frac{dT}{dy}\right)=-2y+\sqrt{(x^2+2ag)},$$

setzt man diese Werthe gleich Null, und multiplizirt die erste Gleichung mit 2, die andere mit $x:\sqrt{(x^2+2ag)}$, so gibt die Summe beider Produkte $2c-3x=0$, also $x=\frac{2}{3}c$, und hieraus folgt

$$y=\tfrac{1}{2}\sqrt{(x^2+2ag)},\text{ oder }y^2=\tfrac{1}{4}(x^2+2ag)=\tfrac{1}{9}c^2+\tfrac{1}{3}ag.$$

Man erhält ferner

$$\left(\frac{d^2T}{dx^2}\right)=-2+\frac{2agy}{\sqrt{(x^2+2ag)^3}},\quad \left(\frac{d^2T}{dy^2}\right)=-2,$$

$$\text{und}\left(\frac{d^2T}{dx\,dy}\right)=\frac{x}{\sqrt{(x^2+2ag)}},$$

welche Ausdrücke für die obigen Werthe von x und y der in (A. 806) eingeführten Bezeichnung gemäß

$$P=-\frac{8c^2+27ag}{2(2c^2+9ag)},\quad Q=+3,\quad R=-2\text{ geben;}$$

es ist also sowohl P und R negativ, als auch

$$PR = \frac{8c^2 + 27ag}{2c^2 + 9ag} \text{ größer als } Q^2;$$

daher die Werthe $x = {}^2/_3 c$, und $y = {}^1/_3 \sqrt{(c^2 + {}^9/_2 ag)}$ die größtmögliche Summe der Nutzeffekte beider Wasserräder liefern.

4. Das horizontale Wasserrad.

1170. Erklärung. Das horizontale Wasserrad oder wie man es noch zu nennen pflegt, das Kreiselrad, die Fourneyron'sche Turbine hat folgende drei Haupttheile: 1. eine vertikale Welle AB (Fig. 282), die sich auf einem feststehenden Dorn C dreht, und durch mehrere Arme 2. mit dem horizontalen von außen und innen bekleideten Radkranze FD, EG verbunden ist: dieser ist (Fig. 282) im Aufrisse und (Fig. 283) im Grundrisse abgebildet, und besteht aus zwei ringförmigen Platten, zwischen denen sich cylindrisch gekrümmte Schaufeln von Eisenblech befinden, deren Erzeugungskurven in einer auf der Axe der Welle senkrecht geführten Ebene gelegen ist, und die sich von dem inneren Radumfange bis gegen den äußeren erstrecken; 3. ein dritter Haupttheil ist der Radboden sammt dem darauf feststitzenden Leitkurvenapparate DE (Fig. 283): dieser letztere ist ein Cylinder von beinahe gleichem Durchmesser mit dem inneren Radkranze und von gleicher Höhe mit demselben, enthält mehrere cylindrisch gekrümmte Metallplatten, die gleichsam Kanäle bilden, durch welche das Wasser in die Zellen des Rades eintritt, und kommunizirt mit einer metallenen Hülse HI (Fig. 282), welche die Welle umgibt, und sich in aufgemauerten Lagern KL stützt, auf welchen, falls die Maschine nicht in einem Flusse verwendet wird, sich der Behälter des Aufschlagwassers befindet. Das Wasser fließt in diesem Falle zwischen der Hülse und der Welle hindurch in den Leitkurvenapparat, und ergießt sich von da in den Radkranz, aus dessen Umfange es durch eben so viele Ausflußöffnungen, die sich an der äußeren Bekleidung des Radkranzes befinden, ausströmt, als Schaufeln in demselben vorhanden sind. Bei der Umdrehung des Radkranzes dreht sich auch die damit verbundene Welle, hingegen bleibt der Radboden

Digitized by Google

sammt dem Leitkurvenapparate und der cylindrischen Hülse unbeweglich.

1171. Anmerkung. Eine Seitenröhre MN (Fig. 282), welche vom Lager C des Dornes bis zu einem Orte M fortlauft, wo man ihn beikommen kann, hat die Bestimmung, durch einen Oelaufguß den Zapfen auf dem die Radwelle sitzt, gut in der Schmiere zu erhalten, damit sich der Zapfen und das Lager nicht gar zu schnell excentrisch abreiben, und die Welle, welche oben durch ein Gerüste in einer senkrechten Stellung erhalten wird, nicht in eine schiefe Richtung komme. Um nach Belieben mehr oder weniger Wasser in den Radkranz treten zu lassen, oder es auch ganz davon abzuhalten, dient eine kreisrunde Schütze, welche in die Hülse paßt, und vermittelst einer Hebelvorrichtung aufgezogen oder herabgelassen werden kann. Uebrigens erhellet von selbst, daß die Welle wasserdicht durch den Radboden hindurchgeht.

1172. Aufgabe. Die Geschwindigkeit des aus den Leitkurven in die Schaufeln eintretenden Wassers zu bestimmen.

Auflösung. Sei c die Geschwindigkeit des zufließenden Wassers, α der Winkel, welchen die Tangente im Anfange der Schaufel mit der Richtung des einfallenden Wasserstrahles einschließt, ω die Winkelgeschwindigkeit des bewegten Wasserrades, und r der innere Halbmesser des Radkranzes; so hat man die gesuchte Geschwindigkeit $v=\sqrt{[(c\sin\alpha-\omega r)^2+c^2\cos^2\alpha]}$.

Beweis. Sei DN (Fig. 284) die Richtung des einfallenden Wasserstrahles, also $NDS=\alpha$, so zerfällt die Geschwindigkeit c in die Seitengeschwindigkeiten $NS=c\sin\alpha$, und $DS=c\cos\alpha$. Da die Geschwindigkeit des inneren Radkranzes $r\omega$ ist, so ist $c\sin\alpha-r\omega$ die relative Geschwindigkeit des eintretenden Wassers in der auf den Halbmesser senkrechten Richtung, und $c\cos\alpha$ in der Richtung des Halbmessers mithin ihre Resultirende oder

$$v=\sqrt{[(c\sin\alpha-r\omega)^2+c^2\cos^2\alpha]}.$$

1173. Folgesatz. Die dieser Geschwindigkeit zugehörende leben-

Digitized by Google

dige Kraft, oder das Produkt aus der bewegten Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit ist $My^2 : 2g$; bezeichnet man also mit h die der Geschwindigkeit v entsprechende Geschwindigkeitshöhe, so wird $My^2 : 2g = My h$ und daher die lebendige Kraft des eintretenden Wassers

$$My h = My\gamma[(c\sin\alpha - r\omega)^2 + c^2\cos^2\alpha] : 2g.$$

Diese Kraft muß aber, weil das Wasser sich mehr und mehr von der Axe entfernt, durch die Wirkung der Centrifugalkraft einen Zuwachs erhalten.

1174. Aufgabe. Die Vergrößerung der lebendigen Kraft des einströmenden Wassers wegen der Centrifugalkraft des Wassers zu bestimmen.

Auflösung. Ist R der Halbmesser des äußeren Radkranzes und h' die der Geschwindigkeit $\omega\sqrt{(R^2 - r^2)}$ zugehörige Höhe, so hat man die Vergrößerung der lebendigen Kraft beim Austritt des Wassers aus dem Radkranze

$$My h' = \frac{My\omega^2}{2g}(R^2 - r^2).$$

Beweis. Ein Punkt M der Radschaufel in der Entfernung $MC = x$ von der Axe hat die Geschwindigkeit $u = \omega x$, die Wassermasse, welche im kreisförmigen Ringe von der Breite dx enthalten ist, beträgt $My dx : g$, denn es ist der Inhalt des Ringelements $2\pi x dx$, und der Inhalt einer vom Wasser in der Zeiteinheit bedeckten cylindrischen Fläche vom Halbmesser x, gleich $2\pi x g$, demnach verhält sich $2\pi x g : 2\pi x dx = My : y$ also $y = My dx : g$; und weil die Centrifugalkraft einer mit der Geschwindigkeit u im Kreise vom Halbmesser x bewegten Masse m den Werth $u^2 m : x$ hat; so folgt dieselbe für den eben betrachteten Punkt der Schaufel gleich

$$\frac{\omega^2 x^2}{gx} My dx = \frac{\omega^2 My}{g} \cdot x dx$$

und daher ist das zwischen den Grenzen $x = r$, bis $x = R$ genommene Integrale

$$\frac{\omega^2 M\gamma}{g}\int x\,dx = \frac{M\gamma\omega^2}{2g}(R^2-r^2) = M\gamma h'.$$

1175. Folgesatz. Hiemit erhält man

$$M\gamma(h+h') = M\gamma[(c\sin\alpha - r\omega)^2 + c^2\cos^2\alpha + \omega^2(R^2-r^2)] : 2\gamma$$
$$= \frac{M\gamma}{2g}[c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + R^2\omega^2),$$

daher die Geschwindigkeit des Wassers beim Austritt aus der Schaufel

$$V = \sqrt{[c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + R^2\omega^2]} - R\omega\cos\beta$$

wenn β den Winkel UFT vorstellt, den das letzte Element der Schaufelkurven mit der Tangente UF am äußeren Radumfange einschließt.

1176. Folgesatz. Die lebendige Kraft, womit das Wasser die Schaufeln der Turbine verläßt, ist

$$\frac{M\gamma V^2}{2g} = M\gamma[\sqrt{(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + R^2\omega^2)} - R\omega\cos\beta]^2$$
$$= M\gamma[(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + R^2\omega^2(1+\cos^2\beta)$$
$$-2R\omega\cos\beta\sqrt{(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + R^2\omega^2)}] : 2g.$$

1177. Aufgabe. Die Kraft des Wassers bei Umdrehung der Turbine zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet man mit P diese am inneren Radumfange angebrachte Kraft; so erhält man ihr mechanisches Moment

$$Pr\omega = M\gamma[2r\omega c\sin\alpha - R^2\omega^2(1+\cos^2\beta)$$
$$+2R\omega\cos\beta\sqrt{(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + R^2\omega^2)}] : 2g.$$

Beweis. Das mechanische Moment der bewegenden Kraft ist $Pr\omega$, die lebendige Kraft des in den Radkranz einstürzenden Wassers ist aber $Mc^2\gamma : 2g$, demnach wird ihr Unterschied oder der Theil $Mc^2\gamma : 2g - Pr\omega$ nicht auf das Rad wirken, sondern lediglich zum Ausfluße des Wassers aus dem Rade dienen, und

Digitized by Google

natürlich seine Größe ungeschwächt erhalten, welche Richtung er anfänglich auch gehabt hat. Dies gibt

$$\frac{Mc^2\gamma}{2g} - Pr\omega = \frac{MV^2\gamma}{2g}, \text{ woraus } Pr\omega = \frac{M\gamma}{2g}(c^2 - V^2)$$

folgt, und nachdem man statt V^2 den Werth (1175) substituirt hat, erhält man $Pr\omega$ wie oben.

1178. Folgesatz. Dieser Ausdruck erreicht seinen größten Werth, wenn man $\beta = o$, oder $\cos\beta = 1$ setzt, und nebstdem den Einfallswinkel α so annimmt, daß die Geschwindigkeit des aus den Schaufeln tretenden Wassers null wird, weil dann offenbar die ganze Kraft des Wassers zur Umdrehung des Rades verwendet wird. Man hat also nach (1175)

$V = \sqrt{(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + R^2\omega^2)} - R\omega = o$, oder

$c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + R^2\omega^2 = R^2\omega^2$, woraus sich, wenn u die Geschwindigkeit des inneren Radkranzes bedeutet,

$$\sin\alpha = \frac{c}{2r\omega} = \frac{c}{2u} \text{ ergibt, d. i.}$$

der Sinus des Winkels, unter welchem das Wasser aus den Leitkurven in das Rad eintritt, muß dem Quotienten aus der Geschwindigkeit des einstürzenden Wassers durch die doppelte Geschwindigkeit des inneren Radkranzes gleich sein.

1179. Folgesatz. Für den so eben gefundenen Werth von $\sin\alpha$ und für $\beta = o$ findet man aus (1177), $Pr\omega = Mgc^2 : 2g$.

1180. Anmerkung. In der Ausübung läßt sich jedoch dieser größte Werth nie erreichen, weil das Wasser aus den Leitkurven in die Schaufeln nie ohne Stoß eintritt, und auch die Geschwindigkeit des aus den Schaufeln tretenden Wassers sich nicht gänzlich verwenden läßt, indem sonst der Abfluß des Wassers aus dem letzten Schaufelelemente nach der Tangente des Radumfanges Statt finden müßte, weil ferner die Kontraktion des Wassers bei dem Eintritt in das Rad nicht ganz vermieden werden kann, und weil

Digitized by Google

endlich auch noch der Widerstand, der von der Adhäsion des Wassers an den Wänden der Leitkurven und Schaufeln herrührt, und die Reibung der Maschine an der Welle sowohl als auch an dem Radboden und den Zapfen noch zu berücksichtigen kommt. Man kann daher Versuchen zu Folge bei gut konstruirten Turbinen setzen

$$Pr\omega = 0.7Mc^2\gamma : 2g.$$

Zur Verminderung der Kontraktion des Wassers in den Leitkurven belegt man den Umfang des Radbodens stellenweise mit hölzernen Keilen wie in (Fig. 283) zu ersehen ist.

1181. Folgesatz. Zur Erleichterung des Abflusses gibt man dem letzten Schaufelelemente eine Neigung gegen die Tangente des Kreises zwischen 10 und 15 Graden. Heißt dieser Winkel β, so erhält man aus (1175), $V=o$ setzend,

$$c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + R^2\omega^2 = R^2\omega^2\cos^2\beta$$

und hieraus

$$\sin\alpha = \frac{c^2 + R^2\omega^2\sin\beta}{2r\omega c}$$

als denjenigen Werth die Einfallswinkels α, für welchen die Geschwindigkeit V des austretenden Wassers möglichst klein wird.

1182. Folgesatz 2. Hat man so den Einfallswinkel α des einstürzenden Wassers bestimmt, so ergibt sich die Geschwindigkeit desselben an einer Stelle, deren Entfernung vom Mittelpunkte des Rades ϱ ist, die zugehörige Geschwindigkeit

$$V' = \sqrt{(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + \varrho^2\omega^2)}.$$

1183. Aufgabe. Die Wassermenge der Turbine zu bestimmen.

Auflösung. Man bezeichne mit R den Halbmesser des äußeren Radumfanges, mit β den Richtungswinkel des ausfließenden Wassers, mit b die Höhe des Radkranzes, und mit ω die Winkelgeschwindigkeit seiner Umdrehung; so hat man

$$M = nR^2\omega b\sin 2\beta.$$

Digitized by Google

Beweis. Seien AA' (Fig. 285) BB' Theile der beiden Radumfänge ADB, $A'D'B'$ aber zwei benachbarte Schaufelkurven, und DD' ein mit dem Halbmesser δ beschriebener Kreisbogen. Man theile diesen Bogen in den Punkten $a, b, c, d \ldots$ in mehrere gleiche Theile, ziehe durch dieselben die den Schaufelkurven gleiche und ähnliche Bogen $1a, 2b, 3c, 4d \ldots$ und fälle aus den Punkten $D, a, b, c \ldots$ die Perpendikel $D1, a2, b3, c4 \ldots$ herab, so bezeichnen diese die Breiten der Wasserfäden an den Punkten $a, b, c, d \ldots$ Der Neigungswinkel der Schaufelkurven gegen den Kreisbogen DD' wird in jedem Punkte desselben einen gleichen Werth haben: sei also ϑ der Winkel zwischen der Tangente DF und der Tangente des Kreisbogens Da, so hat man

$$D1 = Da\sin\vartheta,\quad a2 = ab\sin\vartheta,\quad b3 = bc\sin\vartheta \text{ u. s. f. also}$$

$$D1 + a2 + b3 + \ldots = (Da + ab + bc + \ldots)\sin\vartheta = \sigma\sin\vartheta$$

diese Summe, wenn $DD' = \sigma$ gesetzt wird.

Es ist aber DE die Breite der Ausflußöffnung in einer Schaufel, und für sämmtliche Schaufeln des Radkranzes geht der Bogen σ in $2\pi\varrho$ über: heißt also b die Höhe des Radkranzes, so ist der Querschnitt sämmtlicher Schaufeln $2\pi\varrho b\sin\vartheta$. Hieraus folgt der Querschnitt sämmtlicher Ausflußöffnungen des Radkranzes, $\varrho = R$, $\vartheta = \beta$ setzend, $2\pi Rb\sin\beta$, und wenn dieser Ausdruck mit der relativen Geschwindigkeit (1175) $R\omega\cos\beta$ multiplizirt wird, erhält man $M = 2\pi Rb\sin\beta \times R\omega\cos\beta = \pi R^2\omega b\sin 2\beta$.

1184. **Folgesatz.** Bezeichnet man aber die relative Geschwindigkeit des im Punkte D fließenden Wassers mit V', so wird

$$M = 2\pi\varrho b\sin\vartheta . V'. \text{ Nun ist nach (1182)}$$

$$V' = \sqrt{(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + \varrho^2\omega^2)}, \text{ mithin erhält man}$$

$$M = 2\pi\varrho b\sin\vartheta\sqrt{(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + \varrho^2\omega^2)}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sofort die erforderliche Neigung ϑ des Schaufelelements D gegen den Kreisbogen DD'.

1185. **Aufgabe.** Den Winkel zu finden, welchen die Tan-

Digitized by Google

gente an das erste Schaufelelement mit dem Halbmesser des Rades bildet.

Auflösung. Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung hat man diesen Winkel θ nach der Gleichung

$$tg\theta = \frac{V\sin\alpha - r\omega}{V\cos\alpha}.$$

Beweis. Sei AB (Fig. 285 bis) die Schaufelkurve, CH der Halbmesser an ihren Anfangspunkt A, BK die Richtung des mit der Geschwindigkeit V aus der Schaufel fließenden Wassers; man ziehe an den Punkt A die Tangente AL des Kreises, und AN parallel mit BK, mache AL gleich der Geschwindigkeit $r\omega$ des inneren Radkranzes, und $AN = V$; so ist die Diagonale AG des Parallelogrammes $ANGL$ die Richtung, nach welcher das Wasser anfängt über die Radfläche hinzufließen, wenn es ohne Stoß in den Radkranz gelangen soll, mithin bezeichnet AG auch die Richtung des ersten Schaufelelements. Sei also $GAH = \theta$, $NAH = \alpha$, und man zerlege die Seitengeschwindigkeiten $r\omega$ und V jede in zwei andere, nach der Richtung AG und senkrecht auf diese Richtung; so sind die ersteren $V\cos(\alpha - \theta)$, und $r\omega\sin\theta$, die letzteren hingegen $V\sin(\alpha - \theta)$, und $r\omega\cos\theta$. Wenn nun kein Stoß erfolgen soll, so muß

$$V\sin(\alpha - \theta) = r\omega\cos\theta, \text{ oder}$$
$$V\sin\alpha\cos\theta - V\cos\alpha\sin\theta = r\omega\cos\theta, \text{ d. i.}$$
$$V\sin\alpha - V\cos\alpha\, tg\theta = r\omega$$

werden, woraus der obige Ausdruck unmittelbar folgt.

1186. Folgesatz. Da $V\sin\alpha > r\omega$, so ist $tg\theta$ mithin θ positiv, und es liegt die Tangente AG stets an einer Seite des Halbmessers CH durch den Anfangspunkt der Schaufel; somit muß die Schaufelkurve $AnOB$ diesen Halbmesser noch in einem Punkte O schneiden, also liegt ein Theil derselben diesseits der übrige Theil jenseits dieses Halbmessers.

Digitized by Google

1187. Folgesatz 2. Für einen Punkt n der Schaufelkurve, dessen Tangente senkrecht steht auf der Tangente des durch n gezogenen konzentrischen Kreisbogens, ist in (1184), $\delta = {}^1/_2\pi$, somit wird, wenn ϱ' den Halbmesser des Kreisbogens bezeichnet,

$$M = 2\pi\varrho' b \sqrt{(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + \varrho'^2\omega^2)}$$

woraus sich durch Auflösung der Gleichung vom 4. Grade

$$\varrho'^4 + \varrho'^2 \frac{(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha)}{\omega^2} - \frac{M^2}{4\pi^2 b^2 \omega^2} = o,$$

welche sich auf eine quadratische Gleichung zurückführen läßt, ϱ'^2 und somit auch ϱ' ergibt.

Für $\varrho = R$, wird $\delta = \beta$, und man erhält aus (1184)

$$\sin\beta = M : [2\pi R b \sqrt{(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + R^2\omega^2)}].$$

1188. Aufgabe. Die Polarkoordinaten der Schaufelkurve zum Behufe ihrer Verzeichnung zu berechnen.

Auflösung. Sei für einen Punkt M der Schaufelkurve $CM = \varrho$ der Radiusvektor, und $HCM = \varphi$ dessen Neigung gegen den Halbmesser CH gezogen durch den Anfangspunkt A der Schaufelkurve. Für einen sehr nahe an M gelegenen Punkt m der Kurve sei $Cm = \varrho + \Delta\varrho$, $HCm = \varphi + \Delta\varphi$; so hat man, wenn die Tangente MT des Kreisbogens MI geführt wird, welche von der Geraden Cm im Punkte p geschnitten wird, im Dreiecke Mpm

$$Mm = \sqrt{(Mp^2 + pm^2)} = \sqrt{(\varrho^2\Delta\varphi^2 + \Delta\varrho^2)}, \text{ und}$$

$$\sin\delta = \frac{mp}{Mm} = \frac{\Delta\varrho}{\sqrt{(\varrho^2\Delta\varphi^2 + \Delta\varrho^2)}}$$

und aus (1184) folgt $\sin\delta = M : [2\pi\varrho b \sqrt{(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + \varrho^2\omega^2)}]$ somit ist

$$\frac{\Delta\varrho}{\sqrt{(\varrho^2\Delta\varphi^2 + \Delta\varrho^2)}} = \frac{M}{2\pi\varrho b \sqrt{(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + \varrho^2\omega^2)}}$$

dies gibt

$$\Delta\varphi = \pm\Delta\varrho \sqrt{\left[\frac{4\pi^2 b^2}{M^2}(c^2 - 2r\omega c\sin\alpha + \varrho^2\omega^2) - \frac{1}{\varrho^2}\right]}$$

Digitized by Google

wo das obere Zeichen für Punkte des Bogens OB, das untere Zeichen für Punkte des Bogens AnO gilt: nun ist für $\varrho = r$, $\varphi = o$, setzt man also die Breite des Radkranzes gleich B, und $\varrho_1 = r + {}^1/_8 B$, so ergibt sich hieraus das zugehörige $\Delta\varphi$, mithin die Lage eines Punktes der Schaufelkurve, dessen Radiusvektor um ${}^1/_8 B$ den Halbmesser r übersteigt: macht man ferner $\varrho_2 = r + {}^2/_8 B$, $\varrho_3 = r + {}^3/_8 B$ u. s. f. so erhält man auch die Unterschiede der Abweichungen dieser Radienvektoren von einander, mithin auch die Lage der ihnen zugehörigen Punkte. So lange ϱ kleiner ist als $r + 2(\varrho' - r)$, wo ϱ' aus (1187) bekannt ist, erhält man die Punkte auf dem Bogen AnO, für größere Werthe von ϱ, als der eben angegebene, ergeben sich die Punkte im Bogen OB über O hinaus.

1189. Folgesatz. Die Verzeichnung der Schaufelkurve geschieht nun so: Man theile die Breite AH (Fig. 286) des Radkranzes in eine Anzahl von Theilen $A1 = 12 = 23 = 34 = 45$ u. s. f. ziehe durch die Theilungspunkte die Kreisbogen $a1$, $b2$, $c3$, $d4$ ... von unbestimmter Länge deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt im Mittelpunkte C des Rades sich befindet. Zu den Werthen von ϱ nämlich $C1 = \varrho_1$, $C2 = \varrho_2$, $C3 = \varrho_3$ u. s. f. berechne man nach (1188) die Werthe von $\Delta\varphi$, welche wir Kürze halber mit ψ_1, ψ_2, ψ_3... bezeichnen wollen, trage $\varrho_1\psi_1$ von 1 gegen a, $\varrho_2(\psi_1 + \psi_2)$ von 2 gegen b, $\varrho_3(\psi_1 + \psi_2 + \psi_3)$ von 3 gegen c u. s. f. so ergeben sich die Punkte a, b, c ... der Schaufelkurve.

1190. Anmerkung. Nach diesen theoretischen Untersuchungen ergeben sich noch der Erfahrung zu Folge nachstehende Konstruktionsverhältnisse:

1. Der Querschnitt des Behälters muß beträchtlich größer sein, als die Summe der Ausflußöffnungen im Rade. Fourneyron nimmt an, daß die Summe der Flächen zwischen den Fächern im Leitkurvenapparate das Vierfache der Ausflußöffnungen im Rade ist.

2. Bei kleineren Turbinen nimmt man $r = 0.7R$, bei größeren hingegen $r = 0.74R$ bis $0.8R$, wobei die Höhe des Radkranzes nicht über ${}^1/_7 r$ steigen darf.

Digitized by Google

3. Die Winkelgeschwindigkeit ω wird aus der Gleichung

$$r\omega = 0.6c = 06\sqrt{2gh}$$

bestimmt, hiemit folgt die Geschwindigkeit des äußeren Radkranzes

$$R\omega = 0.6R\sqrt{2gh} : r.$$

4. Da das Gefälle h und die disponible Wassermenge gegeben ist, so findet man den Nutzeffekt

$$E = Pr\omega = kMhy$$

wo k einen Erfahrungskoeffizienten bedeutet, und nahe 0.7 beträgt, wenn die Zahl der Umdrehungen N, welche das Rad in einer Minute macht zwischen

$$\frac{3.3\sqrt{2gh}}{R} \text{ und } \frac{5.6\sqrt{2gh}}{R}$$

enthalten ist, und die Höhe des Schützenzuges $^2/_3$ der Radhöhe übersteigt.

5. Da $\omega = {}^1/_{60}\pi N$ ist, so folgt $N = 30\omega : \pi$. Fourneyron nimmt an, daß die Entfernung zweier benachbarten Schaufelkurven auf dem inneren Radumfange beiläufig der lichten Höhe des Radkranzes gleich sein solle: dies gibt $N = 2\pi r : b$. Je nachdem die Zahl der Schaufeln zwischen 18 und 24 oder darüber fällt, ordnet er für 2 oder 3 derselben eine Leitkurve an. Mehrere Bemerkungen findet man in Kayser's o. a. Werke und in der Schrift: D. Moriz Rühlmann die horizontalen Wasserräder und besonders die Turbinen oder Kreiselräder. Leipzig 1841.

VI. Maschinen zum Wasserheben.

1. Die Spiralpumpe.

1191. Erklärung. Die Spiralpumpe (Fig. 287) besteht in einer schraubenförmig um eine horizontal gelagerte Welle AB gewundenen Röhre $FGHI$, mit der sie durch Kreuzarme verbunden ist, so daß bei der Umdrehung der in Lagern aufliegenden Welle, sofort auch die Spiralwindungen gedreht werden. Man nennt diesen Theil der Maschine die Schlange: sie besitzt an

Digitized by Google

ihrem vorderen Ende eine trichterförmige Erweiterung *F*, das Horn, womit ſie bei jeder Umdrehung Waſſer und Luft ſchöpft; am hinteren Ende iſt die Schlange mit einer ſenkrechten Röhre *DE*, der Steigröhre, ſo verbunden daß bei der Drehung der Schlange ſie luft- und waſſerdicht mit der Schlange verbunden bleibt, ohne ihre ſenkrechte Stellung zu ändern: dieß wird durch ein kurzes Rohrſtück bei *C* das Gewinde, bewerkſtelliget, welches in der Richtung der Axe in die Steigröhre waſſerdicht eingeſetzt iſt, und in welches ſich das Ende der Schlange ergießt. So vielmal die Röhre um die Welle gewunden iſt, ſo viel Gänge oder Windungen hat die Spiralpumpe; man zählt dieſe vom vorderen Ende der Schlange an, bis zu ihrem hinteren Ende wo die letzte Windung ſich befindet. Das Schlangenrohr kann auf dreierlei Art angeordnet werden: entweder iſt das Rohr von durchgängig gleicher Weite, und lauft um die Welle in gleich großen Windungen fort, ſo daß der Halbmeſſer der centriſchen Linie der Schlange in jeder Windung gleich groß wird, die cylindriſche Spiralpumpe: oder aber die gleich weite Röhre erhält vom Horne an gegen die Steigröhre ſtufenweiſe kleinere Windungen, wie wenn die Schlange um einen Kegel gewunden würde, die koniſche Spiralpumpe: oder endlich es nimmt der Durchmeſſer der Schlangenröhre vom Horne gegen die Steigröhre ab, daß alſo das Rohr ſelbſt einen abgeſtutzten Kegel bildet, welcher in gleichfalls abnehmenden Windungen bis zur Seigröhre fortlauft, eine doppelt koniſche Spiralpumpe.

1192. Anmerkung. Die Schlange wird gewöhnlich aus Kupfer, Zinn oder Blei angefertigt, während das Steigrohr vom Eiſen iſt, und im Querſchnitt der Oeffnung dieſelbe Weite erhält, als die letzte Windung der Schlange. Die Umdrehung der Schlange wird entweder durch eine Kurbel bewirkt, welche an der verlängerten Axe der Welle angebracht iſt, oder es kann die Welle mit einem Waſſerrade verſehen ſein, welches durch ein fließendes Waſſer bewegt wird.

1193. Aufgabe. Die Erhebung des Waſſers mittelſt einer Spiralpumpe zu erklären.

Digitized by Google

Auflösung. Beim Gebrauche wird die Spiralpumpe so in das Wasser gestellt, daß die Axe AB horizontal oberhalb des Wasserspiegels MN liegt, während die Steigröhre DE in der senkrechten Lage befestigt ist. Wird nun die Schlange gedreht, so senkt sich das Horn F ins Wasser schöpft einen Theil Wasser, tritt aus dem Wasser wieder hervor und schöpft Luft, bis es bei einer zweiten Umdrehung wieder in das Wasser tritt, davon schöpft, hervortritt, wieder Luft schöpft, und sofort abwechselnd Luft und Wasser erhält. Wegen der schraubenförmigen Gestalt der Schlange rückt aber das geschöpfte Wasser in der Röhre vom Horne der Steigröhre immer näher, und da die zeitweise geschöpfte Luft immer von beiden Seiten durch das bei jeder Umdrehung geschöpfte Wasser begrenzt ist, so wird endlich die ganze Schlange mit Wasser- und Luftsätzen angefüllt, die sich nun bei B in die Steigröhre zu ergießen anfangen, und bei fortgesetzter Umdrehung der Schlange in der Steigröhre immer höher gehoben werden, bis sie bei E zur Ausflußöffnung gelangen.

1194. Aufgabe. Bei einer konischen Spiralpumpe den erforderlichen Halbmesser der letzten Windung zu bestimmen.

Auflösung. Bedeutet R den Halbmesser der ersten Windung einer Spiralpumpe, r den Halbmesser der cylindrischen Schlangenröhre, k das Gewicht einer Wassersäule von 32 Fuß, und H das der Wassersäule in der Steigröhre, beide auf die Einheit der Fläche bezogen, so hat man den Halbmesser in der centrischen Linie der letzten Windung

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(R+r)\left(1+\frac{k+2R}{k+H}\right)-r.$$

Beweis. Der gesuchte Halbmesser in der letzten Windung einer konischen Spiralpumpe ist so zu bestimmen, daß bei dem in derselben vorhandenen Drucke, welchem die in der letzten Windung eingeschlossene Luft ausgesetzt ist, noch alles Wasser daselbst Raum hat, welches mit jeder Umdrehung der Schlange aus der ersten Windung ihr zugeführt wird. Da die erste Windung als ein

Digitized by Google

Cylinder angesehen werden kann, dessen Grundfläche πr^2 und Höhe $2\pi(R+r)$ die Peripherie der centrischen Linie in der Windung ist, so folgt ihr Inhalt $2W=2\pi^2(R+r)r^2$ wovon die Hälfte Luft, die Hälfte aber Wasser enthält. Sei ferner l die Länge des wasserhaltenden Bogens, so ist $l=\pi(R+r)$, und die vertikale Höhe des Wasserbogens in der ersten Windung ist $2R$. Stellt AFB (Fig. 288) den vertikalen Durchschnitt der letzten Windung vor, in welcher eben so viel Wasser und Luft als in der ersten Windung vorhanden sein soll, und es bezeichnet w den Raum FHP, welchen die zusammengepreßte Luft daselbst einnimmt, l' die Länge dieses Luftbogens, gemessen an dessen centrischer Linie $FHLP$, H die Höhe des Wassers in der Steigröhre, k die dem Drucke der Atmosphäre gleiche Wassersäule, so ist $k+2R$ der Druck auf die Luft in der ersten Windung, und $k+H$ derselbe auf die Luft in der letzten Windung, also nach dem Mariotte'schen Gesetze

$$k+H : k+2R = W : w \quad \text{daher}$$

$$w = \frac{k+2R}{k+H} \cdot W = \frac{k+2R}{k+H}\pi^2(R+r)r^2$$

ferner ist wegen dem gleich großen Querschnitte der Röhren in allen Windungen

$$\frac{w}{\pi r^2} = l' = \frac{k+2R}{k+H}\pi(R+r)$$

Ist nun ϱ der Halbmesser der letzten Windung, also

$$2\pi(\varrho+r) = l+l' \quad \text{oder}$$

$2\pi(\varrho+r)=\pi(R+r)\left(1+\frac{k+2R}{k+H}\right)$; hieraus folgt ϱ wie oben.

1195. Aufgabe. Die Druckhöhe in der letzten Windung zu bestimmen.

Auflösung. Man hat für

$$\alpha = {}^1/_2\pi(3\varrho+r-2R)-(\varrho+{}^{13}/_{12}r)\sqrt{2r:(\varrho+r)}$$

die gesuchte Druckhöhe

$$k=\varrho+\alpha\left[1-\frac{1}{6}\left(\frac{\alpha}{r+\varrho}\right)^2+\frac{1}{120}\left(\frac{\alpha}{r+\varrho}\right)^4\cdots\right].$$

Digitized by Google

Beweis. Um die Druckhöhe $DQ=h$ der Wassersäule in der letzten Windung zu finden, sei der Bogen $LP=\alpha$, und für den Halbmesser $=1$, sei $FH=2\omega$, $CQ=x$; so ist die Sehne $FH=\sqrt{(DF^2+DH^2)}$, und da DF die mittlere Proportionale zwischen DH und DB ist, $DF^2=r(2\varrho+r)$, $HD^2=r^2$, also Sehne $FH=\sqrt{(2r\varrho+2r^2)}$; dies gibt

$$\sin\omega=\frac{\frac{1}{2}\text{Sehne } FH}{\varrho+r}=\frac{\sqrt{(2r\varrho+2r^2)}}{2(\varrho+r)}.$$

Es ist aber nach (A. 781.)

$$\omega=\sin\omega+\tfrac{1}{6}\sin^3\omega+\tfrac{3}{40}\sin^5\omega+\ldots$$

wo das dritte Glied ohne merklichen Fehler weggelassen werden kann: setzt man hierin statt $\sin\omega$ seinen Werth so erhält man

$$\omega=\frac{\sqrt{(2r\varrho+2r^2)}}{2(\varrho+r)}+\frac{\sqrt{(2r\varrho+2r^2)^3}}{48(\varrho+r)^3}, \text{ oder}$$

da Bogen $FH=2\omega(\varrho+r)$ ist, so wird

$$2\omega(\varrho+r)=\sqrt{(2r\varrho+2r^2)}+\frac{\sqrt{(2r\varrho+2r^2)^3}}{24(\varrho+r)^2}$$

nun ist

$$\sqrt{(2r\varrho+2r^2)}=(\varrho+r)\sqrt{\frac{2r}{\varrho+r}}, \text{ und}$$

$$\frac{\sqrt{(2r\varrho+2r^2)^3}}{24(\varrho+r)^2}=\sqrt{\frac{8r^3(\varrho+r)^3}{4.144(\varrho+r)^4}}=\tfrac{1}{12}r\sqrt{\frac{2r}{\varrho+r}}$$

dies gibt

$$2\omega(\varrho+r)=(\varrho+\tfrac{13}{12}r)\sqrt{\frac{2r}{\varrho+r}}.$$

Ferner hat man

Bogen $LP=$ Bogen $HFIL-$ Bogen $HF-$ Bogen FIP

oder $\alpha=\frac{3}{2}\pi(\varrho+r)-(\varrho+\tfrac{13}{12}r)\sqrt{\frac{2r}{\varrho+r}}-\pi(R+r)$

d. i. $\alpha=\frac{1}{2}\pi(3\varrho+r-2R)-(\varrho+\tfrac{13}{12}r)\sqrt{\frac{2r}{\varrho+r}}.$

Digitized by Google

Setzt man den zu α für den Halbmeſſer $=1$ zugehörenden Bogen gleich φ, mithin $\alpha=(\varrho+r)\varphi$, ſo folgt nach (A. 655)

$$\sin\varphi=x:(\varrho+r)=\varphi-{}^1/_6\varphi^3+{}^1/_{120}\varphi^5, \text{ woraus}$$

$$x=\alpha=\,{}^1/_6\frac{\alpha^3}{(\varrho+r)^2}+{}^1/_{120}\frac{\alpha^5}{(\varrho+r)^4} \text{ folgt}$$

hiemit erhält man $h=\varrho+x$ wie oben.

1196. **Folgeſatz.** Bei einer cylindriſchen Spiralpumpe iſt $R=\varrho$ mithin

$$\alpha'={}^1/_2\pi(R+r-(R+{}^{12}/_{12}r)\sqrt{\frac{2r}{R+r}}$$

größer als α an der koniſchen Spiralpumpe, und daher auch die Druckhöhe

$$h'=R+\alpha'\left[1-{}^1/_6\left(\frac{\alpha'}{R+r}\right)^2+\ldots\right]$$

größer als h.

1197. **Erklärung.** Die Steigröhre wird mit Waſſerſätzen und Luftſätzen ausgefüllt: die Summe der erſteren nennt man die hydroſtatiſche Waſſerhöhe oder den Waſſerdruck der Steigröhre, dagegen heißt die Länge der Steigröhre die Förderungshöhe der Spiralpumpe.

1198. **Aufgabe.** Den Waſſerdruck in der Steigröhre einer Spiralpumpe mit gegebenen Abmeſſungen zu finden.

Auflöſung. Heißt H dieſer Druck, h die Druckhöhe in der letzten Windung, n die Anzahl der Windungen, c die Geſchwindigkeit des Waſſers in der erſten Windung und v die der Steigröhre; ſo hat man

$$H=\frac{n}{2(1+v^2)}\left[4012r(2R+h)-\pi c^2\left(\frac{R+r}{r}-\frac{\varrho+r}{R+r}\right)\right]$$

Beweis. Sei die Geſchwindigkeit der centriſchen Linie in der erſten Windung $=c$, in der letzten $=c'$, ſo hat man

$$c:c'=2\pi(R+r):2\pi(\varrho+r), \text{ ſomit } c'=c(\varrho+r):(R+r)$$

Digitized by Google

nun ist für eine Röhrenlänge l vom Durchmesser d nach (1116) die Widerstandshöhe $h'=lc^2:2006d$. Bezeichnet man also mit h' die Widerstandshöhe in der ersten, mit h'' dieselbe in der letzten Windung, und mit h''' die Widerstandshöhe in der Steigröhre; so folgt, da $l=\pi(R+r)$ ist

$$h'=\frac{\pi c^2(R+r)}{4012r},\quad h'''=\frac{Hv^2}{4012r}$$

$$h''=\frac{lc'^2}{4012r}=\frac{lc^2(\varrho+r)^2}{4012r(R+r)^2}=\frac{\pi c^2(\varrho+r)^2}{4012r(R+r)}$$

Es ist die Druckhöhe in der ersten Windung $2R-h'$, und in der letzten $h-h''$: weil aber die gleichweite Schlange um einen Kegel gewunden vorausgesetzt wird, so läßt sich annehmen, daß die Druckhöhen in jeder Windung von $2R$ bis h gleichförmig abnehmen, alsdann ist die Summe der Druckhöhen in sämmtlichen Windungen gleich

$$\tfrac{1}{2}n[(2R-h')+(h-h'')].$$

Man hat also $H+h'''=\frac{1}{2}n[2R+h-h'-h'']$ und bei Substituirung der für h', h'', h''' eben angegebener Werthe ergibt sich H wie oben.

1199. Folgesatz. Wäre die hydrostatische Wasserhöhe in der Steigröhre gegeben, so findet man hieraus die erforderliche Anzahl Windungen

$$n=\frac{2(H+h''')}{2R+h-h'-h''}.$$

1200. Lehrsatz. Die Summe der Luftsätze in der Steigröhre, deren hydrostatische Wasserhöhe H ist, wird durch die Formel $H'=73.68\log(1+H:k)$ ausgedrückt.

Beweis. Betrachten wir ein Element der Steigröhre von der Länge dx in der Entfernung x von ihrem oberen Ende, und es sei y die Länge einer Wassersäule, welche den Druck auf dasselbe darstellt: dieser Druck rührt von dem Drucke der Atmosphäre oder der ihr gleichgeltenden Wassersäule k und von dem Gewichte der

Digitized by Google

über dem Elemente befindlichen Luft- und Wassersätze her, so daß $y=k$ wird, wenn $x=o$ ist.

Wäre das in Rede stehende Element zur Hälfte mit Luft erfüllt, so würde die Luftschichte von der Länge $^1/_2dx$, wegen dem an dieser Stelle obwaltenden Drucke, auf den Raum $z=kdx:2y$ zusammengedrückt, indem man dem Mariotte'schen Gesetze gemäß schließt $y:k=^1/_2dx:z$, und es hätte die Luft und Wasserschichte dieses Elements nur noch eine Höhe $^1/_2dx+kdx:2y=(k+y)dx:2y$. Soll also dx die Höhe der Luft und Wasserschichte zusammen betragen, so findet man die zugehörige Wasserschichte w aus der Proportion

$$\frac{(k+y)dx}{2y}:dx=^1/_2dx:w, \text{ also } w=\frac{ydx}{k+y}.$$

Nimmt man nun die Dichtigkeit des Wassers zur Einheit, und bezeichnet mit D die Dichtigkeit der Wasser- und Luftschichte zusammen als eines homogenen flüssigen Körpers, so ist, da sich die Dichtigkeiten verkehrt wie die Volumina verhalten

$$D:1=\frac{ydx}{k+y}:dx, \text{ also } \frac{1}{D}=\frac{k+y}{y}.$$

Wenn sich nun x um dx ändert, so wächst y um dy; daher ist $Ddx=dy$, oder

$$dx=dy.\frac{1}{D}=\frac{(k+y)dy}{y}=\left(1+\frac{k}{y}\right)dy$$

und hieraus folgt durch die Integration

$$x=y+k\lambda y+C$$

für $x=o$, wird $y=k$, mithin $C=-k-k\lambda k$

mithin ist vollständig

$$x=y-k+k\lambda(y:k)$$

und für $x=H+H'$, wird $y=k+H$

daher $H+H'=H+k\lambda\frac{k+H}{k}$, und

$$H'=k\lambda(1+H:k)$$

Digitized by Google

setzt man $k=32$ und dividirt diese Zahl zur Verwandlung der natürlichen Logarithmen in die briggischen mit dem Modulus 0.434... so erhält man $H'=73.68\log(1+H:k)$.

1201. Lehrsatz. Bei m Umdrehungen der Spiralpumpe in einer Minute ergibt sich eine Wassermenge $M=30c\pi r^2$.

Beweis. Die Wassermenge, welche bei jeder Umdrehung der Schlange gehoben wird, ist nach (1194) $\pi^2r^2(R+r)$; daher bei m Umläufen in einer Minute ist die Wassermenge $M=m\pi^2r^2(R+r)$, oder weil ein Umlauf in der Zeit $60:m$ Sekunden vor sich geht und c die Geschwindigkeit der ersten Windung ist, so verhält sich

$$\frac{60}{m}:1''=2\pi(R+r):c, \text{ daher ist}$$

$$m\pi(R+r)=30c, \text{ und } M=30c\pi r^2.$$

1202. Folgesatz. Hieraus ergibt sich der erforderliche Halbmesser r der Schlange, um die gegebene Wassermenge M bei einer gleichfalls gegebenen Geschwindigkeit zu liefern.

$$r=\sqrt{\frac{M}{30\pi c}}.$$

1203. Aufgabe Die Kraft zu bestimmen, welche am Theilrisse der ersten Windung nach der Richtung der Tangente dieses Kreises die Umdrehung der Spiralpumpe bewirken kann.

Auflösung. Ist M die Wassermenge, R, ϱ die Halbmesser der ersten und letzten Windung, c die Geschwindigkeit der ersten, h die Duckhöhe der letzten Windung und n die Anzahl derselben, so folgt

$$P=\frac{Mn}{60c}\left(2R+\frac{h(\varrho+r}{R+r}\right)\gamma.$$

Beweis. Das Moment des Wasserbogens in der ersten Windung zu finden, ist zu bemerken, daß der wasserhaltende Bogen von der Länge $\pi(R+r)$ dasselbe Moment hat als eine Wassersäule von der Höhe $2R$ am Umfange der centrischen Linie (1149)

Digitized by Google

dieser Windung; demnach ist dieses Moment in der ersten Windung

$$(R+r)2R\pi r^2\gamma$$

und in der letzten Windung ist das Moment des wasserhaltenden Bogens $(\varrho+r)h\pi r^2\gamma$: wenn also diese Momente gleichförmig abnehmen, so ist ihre Summe bei n Windungen

$$^1/_2\pi r^2 n[2R(R+r)+h(\varrho+r)]\gamma$$

und diese Summe durch den Halbmesser $R+r$ dividirt, liefert die erforderliche Kraft P, welche am Halbmesser $R+r$ angebracht, dem Uebergewichte der Wasserbögen das Gleichgewicht hält, man erhält so

$$P(R+r)=^1/_2\pi r^2 n[2R(R+r)+h(\varrho+r)]\gamma$$

oder $M:30c$ statt πr^2 gesetzt, den obigen Ausdruck.

1204. *Folgesatz.* Bei einer cylindrischen Spiralpumpe ist $\varrho=R$, und $h'>h$ (1196) somit die Kraft P'

$$P'=\frac{Mn}{60c}(2R+h')\gamma>P$$

demnach ist bei gleichen Abmessungen eine konische Spiralpumpe vortheilhafter als eine cylindrische.

2. Die Wasserschnecke.

1205. *Erklärung.* Wenn um einen Cylinder an dessen Umfange nach der Schraubenlinie eine gleich weite Röhre gewunden wird, so entsteht die sogenannte Archimedische Wasserschnecke. Diejenige Fläche, welche senkrecht auf der Axe der Spindel die Einflußöffnung in ihrem Schwerpunkte schneidet, und von einem Kreise begrenzt wird, welcher die Projektion der centrischen Linie der gewundenen Röhre auf die schneidende Ebene ist, heißt die *Grundfläche* der Schnecke. Zieht man von einem Punkte in der Peripherie der Grundfläche eine Gerade parallel zur Axe der Spindel, so berührt sie die centrische Linie einer jeden Windung in einem Punkte, der Abstand dieser Berührungspunkte in zwei benachbarten Windungen gibt die *Höhe eines Schneckenganges*. Der Nei-

Digitized by Google

gungswinkel der centrischen Linie gegen die Peripherie der Grundfläche heißt der Windungswinkel der Schnecke.

1206. Erklärung. Wenn man statt eine Röhre um die Spindel zu winden, nach der Schraubenlinie in die Spindel Vertiefungen einschneidet, und gleich lange Bretchen darin senkrecht auf der Axe der Spindel so befestiget, daß sie wasserdicht an einander passen, und hierauf den äußeren Umfang mit einer Bekleidung von schmalen Bretern umgibt; so bilden die inneren Räume einen schraubenförmig fortlaufenden Kanal oder Schneckengang und die Vorrichtung heißt eine Tonnenmühle. Die Figur 289 weiset eine Tonnenmühle ohne Bekleidung: in der Figur 290 ersieht man eines der keilförmigen Bretchen, welche in die Spindel eingeschoben werden.

1207. Erklärung. Ist die Bekleidung, der Komm, unbeweglich, und es dreht sich innerhalb derselben die Spindel sammt den Schneckengängen um ihre Axe, so nennt man die Vorrichtung eine Wasserschraube oder eine holländische Schraube: Figur 291 ist die Abbildung einer Wasserschraube mit einem hölzernen Kummi Fig. 292 zeigt ihre Grundfläche. Meistens ist die Umhüllung bei den Maschinen dieser Art an ihrer oberen Seite der ganzen Länge nach offen, und sie ragt an den beiden Seiten der Schraube etwas hervor. Eine Wasserschraube mit einem gemauerten Trog enthält die Figur 293.

1208. Anmerkung. Um eine Tonnenmühle anzufertigen, nimmt man einen hölzernen Cylinder, die sogenannte Spindel, mißt ihren Umfang, und zeichnet auf Papier ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete dem Umfange der Spindel gleich ist, die andere Kathete aber so groß genommen wird, als es der gegebene Windungswinkel mit sich bringt, und welche die Höhe eines Schraubenganges gibt: dieses Dreieck gehörig um die Welle gewunden, bestimmt durch seine Hypothenuse die Schraubenlinie. Zu diesem Ende zieht man an der krummen Oberfläche der Welle eine Gerade parallel mit ihrer Axe, die Seite der Spindel, theilt diese

Digitized by Google

in so viele gleiche Theile, als die Höhe des Schraubenganges in der Seite enthalten ist, legt in den Theilungspunkten die andere Kathete nach und nach an die Seite, und verzeichnet an der krummen Oberfläche der Spindel die schraubenförmige Linie bis zum oberen Ende der Welle. Soll nun der Wasserkanal nur die halbe Höhe eines Schraubenganges zur Weite haben, so windet man einen zweiten Papierstreifen, dessen Länge dem Umfange der Spindel, und dessen Breite der halben Höhe eines Schraubenganges gleich kommt so um die Spindel, daß die eine Seite genau an die gezeichnete Schraubenlinie anliegt, und verzeichnet so die zweite Schraubenlinie. Nach diesen beiden Schraubenlinien wird nun an der Welle eine etwa halben Zoll tiefe Rinne ausgearbeitet, (Fig. 289), um kleine Breter (Fig. 290) einsetzen zu können, welche den Kanal bilden, wenn die äußere oben offene Seite noch durch eine cylindrische Bekleidung verschlossen wird. Diese Breter werden in gleichen Entfernungen von der Wellenaxe concentrisch abgerundet, und das Ganze mit einem Mantel von dünnen Bretern umkleidet, der nur bei der Einmündung und oben bei der Ausmündung zur Aufnahme und zum Ausguß des Wassers im jeden der beiden Kanäle eine Oeffnung hat. Der Mantel wird noch außerhalb mit eisernen Ringen umgeben, damit er sich dicht an die Stirn der Windungsbreter anschließt und das Wasser in den Windungen nicht durchläßt.

1209. Anmerkung 2. Die Wasserschraube wird eben so angefertigt, nur daß hier der Mantel etwas weiter von den eine Wendeltreppe bildenden Bretern absteht, damit diese bei der Umdrehung an den Kumm nicht anstreifen. Die Tonnenmühle sowohl als die bewegliche Wasserschraube liegt mit ihrer durch die Welle gehenden eisernen Axe (Fig. 291) zu beiden Seiten in Lagern, die sich in einem vierseitigen eisernen Rahmen befinden. Beim Gebrauch wird das untere Ende der Schnecke in das zu schöpfende Wasser gelegt (Fig. 294) und damit dieses Ende nicht tiefer unter den Wasserspiegel gelangt, als zum vortheilhaften

Digitized by Google

Betrieb erfordert wird, so ist der Rahmen mit einer Kette verbunden, die um eine auf einem Gestelle ruhende Welle gewunden ist, so daß nach Erforderniß das untere Ende der Schnecke gehoben oder gesenkt werden kann. Am oberen Theile ruht der vierseitige Rahmen auf einem zweiten Gestelle, so daß die Schnecke in einer unter einem beliebigen Winkel, dem Standwinkel geneigten Lage gehalten wird, und durch eine mit der Axe verbundene Kurbel gedreht werden kann, wobei dann das Wasser unten in die Schraubengänge eintritt, und in diesen dem oberen Ende zugeführt wird, wo es ausfließt, und durch eine angelegte Rinne abgeleitet wird. Der Durchmesser oder die Weite des Mantels, welcher in der Regel das Dreifache von dem Durchmesser der Spindel beträgt, ist gewöhnlich zwischen 13 und 25 W. Zoll, und die Länge kommt dem 12 bis 18fachen Durchmesser gleich.

1210. Anmerkung 3. Die Schnecke wird so unter Wasser gebracht, daß die Einmündung der schraubenförmigen Röhre bei der Umdrehung, deren Richtung der Windung der Schraube entgegengesetzt ist, einen Theil ihres Laufes unterhalb des Wasserspiegels, den andern aber über demselben vollbringt, und sie also abwechselnd Wasser und Luft schöpft. Der Standwinkel der Schnecke muß kleiner sein als das Komplement des Windungswinkels zu 90°: denn nur dann wird der unterste Theil der Röhre, während eines Theiles der Umdrehung dem eintretenden Wasser tiefer liegende Stellen darbieten, in welche es sich vermöge seiner Schwere ergießt, und bei fortgesetzter Umdrehung kommt es in die tiefsten Stellen von Windung zu Windung, während die höheren Stellen derselben mit Luft gefüllt sind. Es ist also die relative Bewegung des Wassers in Bezug auf den Röhrentheil, in welchem es sich gerade befindet, eine fallende während seine absolute Bewegung, indem der tiefste Ort der Windung während der Umdrehung eine höhere Lage annimmt, von Windung zu Windung eine steigende ist.

1211. Anmerkung 4. Es ist nicht gleichgiltig, wie tief die Grundfläche der Tonnenmühle im Wasser steht: sinkt sie zu tief

Digitized by Google

ein, ohne jedoch ganz eingetaucht zu sein, so tritt zu wenig Luft ein, das Wasser und die Luft vertheilen sich unregelmäßig in die inneren Räume der Windungen und es entstehen luftverdichtete und luftverdünnte Räume, wodurch die Luft das Wasser in einer oder mehreren Windungen durchbricht und unregelmäßige Bewegungen in demselben hervorruft, welche den Effekt der Maschine schwächen. Eben so wird dieser geringer, wenn die Grundfläche nicht tief genug einsinkt, weil sich die Windungen nur mit wenig Wasser füllen. Die Grundfläche soll so weit eingetaucht sein, daß das Wasser in jeder Windung blos von dieser getragen wird, und nirgends eine Verdichtung oder Verdünnung der in der Röhre befindlichen Luft, also keine Fortpflanzung des Drucks, von einer Windung zur andern Statt haben kann. Nur bei der Wasserschraube, welche in allen ihren Windungen Luft zu schöpfen vermag, fallen die erwähnten Störungen weg, daher liefert sie immer dieselbe Wassermenge, wenn gleich mehrere der unteren Windungen unter Wasser stehen. Man kann also vermittelst der Wasserschrauben einen Behälter nach und nach ausschöpfen, ohne ihren Standwinkel zu ändern, während die Grundfläche der Tonnenmühle mit dem Wasserspiegel gesenkt werden muß, wenn sie mit Vortheil arbeiten soll: freilich geht bei der Wasserschraube, wegen dem Spielraume zwischen den Schneckengängen und dem Kumm oder Troge eine beträchtliche Wassermenge durch denselben wieder zurück, weßhalb die Schraube schnell umgedreht werden muß, damit dieser Verlust verhältnißmäßig geringer werde: die Tonnenmühle hingegen liefert bei zweckmäßiger Anwendung alles Wasser, welches die unteren Windungen schöpfen, sofort in die Höhe. In Holland werden die Wasserschrauben gewöhnlich durch Windmühlenflügel in Bewegung gesetzt.

1212. Lehrsatz. Die Summe aus dem Stand- und Windungswinkel einer Wasserschnecke ist stets kleiner als 90 Grade.

Beweis. Sei $ABCD$ (Fig. 295) die Spindel, OO' ihre Axe, $ALMFI'$ die centrische Linie ihrer Windungen, EE' eine beliebige horizontale Ebene, $LAQ=\alpha$ der Windungswinkel, $OIN=\beta$ der Standwinkel: man ziehe auf der Oberfläche der Spindel durch

einen Punkt M der Windung die Gerade MP mit der Axe parallel, und es sei x der Bogen für den Halbmesser $=1$, welcher zum Bogen AP in der Grundfläche gehört, so ist für $AO=R$, $AP=Rx$; ferner sei MM' auf die Ebene EE' senkrecht, und PR horizontal gezogen, so ist $MPR=\beta$, und $PM=Rx\,tg\alpha$, $MR=PM\sin\beta=Rx\,tg\alpha\sin\beta$: man ziehe noch PH auf AB, und HS auf die Ebene EE' senkrecht, so ist, wenn die Verlängerte AB der Ebene im Punkte K begegnet, und die Gerade PK gezogen wird, da HK zu OI und HS zu NI senkrecht steht, der Winkel $KHS=OIN=\beta$, und $HKS=90^0-\beta$, also $HS=HK\cos\beta=PN=MR$, oder wenn man $BK=k$ setzt, und da $BH=BO-OH=R+R\cos x$ ist, so erhält man $HS=R(1+\cos x)\cos\beta+k\cos\beta$: hiermit ergibt sich

$$MM'=Rx\,tg\alpha\sin\beta+[R(1+\cos x)+k]\cos\beta=\Delta.$$

Dieser Abstand eines Punktes M von der horizontalen Ebene EE', ist offenbar eine Funktion der Größe x; wenn man also dessen Differentiale Null setzt, erhält man für seinen größten oder kleinsten Werth

$$tg\alpha\sin\beta=\sin x\cos\beta, \text{ oder } I.\ \sin x=tg\alpha tg\beta,$$

und für diesen Werth wird

$$\left(\frac{d^2\Delta}{dx^2}\right)=-R\cos x\cos\beta$$

negativ, so lange als $\cos x$ positiv ist, oder wenn der Bogen x in den ersten oder vierten Quadranten vom Punkte A an gezählt, fällt; daher wird jener Abstand Δ ein Größtes, wenn $\sin x=tg\alpha tg\beta$, und zugleich x im ersten oder vierten Quadranten liegt: hingegen ein Kleinstes, wenn x im zweiten oder dritten Quadranten enthalten ist. Es gibt also gewisse Werthe von α und β, bei welchen ein Punkt L in der Windung den höchsten, ein anderer Punkt M derselben den tiefsten Stand über den Horizont erhält, folglich das bis nach L vorgedrungene Wasser schon vermöge seiner Schwere sich in den Bogen der Windung LML' ergießen muß. Da nun stets ein Sinus kleiner als 1 ist; so ist die Wassererhebung mittelst der Schnecke an die Bedingung gebunden, daß

Digitized by Google

$tg\alpha tg\beta < 1$, oder $tg\alpha < cot\beta$

oder endlich $\alpha < 90^0 - \beta$ und daher $\alpha + \beta < 90^0$ sei.

1213. Erklärung. Zieht man durch den Punkt L in der Windung, für welchen der Abstand LN ein Größtes wird, eine horizontale Gerade LL' durch die Spindel, welche die centrische Linie im Punkte L' trifft, so heißt der Theil der Windung LML' ihr wasserhaltende Bogen.

1214. Folgesatz. Führt man durch den Anfang L des wasserhaltenden Bogens auf der krummen Oberfläche der Spindel die Gerade LQ mit OO' parallel, und bezeichnet denjenigen Bogen für den Halbmesser gleich 1, welcher zum Bogen AQ gehört mit δ; so hat man wegen $I.$ $\sin\delta = tg\alpha : tg\beta$; man nehme $BP = AQ$, und ziehe aus P die Linie PM parallel mit OO', so ist $\sin AQ = \sin AP$ und AP ist der Bogen in der Grundfläche für das Minimum des Abstandes Δ, oder der Punkt M ist der tiefste in der Windung.

1215. Folgesatz. 2. Fällt man QG senkrecht auf AB, so bezeichnet G den Punkt in der Grundfläche, bis an welchen bei der Umdrehung der Spindel der Wasserspiegel reichen muß. Denn kommt die Einflußöffnung A bei der Umdrehung der Spindel von B nach Q, so wird sich der Bogen $LMFL'$ mit Wasser füllen, steigt nun dieselbe über Q, so schöpft die Schnecke so viel Luft, als zwischen zwei wasserhaltenden Bogen enthalten ist, und so kann bei jeder Umdrehung so viel Wasser geschöpft werden, als die Ausfüllung des Bogens LML' erfordert. Es ist aber die Entfernung $AG = AO - GO = R(1 - \cos\delta) = R\,\mathrm{sinv}\,.\,\delta$.

1216. Aufgabe. Die Länge des wasserhaltenden Bogens zu bestimmen.

Auflösung. Zieht man durch das Ende L' des wasserhaltenden Bogens die Gerade $L'Q'$ mit der Axe parallel, und setzt die Länge des wasserhaltenden Bogens gleich L, und die Länge des Bogens $APBQ'$ an der Grundfläche gleich L', so erhält man, wenn man

Digitized by Google

zur Abkürzung $tg\alpha tg\beta = T$, und $T\delta + \cos\delta = U$ setzt:

$$L' = \pi - T \pm \sqrt{(2 + 2U + T^2 - 2\pi T)}, \text{ und } L = R(L' - \delta)\sec\alpha.$$

Beweis. Denkt man sich die krumme Oberfläche der Spindel in eine Ebene ausgebreitet, so bildet (1208) der Bogen $ALML'$ die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen eine Kathete der Bogen in der Grundfläche $AQPQ'$, und die andere Kathete die Gerade $L'Q'$ ist. Man hat also $AL = R\delta\sec\alpha$, ferner

$$ALML' = APBQ' \,.\, \sec\alpha \text{, oder } L + AL = RL'\sec\alpha, \text{ daher}$$

$$L = R(L' - \delta)\sec\alpha.$$

Es ist aber, wenn man die Ebene EE' bis zur Berührung mit dem Punkte B der Spindel rückt, $k = o$, und für diesen Werth von k folgt aus (1212), weil $x = \delta$ ist,

$$\Delta = R\delta tg\alpha\sin\beta + R(1 + \cos\delta)\cos\beta$$

und eben so für den Punkt L' ist $L'N'$ oder

$$\Delta = RL'tg\alpha\sin\beta + R(1 + \cos L')\cos\beta$$

mithin ist

$$\delta tg\alpha\sin\beta + \cos\delta\cos\beta = L'tg\alpha\sin\beta + \cos L'\cos\beta$$

dividirt man mit $\cos\beta$ und setzt $tg\alpha tg\beta = T$, so folgt

$$\delta T + \cos\delta = L'T + \cos L'$$

da L' nicht viel von π verschieden ist, so setze man

$L' = \pi + \omega$, also $\omega = L' - \pi$, und weil nach (A. 655)

$\cos\omega = 1 - {}^1/_2\omega^2 + {}^1/_{24}\omega^4 - \ldots$ ist, so wird, wenn man die vierte Potenz von ω außer Acht läßt,

$$\cos L' = \cos(\pi + \omega) = -\cos\omega = {}^1/_2\omega^2 - 1$$

$$= {}^1/_2(L' - \pi)^2 - 1 = {}^1/_2L'^2 - \pi L' + {}^1/_2\pi^2 - 1.$$

Man mache zur Abkürzung die bekannte Größe $T\delta + \cos\delta = U$, so erhält man

$$L'T + \cos L' = U \text{ oder}$$

$$L'T + {}^1/_2L'^2 - \pi L' + {}^1/_2\pi^2 - 1 = U, \text{ dies gibt}$$

$$L'^2 - 2L'(\pi - T) - 2 + \pi^2 - 2U = o,$$

eine quadratische Gleichung, durch deren Auflösung sich L' wie oben ergibt.

Digitized by Google

1217. **Folgesatz.** Heißt f der zur centrischen Linie der Röhre senkrechte Querschnitt, so ist fL die Wassermenge, welche mit jeder Umdrehung der Schnecke, in die Höhe gebracht wird: bezeichnet man also mit F die Summe der Querschnitte aller Schneckengänge, aus welchen eine Windung besteht, so ist $F.L$ diese Wassermenge, und wenn m die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute bedeutet, die in dieser Zeit gehobene Wassermenge

$$M=mF.L.$$

1218. **Aufgabe.** Die Kraft zur Umdrehung der Wasserschnecke zu bestimmen.

Auflösung. Wenn von den Hindernissen der Bewegung abgesehen wird, n die Anzahl der Windungen und P die am Hebelsarme R' angebrachte Kraft bedeutet; so hat man mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung

$$R'P=nRLF\gamma tg\alpha\sin\beta.$$

Beweis. Wir wollen in irgend einem Augenblicke durch die Axe OO', der Spindel eine Ebene $ABCD$ legen, und diese zur Momentenebene annehmen, in Beziehung auf welche die statischen Momente des in den Windungen enthaltenen Wassers bestimmt werden sollen. Sei nun Q die Wassermenge einer Windung, so entfällt hievon auf das Bogenelement der Windung $Mm=d\sigma$ ein Theil, welchen man durch die Proportion

$$L:Q=d\sigma:\frac{Qd\sigma}{L}$$

findet: das Gewicht dieses Wasserbogens $Q\gamma d\sigma:L$, wirkt nach der vertikalen Richtung MM', und kann in die nach den Richtungen MP und MU, wirkenden Seitenkräfte zerlegt werden, wo MU senkrecht zu MP ist: die erstere Seitenkraft wird durch die Festigkeit der Axe OO' aufgehoben, und da der Winkel $UMM'=\beta$ ist, so wird die andere Seitenkraft gleich $Q\gamma d\sigma\cos\beta:L$. Da der Punkt P als Projektion des Punktes M auf die Peripherie der Grundfläche denselben Abstand $PH=y$ von der Momentenebene besitzt,

Digitized by Google

welchen der Punkt M selbst hat; so folgt das Moment des Druckes nach der Richtung MU gleich $Qy\cos\beta\gamma d\sigma : L$. Es ist aber, wenn ds den zum Bogenelement $d\sigma$ in der Grundfläche zugehörenden Bogen bedeutet, $ds = d\sigma\cos\alpha$, und weil eine Tangente des Kreises im Punkte P mit der Abszissenaxe AB einen Winkel einschließt, welcher den Winkel POB zu 90° ergänzt, also der Kosinus jenes Winkels zugleich der Sinus von POB ist, nach (A. 1232)

$$y = R\sin POB = Rdx : ds;$$

mithin wird das vorhin gefundene statische Moment des Wasserbogens

$$Mm = QR\gamma\cos\beta dx : L\cos\alpha,$$

welcher Ausdruck zwischen den Grenzen des wasserhaltengen Bogens, oder von $x = \delta$ bis $x = L'$ integrirt in

$$\frac{QR^2\gamma\cos\beta(\cos\delta - \cos L')}{L\cos\alpha}$$

übergeht. Nun ist (1216) $\cos L' = T\delta + \cos\delta - L'T$, daher

$$\cos\delta - \cos L' = T(L' - \delta) = tg\alpha tg\beta(L' - \delta),$$

und (1216) $L\cos\alpha = R(L' - \delta)$; hiedurch verwandelt sich das gesuchte Moment in $PRtg\alpha\sin\beta$: da aber bei nWindungen $Q = nLF$ ist; so erhält man das Moment der am Hebelsarme R' angebrachten Kraft P, oder

$$R'P = nRLF\gamma tg\alpha\sin\beta.$$

1219. *Folgesatz.* Bezeichnet m die Zahl der Umdrehungen der Spindel in einer Minute, und M die Wassermenge, welche die Schnecke in jeder Minute ausgießt, so folgt aus (1217) $FL = M : m$, und somit

$$R'P = nRM\gamma tg\alpha\sin\beta : m.$$

Anderweitige Untersuchungen über diese Maschine sind nachzuschlagen in

D. Bernoulli Hydrodynamica Argentor. 1738.

L. Euleri de cochlea Archimedis. Comment. Nov. Petrop T. V.

Digitized by Google

I. Th. Munich specimen inaugurale de cochlea hydraulica. Trajecti ad Rhenum 1839, dann in Eytelwein's Hydraulik, Gerstner's Mechanik Band 3, Kayser's Mechanik, und in *Navier*'s o. a. Schrift.

3. Der hydraulische Widder.

1220. Erklärung. Der hydraulische Widder oder der Stoßheber besteht aus einem Behälter *A* (Fig. 297), welcher durch zufließendes Wasser beständig voll erhalten wird, dann aus einer Leitröhre *B*, welche das Aufschlagwasser dem Windkessel *C* zuführt, in welchem die Steigröhre *D* luft- und wasserdicht bis nahe an dessen Boden eingesenkt ist. Am Ende der Leitröhre ist dieselbe etwas erweitert, und man nennt diesen Theil, welcher das Sperrventil *E* enthält, den Kopf des Widders, und im Boden des Windkessels ist das Steigventil *F* angebracht. Von den beiden Ventilen öffnet sich jenes von oben nach unten, dieses hingegen in der Richtung des fließenden Wassers, welche in entgegengesetzter Richtung sich schließen.

In der Figur 298 erscheint in einem größeren Maßstabe als die Maschine Fig. 297 der Kopf des Widders sammt dem Windkessel im Durchschnitte, und in der Figur 299 im Grundrisse.

1221. Aufgabe. Die Erhebung des Wassers im Stoßheber zu erklären.

Auflösung. Wenn das Sperrventil geschlossen und das Ganze in Ruhe ist, so steht das Wasser in der Steigröhre auf derselben Höhe, wie im Behälter. Wird nun das Sperrventil von außen herabgedrückt, welches zu Anfange des Spiels der Maschine stets vorzunehmen ist, so fließt das Wasser durch die bei *E* frei werdende Oeffnung in's Freie aus: das in der Leitröhre befindliche Wasser erlangt dadurch eine Bewegung gegen *F* hin, drückt das Sperrventil zu, wodurch das Ausfließen des Wassers durch die Sperröffnung *E* plötzlich unterbrochen wird. Die Wassermasse, die einmal in Bewegung gesetzt, nicht eben so schnell in Ruhe kommt, stößt

Digitized by Google

gegen das Steigventil, dringt in den Windkessel, verdichtet die im oberen Theile desselben befindliche Luft, indem diese auf ein kleineres Volum gebracht wird, und wird durch den eben erwähnten Stoß sowohl, als durch den Druck der im Windkessel sich wieder ausdehnenden Luft in das Steigrohr getrieben, welches eine kurze Zeit fortdauert, bis der Druck der in der Steigröhre befindlichen Wassersäule und die dem weiteren Einfluß des Wassers entgegen wirkenden Hindernisse das Steigventil schließen. Hiedurch wird aber der Druck gegen das Sperrventil so weit vermindert, daß dieses durch sein eigenes Gewicht niedersinkt, worauf dem Wasser der Durchfluß durch die Sperröffnung *E* wieder freisteht. Sobald als dieses geschehen, strömt das Wasser zu beiden Seiten derselben, sowohl jenes, welches wegen dem geschlossenen Steigventil nicht weiter dringen kann, und also eine rückläufige Bewegung annehmen muß, als vorzüglich dasjenige Wasser, welches durch die Leitröhre aus dem Behälter ausgegangen ist, gegen die Sperröffnung hin, und fließt durch diese so lange ins Freie, bis nicht der Druck des weiter vom Behälter zufließenden Wassers das Sperrventil schließt: worauf das Spiel der Maschine von Neuem beginnt, ein stets erneuerter Zufluß des Wassers in den Windkessel Statt hat, welches in der Steigröhre immer höher aufsteigt, und zuletzt durch das Ende derselben sich zu ergießen anfängt.

1222. *Folgesatz.* Die Erhebung des Wassers im Stoßheber geschieht in durch kleine Zeiträume, deren Dauer nach den Schlägen des Sperrventils sich richtet, abgesonderten Mengen, welche nur durch die Wirkung der Luft im Windkessel zu einem kontinuirlichen Wasserstrahle vereiniget werden.

1223. *Anmerkung.* Diese merkwürdige Wasserhebungsmaschine wurde von dem bekannten Aëronauten *Montgolfier* zu Ende des vorigen Jahrhunderts erfunden. Eytelwein hat auf Befehl der k. preußischen Regierung Versuche mit zwei verschiedenen Stoßhebern angestellt, deren Hauptdimensionen verändert werden konnten, und die Ergebnisse in der Schrift: Bemerkungen über die Wirkung

Digitized by Google

und vortheilhafte Anwendung des Stoßhebers. Berlin 1805, 4. bekannt gemacht. Aus diesen Versuchen folgt:

1) Die vortheilhafteste Stelle für den Kopf des Widders ist unmittelbar an dem Windkessel.

2) Die Sperröffnung soll nicht kleiner und nur wenig größer sein als der Querschnitt der Leitröhre, deren Durchmesser d nach der Formel $d=\frac{1}{21}\sqrt{60M}$ in rheinländischen Zollen bestimmt wird, wenn M die geförderte Wassermenge in Kubikzollen bedeutet.

3. Die Weite der Steigröhre kann ungefähr halb so groß genommen werden als die Weite der Leitröhre: hiebei soll die Steigröhre an ihrem Ende beim Ausguße nicht gebogen sein, sondern in ein Gußgerinne ausmünden, weil sonst durch die Stöße heftige Erschütterungen der Maschine erfolgen.

4. Vom kleinsten Hube des Sperrventils bis zu einer gewissen Grenze kann man durch Vergrößerung des Hubes die zu hebende Wassermenge vergrößern: und es ist weniger nachtheilig bei der Erbauung eines Widders den Hub des Sperrventils etwas zu groß als zu klein anzunehmen. Mit der Vergrößerung des Gewichts des Sperrventils wächst zwar ebenfalls die Wassermenge, aber auch die Stöße und Erschütterungen der Maschine werden heftiger. Uebrigens kann das Sperrventil ohne Nachtheil unter Wasser stehen.

5. Die Leitröhre soll etwas länger sein, als die von der Steigklappe an gerechnete Förderungshöhe, und darf nicht unter $\frac{3}{4}$ dieser Länge betragen. Das Volumen des Windkessels macht man aber etwas größer als den Inhalt der Steigröhre.

1224. Aufgabe. Die Bewegung des Wassers beim offenen Sperrventile zu bestimmen.

Auflösung. Sei h der unveränderliche Wasserstand im Behälter über dem Kopfe des Widders, l die Länge und a der Querschnitt der Leitröhre, c die der Höhe h zugehörige Geschwindigkeit, u die Geschwindigkeit beim Ausfluße des Wassers durch das Sperrventil, t die Zeit, während welcher das Sperrventil offen bleibt, und Q die in's Freie auslaufende Wassermenge; so hat man

Digitized by Google

$$c=\sqrt{2gh},\ t=\frac{l}{c}\lambda\frac{c+u}{c-u},\ Q=al\lambda\frac{c^2}{c^2-u^2}$$

Beweis. Da der Behälter mit der Leitröhre ein und dasselbe Gefäß bildet, so kann die in (1018) abgeleitete Bewegungsgleichung

$$N=\int\frac{dz}{y},\text{ und }\frac{aNdu}{dt}=c+gh-{}^1/_2\left(1-\frac{a^2}{A^2}\right)u^2$$

hier ihre Anwendung finden, und man erhält, da die Querschnitte der Leitröhre von gleicher Größe sind, $N=l:a$, nur ist, weil der Druck der Atmosphäre auf den Behälter und auf die Sperröffnung derselbe ist, $c=o$ zu setzen, und weil es für den Zufluß des Wassers in der Leitröhre gleichgeltend ist, ob derselbe aus einem sehr weiten Behälter, oder aber aus einem dessen Querschnitt A heißt, Statt hat, sobald nur die Druckhöhe stets unverändert erhalten wird, $A=\infty$ anzunehmen. Hiemit ergibt sich

$$\frac{ldu}{dt}=gh-{}^1/_2u^2,\text{ woraus }dt=\frac{2ldu}{2gh-u^2}=\frac{2ldu}{c^2-u^2}$$

folgt. Die Integration nach (A. 923) gibt t wie oben.

Ferner hat man

$$dQ=audt=\frac{2aludu}{c^2-u^2},$$

und nach Int. 37) sofort Q wie oben.

1225. Folgesatz. Hat man aber die Zeit t des Offenstehens der Sperröffnung aus Beobachtungen bestimmt, so ergibt sich

$$\frac{ct}{l}=\lambda\frac{c+u}{c-u},\text{ oder }\frac{ct}{l}=\beta\text{ gesetzt}$$

$$e^{-\beta}=\frac{c-u}{c+u},\text{ woraus }u=\frac{c(1-e^{-\beta})}{1+e^{-\beta}}\text{ folgt.}$$

Da diese Zeit nur wenig von der Zwischenzeit zweier nachfolgenden Schläge des Sperrventils unterschieden ist, so kann man

Digitized by Google

fast immer diese letztere dafür annehmen, und dadurch die Geschwindigkeit u und die verlorene Wassermenge Q berechnen.

1226. Aufgabe. Die Bewegung des Wassers bei geschlossenen Sperrventil und offenen Steigventil zu bestimmen.

Auflösung. Heißt H die Förderungshöhe, M die gehobene Wassermenge, a' der Querschnitt des Steigventils und t' die Zeit, während welcher es offen bleibt; so findet man

$$t'=\frac{lu}{(H-h)g},\quad M=\frac{alu^2}{2(H-h)g}.$$

Beweis. Da die im Windkessel eingeschlossene Luft einerseits durch den Druck der in der Steigröhre gehobenen Wassersäule von der Länge H, und andererseits durch eine Wassersäule h zusammengepreßt ist, und mit diesen Drückungen im Gleichgewichte steht: so hat man wenn die Geschwindigkeit des an der Steigklappe ankommenden Wassers v heißt, in der Bewegungsgleichung (1018) die Größe $-(H-h)$ statt h, ferner a' statt a, t' statt t und v statt u zu setzen: hiedurch ergibt sich, da $N=l:a$ ist, die Gleichung

$$\frac{a'ldv}{adt'}=-g(H-h)-\tfrac{1}{2}v^2, \text{ woraus}$$

$$-(H-h)=\frac{a'ldv}{agdt'}+\frac{v^2}{2g} \text{ folgt.}$$

Es ist aber $v=\frac{au}{a'}$, $dv=\frac{adu}{a'}$, mithin

$$-(H-h)=\frac{ldu}{gdt'}+\frac{a^2u^2}{2ga'^2}$$

da hier das zweite Glied rechts gegen die Größe $H-h$ vernachläßigt werden kann; so wird einfacher

$$-(H-h)=\frac{ldu}{gdt'},\text{ oder }\frac{du}{dt'}=-\frac{g(H-h)}{l}$$

Digitized by Google

es ist sonach die Bewegung des Wassers bei seinem Einflusse in den Windkessel eine gleichförmig verzögerte: die konstante bewegende Kraft $g(H-h):l$ wirkt der Richtung dieser Bewegung entgegen, und man erhält für die Zeit des Einflusses t'.

$$dt'=\frac{ldu}{g(H-h)},\quad dM=audt'=\frac{aludu}{g(H-h)}$$

die Integration dieser Ausdrücke liefert sogleich ihre Werthe wie oben.

1227. **Folgesatz.** Die Bewegung des Wassers in der Leitröhre umfaßt daher zweierlei Zeiten, nämlich die Dauer t, während welcher das Sperrventil offen bleibt und das Aufschlagwasser in's Freie abfließt, und die Zeit t', während welcher das Sperrventil geschlossen, aber das Steigventil geöffnet ist. Die erstere dieser Zeiten kann durch die Belastung des Sperrventils und durch Vergrößerung seines Hubes nach Belieben abgekürzt oder verlängert werden. Ist aber einmal diese Zeit t bestimmt; so erhalten die übrigen Größen u, Q, t', M gleichfalls unveränderliche Werthe, die sich aus den obigen Formeln ergeben. Die Dauer eines Schlages der Sperrklappe ist aber gleich der Summe der Zeiten t, t'.

1228. **Folgesatz 2.** Eine Vergleichung der Dauer beider Zeiten t, t' läßt sich so anstellen. Es ist (1224)

$$t=\frac{l}{c}\lambda\frac{c+u}{c-u}=\frac{l}{c}\lambda\frac{1+u:c}{1-u:c}=\frac{2l}{c}\left(\frac{u}{c}+\frac{u^3}{3c^3}\right)$$

$$\text{also } t=\frac{lu}{gh}+\frac{lu^3}{6g^2h^2},\quad \text{und } t'=\frac{lu}{(H-h)g}=\frac{lu}{ngh}$$

wenn man $H-h=nh$ setzt. Hieraus folgt, daß stets $t>t'$, und zwar es wird t' gegen t desto kleiner, je größer die Förderungshöhe H gegen die Druckhöhe h ist.

1229. **Lehrsatz.** Bei der vortheilhaftesten Wirksamkeit der Maschine ist das Sperrventil so anzuordnen, daß die Geschwindig-

Digitized by Google

keit des in der Leitröhre zufließenden Wassers $^4/_5$ der zur Druckhöhe gehörenden Geschwindigkeit betrage.

Beweis. Da mit jedem Schlage des Sperrventils der Stoßheber eine Wassermenge M fördert, so ist dieselbe für jede Sekunde in Zeit gleich $M:(t+t')$, und wegen (1228) nahe gleich $M:t$. Setzt man also für M den Werth (1226) und für t den Werth aus (1224); so ergibt die in einer Sekunde gelieferte Wassermenge

$$\frac{M}{t}=\frac{au^2}{2g(H-h)\lambda\frac{c+u}{c-u}}$$

differentiirt man diesen Ausdruck, und setzt dessen Differentiale gleich Null, so ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$\lambda\frac{c+u}{c-u}=\frac{cu}{c^2-u^2}.$$

Macht man zur Abkürzung $(c+u):(c-u)=x$, wodurch man

$$u=\frac{c(x-1)}{x+1},\quad c^2-u^2=\frac{4c^2x}{(x+1)^2},\quad \frac{cu}{c^2-u^2}=\frac{x^2-1}{4x}$$

findet, so erhält man für den größten Werth obiger Bedingungsgleichung die Gleichung

$$x^2=1+4\lambda x,$$

welcher durch den Werth $x=8.826$ Genüge geschieht: hiemit ergibt sich

$$u=\frac{7.8226c}{9.8226},\text{ und nahe }u=^4/_5c.$$

1230. **Folgesatz.** Im Falle dieser größten Wassermenge erhält man

$$t=\frac{l\lambda 9}{c},\quad Q=al\lambda\ ^{25}/_9,\text{ oder nahe}$$

$$t=2.497l:c,\quad Q=al\times 1.02,\text{ und }M=16ahl:25(H-h).$$

1231. **Folgesatz 2.** Aus dem letzten dieser Ausdrücke folgt ferner, wenn Wassermenge und Förderungshöhe gegeben sind, der erforderliche Wasserstand

Digitized by Google

$$h=\frac{25M+16al}{25HM}, \text{ und } H=h+\frac{16ahl}{25M}.$$

Eine umständlichere Theorie des Stoßhebers enthält *Navier*'s oben a. Schrift.

VII. Die Dampfmaschinen.

1. Allgemeine Betrachtungen über Dampfmaschinen.

1232. Anmerkung. Wird Wasser in einem hermetisch geschlossenen Raume z. B. in einem genau zugedeckten Kessel immer mehr und mehr erhitzt, so verwandelt sich ein desto größerer Theil desselben in Dampf, dessen Expansivkraft, oder wie man sie auch zu nennen pflegt, Spannung bei zunehmenden Temperaturen rasch wächst. Wenn z. B. die Spannung eines zu 80° *R* erhitzten Dampfes dem Drucke der Atmosphäre oder einer Queckfilbersäule von 28,85 Wiener Zolle das Gleichgewicht hält, und also auf einem jeden W. Quadratzoll Fläche einen Druck von 12¾ W. Pfunden ausübt, so verdoppelt sich derselbe, wenn die Temperatur des Dampfes auf 96.°4 *R*. steigt, und der Druck wird zehnmal größer, wenn d Temperatur 142°.3 *R*. beträgt. Ist nun die Fläche, auf welcher der so erhitzte Dampf den Druck ausübt, etwa eine Scheibe von 12 Zoll Durchmesser, mithin 113 Quadratzolle haltend, so beträgt der Druck desselben auf die bewegliche Scheibe über 144 Zentner, und kann folglich als bewegende Kraft zum Betrieb anderer Maschinen mit großem Vortheile in Anwendung kommen.

1233. Erklärung. Man nennt jede Maschine, welche unmittelbar durch den Druck des Dampfes bewegt wird, eine Dampfmaschine. Nach der besonderen Wirkungsart und Verwendung des Dampfes unterscheidet man bewegliche und stehende Dampfmaschinen. Die ersteren zerfallen weiters in Dampfwägen oder Lokomotive und Dampfschiffmaschinen. Die letzteren begreifen mehrere Abarten, welche im Folgenden erörtert werden sollen.

1234. Erklärung. Die wesentlichen Theile einer jeden Dampfmaschine sind: 1. der Dampfkessel oder ein mit Wasser gefüllter Be-

Digitized by Google

hälter, welcher aus starken zusammengenieteten Eisen- oder Kupferbleche verfertigt ist, und in welchem durch eine zweckmäßig angebrachte Feuerung Dampf erzeugt wird, 2. der Dampfcylinder ist ein aus Gußeisen verfertigter, genau cylindrisch abgedrehter oben und unten mit einem Boden geschlossener Stiefel, in welchem sich ein gut anschließender Kolben auf- und abbewegen läßt; diese Bewegung wird durch den aus dem Dampfkessel in den Cylinder, mittelst einer sinnreichen Vorrichtung, welche die Steuerung heißt, geleiteten Dampf erzeugt. 3. Der Kolben ist nun derjenige Theil der Dampfmaschine, welcher zunächst durch die Dampfkraft in Bewegung gesetzt wird, und dieselbe mittelst der durch den oberen Boden des Cylinders dampfdicht hindurchgehenden Kolbenstange weiter fortpflanzt.

1235. Anmerkung. In der Figur 300 bedeutet *A* den Dampfkessel, *B* die Dampfröhre, welche den Dampf durch einen Vierwegehahn *C* (939) bald in den Raum *D* oberhalb des Kolbens *F* leitet, wodurch seine Bewegung gegen den unteren Boden angeht, bald aber denselben dem Raume *E* unterhalb des Kolbens zuführt und den Kolben in entgegengesetzter Richtung aufzusteigen nöthigt, während der Dampf aus *D* ins Freie entweicht; an dieser so durch den Dampf bewirkten ab- und aufsteigenden Bewegung des Kolbens nimmt nun die damit fest verbundene durch den Deckel des Stiefels in *H* hindurchgehende Kolbenstange *FG* Theil, und man kann diese Bewegung sofort mittelst eines Balanciers *GK* der bei *I* seinen Drehpunkt besitzt, auf andere Maschinen übertragen.

1236. Erklärung. Zur Bestimmung der Spannkraft des Dampfes bei verschiedenen Temperaturen dienen Vorrichtungen, welche man insgemein mit dem Namen der Manometer bezeichnet. Das Hebermanometer besteht aus einer heberförmig gekrümmten Röhre *ABC* (Fig. 301), welche an dem Ende *A* in ein weiteres cylindrisch abgedrehtes metallenes Gehäus *AD* gefaßt ist, der längere Arm ist aber bei *C* offen, und die Röhre selbst mit mehreren messingenen Querleisten an ein hinreichend starkes Bret *EF* angeschraubt. Man gießt durch die mit einem Hahne zu sperrende Oeffnung *D* in die Röhre so viel reines Quecksilber, daß es zu An-

Digitized by Google

fange des Verſuches in den beiden Schenkeln bei *M* und *m* gleich hoch ſteht, dann ſchraubt man den Knopf *M* ab, um das überflüßige Queckſilber abfließen zu laſſen, und nachdem man dieſen wieder an ſeine Stelle gebracht hat, gießt man in den Behälter *AH* bis an die mit dem Hahne *G* verſehene Oeffnung Waſſer, weßwegen man demſelben abſichtlich einen weit größeren Durchmeſſer gibt, als der Röhre *ABC*, damit der Waſſerſpiegel im Behälter nicht merklich ſinkt, wenn er Waſſer in die Röhre liefert: zu dem Ende bleibt der Hahn zu Anfange des Verſuches offen, damit das überflüſſige Waſſer ablaufen kann. *H* iſt eine kurze mit einem Schraubengewinde verſehene Anſatzröhre, an welcher eine kupferne zur Hälfte mit Waſſer gefüllte Kugel angeſchraubt werden kann. In dieſer befinden ſich zwei genau konſtruirte Thermometer, deren Röhren dampfdicht aus der Kugel herausragen. Wird nun das Waſſer in der Kugel allmälig erwärmt, ſo ſteigen die ſich entwickelnden Dämpfe in das Gehäus *AD*, drücken auf das in demſelben befindliche Waſſer, welches allmälig das Queckſilber aus dem kürzeren Schenkel *AB* in den längeren *BC* treibt, dadurch ſinkt der Spiegel *M* in dem kürzeren, und es ſteigt der Spiegel *m* des Queckſilbers im längern Schenkel; der Unterſchied beider Queckſilberſpiegel gibt nebſt dem Druck der Atmoſphäre, der um den Druck der Waſſerſäule oberhalb des veränderlichen Punktes *M* zu vermindernde Spannkraft des Waſſerdampfes. Wie die Skale zur bequemeren Beobachtung der Spannkraft des Dampfes einer Lokomotive an dieſem Inſtrumente berechnet wird, ſoll weiter unten gezeigt werden.

1237. Anmerkung. Viele Naturforſcher als: ***Watt***, ***Betancourt***, ***Prony***, ***E. G. Schmidt***, ***Dalton***, ***Arzberger***, ***Biot*** u. A. haben Verſuche über die Spannkraft des Dampfes bei zunehmenden Temperaturen angeſtellt: allein dieſe Verſuche erſtreckten ſich im Allgemeinen nur bis zu Druckkräften von 4 oder 5 Atmoſphären und auch da ſtimmen die Reſultate dieſer Naturforſcher wenig überein. Die außerordentliche Schwierigkeit, welche dieſe Art von Unterſuchungen darbieten, wenn man wirklich genaue

Digitized by Google

Resultate erhalten will, die beträchtlichen Kosten, welche sie verursachen, und die Gefahren womit sie verbunden sind, hatten die weitere Fortsetzung dieser Versuche verhindert. Der Akademie der Wissenschaften des Instituts von Frankreich verdankt man erst eine vollständige Tafel in dieser Beziehung: sie vertraute die Ausführung dieser Versuche den beiden berühmten Gelehrten *Arago* und *Dulong* an, welche Alles anwandten, was eine vollkommene Kenntniß der physikalischen Gesetze zur Vermeidung der gewöhnlichen Fehler an die Hand geben kann. Die Spannung des Dampfes wurde bei stufenweise um 1° C. zunehmenden Temperaturen bis auf den hundertsten Theil eines Millimeters durch wirkliche Quecksilbersäulen gemessen, die in Krystallglasröhren enthalten waren, welche zusammen sogar eine Höhe von 86 pariser Fuß erreicht haben. Die Instrumente wurden ausdrücklich von den geschicktesten Mechanikern verfertigt, und kein nöthiger Kostenaufwand gespart. Die Ergebnisse dieser alles Zutrauen verdienenden Versuche sind in dem zehnten Aktenbande der Pariser Akademie, und in den *Annales de Chimie et de Physique, tome XLIII* 1830 bekannt gemacht.

1238. Anmerkung 2. In der nachstehenden Tafel wurde das metrische Maß, den mètre *) =3.163463 W. Fuß gesetzt, in das Wiener Zollmaß übertragen: die Temperaturen sind hingegen nach dem hunderttheiligen Luftthermometer beibehalten worden, weil das Quecksilber nur innerhalb der Temperatur des siedenden Wassers sich gleichförmig ausdehnt, und daher ein Quecksilberthermometer in seinen Angaben mit jenen des Luftthermometers genau übereinstimmt — über diese Temperatur hinaus werden aber die Ausdehnungen des Quecksilbers größer als die Wärmezunahmen.

*) So steht die Angabe des mètre in J. J. Littrow's Vergleichung der vorzüglichsten Maße, Gewichte und Münzen. Wien 1832. Pambour gibt den mètre zu 3.163533 W. Fuß an.

Tafel der Spannungen des Dampfes zwischen 0° und 250° C. in Wiener Zollen.

t°C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.152	0.164	0.178	0.193	0.208	0.225	0.243	0.262	0.282	0.304
1	0.327	0.351	0.377	0.403	0.433	0.464	0.497	0.531	0.568	0.607
2	0.648	0.691	0.736	0.784	0.837	0.889	0.945	1.004	1.066	1.132
3	0.201	1.273	1.349	1.429	1.513	1.601	1.693	1.790	1.891	1.997
4	2.108	2.224	2.346	2.473	2.605	2.744	2.889	3.041	3.199	3.363
5	3.535	3.715	3.902	4.096	4.300	4.511	4 731	4.960	5.198	5.447
6	5.704	5.973	6 252	6.541	6.842	7.169	7.479	7 816	8 166	8.528
7	8.905	9.295	9.700	10.19	10 55	11.00	11.47	11.95	12.45	12.97
8	13 51	14 06	14.63	15.22	15.84	16.47	17.12	17.80	18.50	19.22
9	19.97	20.73	21.53	22.35	23.19	24 07	24.97	25.89	26.85	27.83
10	28.85	29.90	30.98	32.09	33.23	34.41	35.62	36.87	38.16	39.39
11	40.84	42.24	43 68	45 15	46.68	48.24	49.85	51.50	53.19	54.93
12	56.72	58.56	60.45	62.39	64.37	66.41	68.51	70.49	72.86	75.12
13	77.43	79.81	82 24	84.74	87.30	89 92	92.61	95.36	98.18	101.1
14	104 0	107.0	110.1	113.3	116.6	119.9	123.3	127.0	130.3	133.9
15	137.6	141.4	145 3	149 3	153.3	157.5	161.7	166.1	170 5	175.0
16	179.6	184.3	189.1	194.0	199.0	204.1	209.3	214 7	220.1	225.6
17	231.3	237.0	242.9	248.9	255.0	261.2	267.5	224.0	280.6	287.3
18	294.1	301.1	308.1	315.4	322.7	330 2	337.8	345.6	353.4	361.5
19	369.6	378.0	486.4	395.0	403.8	412.7	421.7	430.9	410.3	449.8
20	459.5	469.3	479.3	489 4	499.7	510.2	520.9	531.7	542.7	553.8
21	565.1	576.6	588.3	600.1	612.2	624.4	636.8	649 3	662.1	675.0
22	688 2	701.5	715 0	728.7	742 6	756.7	771.0	785.5	800.2	815.1
23	830.2	845.5	861.0	876.7	892.6	908.7	925.1	941.6	958.4	975.4
24	992.3	009.7	027.3	045.1	063.2	081.5	100.0	118.8	137.7	156.9

Bei den Temperaturen über 240° sind volle 1000 Zolle hinzuzufügen. So ist z. B. bei 84° die Spannung 15.84, bei 137° 95.36, bei 219° 575.0 bei 245° 1081.5 Wiener Zolle.

1239. **Folgesatz.** Bezeichnet man die einer Temperatur von $t°C$ zugehörige Spannung des Dampfes mit n, so ist der Druck desselben auf eine Flächeneinheit, oder $p = n \times 13.5982\gamma$, wenn γ das Gewicht einer kubischen Einheit destillirten Wassers vorstellt. Es ist aber nach Stampfer im 16. Bande der Jahrbücher des k. k. polytechnischen Instituts von Joh. Jos. Prechtl k. k. Regierungsrathe. Wien 1830, das Gewicht eines W. Kubikfußes Wasser

Digitized by Google

bei 0° gleich 56.3708 W. Pfunde, mithin ist das Gewicht eines W. Kubf. Queckſilber 56.3708×13.5982 und das eines W. Kubikzolles Queckſilber 56.3708×13.5982:1728 W. Pfunde. Heißt nun N die Zahl Millimeter der Queckſilberſäule, und n die dieſer Zahl entſprechende Anzahl Wiener Zolle, ſo hat man, da

log. 1 millimètre =0.5793439—2 W. Zolle,

log. n= log. N+0.5793439—2. Ferner iſt

log. 56. 3708=1.7510542	log. Gewicht eines W.
log. 13. 5982=1.1334814	Kbkz. Queckſilb.=0.6469919—1
D. E. log. 1728=6.7624563	log. n= log. N+0.5793439—2
Summe =0.6469919—1	log p=log N+0.2263358—2

1240. Anmerkung. Nach dieſer Formel wurden ſämmtliche Beobachtungen von *Arago* und *Dulong* in Wiener Maß umwandelt, durch eine Interpolation mittelſt zweier Differenzreihen auf das 80theilige Lufthermometer zurückgeführt und in die folgende Tafel aufgenommen.

Dampfdruck auf einen Wiener Quadratzoll für das 80theilige Lufthermometer in Wiener Pfunden.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.067	0.074	0.082	0.091	0.100	0.110	0.121	0.132	0.145	0.159
1	0.173	0.189	0.206	0.224	0.244	0.265	0.287	0.311	0.337	0.365
2	0.394	0.426	0.459	0.495	0.533	0.573	0.616	0.662	0.710	0.762
3	0.816	0.874	0.935	1.000	1.069	1.141	1.217	1.298	1.384	1.474
4	1.568	1.669	1.774	1.885	2.001	2.124	2.253	2.389	2.532	2.680
5	2.837	3.002	3.174	3.355	3.545	3.743	3.950	4.168	4.396	4.633
6	4.880	5.142	5.413	5.696	5.991	6.300	6.622	6.956	7.306	7.671
7	8.051	8.446	8.857	9.286	9.723	10.19	10.68	11.22	11.87	12.24
8	12.80	13.38	13.99	14.61	15.26	15.94	16.64	17.37	18.12	18.88
9	19.70	20.54	21.40	22.29	23.22	24.18	25.16	26.19	27.24	28.34
10	29.46	30.62	31.83	33.06	34.35	35.67	37.03	38.44	39.89	41.38
11	42.92	44.51	46.14	47.82	49.55	51.34	53.17	55.06	57.00	59.00
12	61.06	63.17	65.34	67.57	69.86	72.22	74.63	77.12	79.67	82 28
13	84.97	87.72	90.55	93.44	96.42	99.46	02.58	*05.78	09.06	12.42
14	15.86	19.38	22.99	26.68	30.46	34.33	38.28	42.33	46.47	50.70
15	55.03	59.45	63.98	68.60	73.32	78.14	83.06	88.09	93.23	98.47

Digitized by Google

Bei Temperaturen über 135 Grade wurden die Hunderte der Pfunde des Raumersparnißes halber nicht angesetzt; es ist daher zu den Zahlen in der Tafel, 100 hinzuzufügen. So findet man den Dampfdruck bei 128° *R.* gleich 109.06 W. Pfunde.

1241. Folgesatz. Man kann nun umgekehrt mittelst dieser Tafel die Temperaturen nach dem 80theiligen Lufttthermometer finden, bei welchen der Dampfdruck auf einen Wiener Quadratzoll eine gegebene Anzahl W. Pfunde beträgt, wie es folgende Tafel ausweiset.

Temperaturen nach dem 80theiligen Lufttthermometer, bei welchen ein in W. Pfunden gegebener Dampfdruck auf einen W. Quadratzoll Statt hat.

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	33.00	43.99	50.99	56.23	60.46	64.03	67.13	69.87	72.33
1	74.58	76.65	78.56	80.35	82.02	83.60	85.09	86.50	87.85	89.13
2	90.36	91.54	92.68	93.77	94.82	95.84	96.82	97.77	98.70	99.60
3	100.47	01.32	02.14	02.95	03.73	04.49	05.24	05.97	06.69	07.39
4	108.07	08.74	09.40	10.05	10.68	11.30	11.91	12.51	13.10	13.68
5	114.25	14.81	15.36	15.90	16.44	16.96	17.48	18.00	18.51	18.99
6	119.49	19.97	20.45	20.92	21.38	21.84	22.30	22.74	23.18	23.62
7	124.05	24.48	24.91	25.32	25.74	26.10	26.50	26.90	27.34	27.74
8	128.12	28.51	28.89	29.26	29.64	30.00	30.37	30.73	31.09	31.45
9	131.80	32.15	32.50	32.84	33.18	33.52	33.86	34.19	34.52	34.85
10	135.17	35.49	35.81	36.21	36.44	36.76	37.07	37.37	37.67	37.98
11	138.28	38.58	38.87	39.17	39.46	39.75	40.04	40.33	40.61	40.89
12	141.17	41.45	41.73	42.00	42.27	42.55	42.82	43.09	43.35	43.61

Z. B. ist der Dampfdruck 37, 85, 109, 126 W. Pfd. so ist die Temperatur 105.97, 130, 137.98, 142.82 Grade *R.*

1242. Anmerkung. Die Spannkraft, welche der Dampf in Berührung mit Wasser zeigt, ist die größte, welche er bei dieser Temperatur erlangen kann: denn durch Verminderung des Volums einer solchen Dampfmenge wird deren Spannkraft nicht weiter erhöht, sondern blos bewirkt, daß ein Theil der Dampfmenge sich wieder

Digitized by Google

in tropfbares Wasser von gleicher Temperatur verwandelt; es kann daher unter diesen Umständen auch die Dichtigkeit des Dampfes nicht zunehmen. Vergrößert man aber das Volum einer bestimmten in Berührung mit Wasser stehenden Dampfmenge, so geht ein Theil des tropfbaren Wassers in Dampf über, und die Spannkraft so wie auch die Dichtigkeit des Dampfes bleibt auf der früheren Größe. Nur wenn kein Wasser vorhanden ist, welches neuen Dampf erzeugen könnte, nimmt die Dichtigkeit des Dampfes und in Folge dessen auch seine Spannkraft bei Vergrößerung seines Volums ab: und umgekehrt, so lange eine Dampfmenge noch nicht ihre größte Spannkraft besitzt, so wird durch Verminderung ihres Volums sowohl ihre Dichtigkeit als ihre Spannkraft vergrößert.

1243 Anmerkung 2. Da der Uebergang des Wassers in Dampf und umgekehrt die Umwandlung des Dampfes in Wasser nicht augenblicklich vor sich gehen kann; so ist es allerdings möglich, daß bei plötzlichen Vergrößerungen des Dampfvolums nicht eben auch die Dampfmenge in gleichem Maße zunimmt, sondern ihre Dichtigkeit und Spannkraft für den Augenblick sich vermindert, und umgekehrt: wenn eine Dampfmenge eine plötzliche Verminderung des Volums erfährt, so kann ihre Dichtigkeit und Spannkraft für den Augenblick rasch zunehmen, ohne daß die Temperatur des Dampfes sich ändert. Die Erfahrung zeigt wirklich, daß Wasserdampf, welcher sich bei einer gewissen Temperatur in einem Dampfkessel gebildet hat, mithin das dieser Temperatur entsprechende Maximum seiner Dichtigkeit und Spannkraft besitzt, und hierauf ohne Wärme von außen erhalten oder Wärme an seine Umgebungen abtreten zu können, plötzlich in den Dampfcylinder geleitet wird, seine Dichtigkeit und Spannkraft ohne Verminderung der Temperatur zum Theil einbüßt, und umgekehrt, es kann bei den schnell auf einander folgenden Kolbenstößen einer Dampfmaschine in dem Dampfcylinder bei Verminderung des Dampfvolums eine Vergrößerung der Dichtigkeit und Spannkraft des Dampfes erfolgen ohne daß dessen Temperatur eine Aenderung erleidet.

Digitized by Google

1244. **Folgesatz.** Wenn also bei Berührung des Dampfes mit Wasser sich seine Temperatur und Spannung ändern, so muß man nothwendig auch auf eine Aenderung seines Volums schließen, sobald diese Aenderung plötzlich vor sich geht, daß der Dampf nicht Zeit hat, bei Verminderung seines Volums oder seiner Temperatur sich in Wasser zu verwandeln, und umgekehrt bei Vergrößerung desselben sich Wasser in Dampfgestalt anzueignen. Die Ausdehnung des Dampfes durch die Wärme ist neueren Versuchen zu Folge etwas kleiner als die der Luft (912) und beträgt bei seiner Erwärmung vom Eispunkte bis zum Siedepunkte des Thermometers blos 0.364 seines ursprünglichen bei 0° bestimmten Volums: wird diese Größe 0.364 durch 80 getheilt, so ergibt sich die Ausdehnung für eine Erwärmung des Dampfes um 1° *R.* gleich 0.00455, die wir α nennen wollen, und es geht ein bei 0 Grade gemessenes Dampfvolumen v_0 in $v=v_0(1+\alpha t)$ über, wenn die Temperatur auf t Grade gestiegen ist, ohne daß sich die Spannung des Dampfes geändert hat. Auf gleiche Weise erhält man ein Dampfvolumen v', das einer Temperatur t' zugehört, $v'=v_0(1+\alpha t')$; demnach wird $v : v'=1+\alpha t : 1+\alpha t'$. Ist aber p der Druck des Dampfes auf einen W. Quadratzoll bei t Graden; und p' dieser Druck bei t'; so wird nach dem Mariotte'schen Gesetze sofort auch $v : v'=p' : p$, daher wenn Spannung und Temperatur des Dampfes sich zugleich ändern

$$v : v'=p'(1+\alpha t) : p(1+\alpha t'), \text{ woraus sich}$$

$$v=\frac{v'p'(1+\alpha t)}{p(1+\alpha t')} \text{ ergibt.}$$

1245. **Anmerkung.** Man nennt **relatives Volumen** des Wassers den Raum, welchen es in Dampfgestalt einnimmt. Da das Wasser, wenn es unter dem Drucke der Atmosphäre oder von 12.797 Wiener Pfunden auf den Quadratzoll in Dampf von der Temperatur von 80° *R.* verwandelt wird, einen 1700mal größeren Raum einnimmt; so kann man leicht das Volumen eines und desselben Gewichtes ω Wasserdampf bei einem beliebigen Drucke p in W. Pfunden und der zugehörigen Temperatur t bestimmen, sobald man nur in (1244) ω statt v, 12.797 statt p', 80° *R.* statt t und 1700 statt v' setzt. Hiedurch wird

Digitized by Google

$$\omega = 1700 \times 12.797(1+\alpha t) : p \times 1.364,$$

oder nach vorgenommener Reduktion der numerischen Faktoren

$$\omega = 15949.3(1+0.00455t) : p$$

die Ergebnisse dieser Formel für Werthe von p zwischen 1 und 100 deren zugehörigen Temperaturen aus (1241) genommen werden müssen, enthält die nachstehende Tafel.

Tafel für das relative Volumen des Wasserdampfes, wenn dessen Druck in W. Pfunden auf den Quadratzoll gegeben ist.

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	18341	9571	6550	5007	4067	3433	2974	2627	2355
1	2136	1955	1804	1675	1564	1468	1383	1307	1240	1180
2	1125	1076	1031	989.3	951.3	916.2	883.7	853.5	825.4	799.2
3	774.7	751.7	730.0	709.7	690.5	672.3	655.2	638.9	623.5	608.8
4	594.8	581.5	568.8	556.6	545.0	533.9	523.3	513.1	503.3	493.8
5	484.8	475.1	466.6	459.6	451.8	444 3	437.0	430 0	423.3	416.7
6	410.2	404.2	398.2	392.4	386.8	381.4	376.1	371.0	366.0	361.2
7	356.4	351.9	347.4	343 1	338.8	334,7	330.7	326.7	322.9	316.6
8	312.0	308.6	305.2	301.9	298 6	295.5	292.4	289,3	286.4	283.5
9	280.7	277.9	275.2	272.5	269 9	267.3	264.8	262.4	260.0	257.6

1246. Folgesatz. Da sich die Dichtigkeiten verkehrt verhalten wie die Volumina, so liefern die reciproken Werthe der Zahlen dieser Tafel sofort die Dichtigkeiten des Wasserdampfes bei dessen Drucke in W. Pfunden auf den Quadratzoll, wenn die Dichtigkeit des Wassers =1 gesetzt wird.

Tafel für die Dichtigkeiten des Wasserdampfes in Millionteln der Einheit.

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0055	0104	0152	0200	0246	0291	0336	0381	0425
1	0468	0511	0554	0597	0639	0681	0723	0764	0806	0848
2	0887	0930	0970	1011	1051	1091	1132	1172	1211	1251
3	1291	1330	1370	1409	1448	1487	1526	1565	1604	1643
4	1681	1720	1758	1796	1835	1873	1911	1949	1987	2025
5	2063	2100	2137	2175	2213	2251	2288	2325	2362	2400
6	2437	2474	2511	2548	2585	2622	2659	2695	2732	2769
7	2805	2842	2878	2915	2951	2988	3024	3060	3097	3133
8	3169	3205	3241	3277	3313	3349	3385	3420	3456	3192
9	3527	3563	3599	3634	3670	3705	3741	3776	3811	3847

Digitized by Google

1247. Folgesatz 2. Multiplizirt man die Zahlen dieser Tafel mit 56.3708, so geben die Produkte das Gewicht eines W. Kubikfußes Dampf bei dessen in W. Pfunden gegebenen Drucke auf den Quadratzoll.

Tafel der Gewichte eines W. Kubikfußes Dampf in Zehntausendteln eines W. Pfundes.

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0.0031	0059	0086	0113	0139	0164	0190	0215	0239
1	0264	0288	0312	0336	0360	0384	0408	0431	0455	0478
2	0501	0524	0547	0570	0593	0615	0638	0660	0683	0705
3	0728	0750	0772	0794	0816	0838	0860	0882	0904	0926
4	0948	0969	0991	1013	1034	1056	1077	1099	1120	1141
5	1163	1184	1205	1226	1248	1269	1290	1311	1332	1353
6	1374	1395	1416	1436	1457	1478	1499	1519	1540	1561
7	1581	1602	1623	1643	1664	1684	1705	1725	1746	1766
8	1786	1807	1827	1847	1867	1888	1908	1928	1948	1968
9	1988	2009	2029	2049	2069	2089	2109	2129	2149	2169

Man kann demnach mittelst dieser drei Tafeln für jeden Werth von p in Pfunden sowohl das Volumen v und die Dichtigkeit δ, als auch das Gewicht γ' eines W. Kubikfußes Wasserdampf bestimmen.

Z. B. für $p=17$ Pfund wird $v=1307$, $\delta=0.000764$, $\gamma'=0.0431$

$p=83$ — $v=301.9$, $\delta=0.003277$, $\gamma'=0.1847$.

1248. Folgesatz 3. Dividirt man den Druck auf die Flächeneinheit mit dem Gewichte der kubischen Einheit des Wasserdampfes; so ergibt sich die auf sein Gewicht bezogene Kraft des Dampfes. Folgende Tafel liefert die Kraft, welche ein Wiener Kubikfuß Wasserdampf auf die Fläche eines Quadratfußes äußert, wenn p oder der Druck auf einen Wiener Quadratzoll dieses Dampfes in Wiener Pfunden gegeben ist. Ist nämlich der Druck p auf einen Quadratzoll 100 Pfunde, so ist derselbe auf einen Quadratfuß 14400 Pfunde, und das Gewicht eines Kubikfußes Dampf ist dann 0.21884 Pfunde; demnach $14400 : 0.21884 = 65800$.

Digitized by Google

p	Druck	p	Druck	p	Druck	p	Druck	p	Druck
2	48896	22	57908	42	61029	62	63071	82	64634
4	51166	24	58310	44	61265	64	63244	84	64775
6	52612	26	58692	46	61492	66	63414	86	64914
8	53695	28	59040	48	61710	68	63577	88	65050
10	54568	30	59367	50	61922	70	63738	90	65184
12	55305	32	59678	52	62129	72	63898	92	65314
14	55948	34	59972	54	62328	74	64051	94	65433
16	56517	36	60251	56	62521	76	64199	96	65557
18	57028	38	60517	58	62711	78	64345	98	65680
20	57489	40	60773	60	62894	80	64490	100	65800

Ist z. B. $p=24$ Pfunde; so wird jeder Quadratfuß Fläche mit einem 58310fachen Gewichte eines Kubikfußes Dampf gedrückt: ist aber $p=100$ Pfunde, so beträgt der Druck auf einen Quadratfuß das 65800fache des Gewichts des Dampfes.

1249. Anmerkung. *Pambour* setzt für das relative Volumen ω den Ausdruck $\omega=10000:(A+Bp)$, und bestimmt die Koeffizienten A, B mittelst der Zahlen der Tafel (1245). Aus dieser Annahme folgt nämlich die Gleichung $\omega(A+Bp)=10000$; nun ist für $p=10$, $\omega=2136$, und für $p=20$, $\omega=1125$; man hat also die Gleichungen

$$A+10B=10000:2136=4.6816 \text{ und}$$
$$A+20B=10000:1125=8.8888$$

der Unterschied dieser Gleichungen gibt

$10B=4.2072$, mithin $B=0.4207$, und $A=0.4744$.

Kombinirt man mehrere Zahlen dieser Tafel, so ergibt sich genauer $A=0.4227$, $B=0.4159$, somit

$$\omega=\frac{10000}{0.4227+0.4159p}=\frac{1}{m+np}$$

wo $m=0.00004227$, $n=0.00004159$.

Eben so ergibt sich für größere Drücke des Dampfes

$$A+50B=20.627,\ A+60B=24.378$$

woraus $A=1.872$, $B=0.375$ folgt.

Digitized by Google

1250. Erklärung. Diejenige Wärmemenge, welche erfordert wird, um eine Quantität Wasser in Dampf von gleicher Temperatur zu umwandeln, heißt dessen Verdunstungswärme. Die Einheit derselben ist die Wärmemenge, welche nöthig ist, um 1 Pfund Wasser von 0° bis 1° *R.* zu erwärmen, man nennt sie Kalorie. Versuche zeigen, daß die Wärmemenge, welche ein Quantum siedenden Wassers in gleich heißen Dampf verwandelt, das 440fache Gewicht Wasser von 0° bis 1° *R.* erwärmt haben würde. Man drückt dieses Ergebniß kurz so aus: Die Verdunstungswärme des siedend heißen Wassers beträgt 440 Kalorien. Der physikalische Apparat, mittelst welchen bei Erwärmung verschiedener Stoffe die Anzahl Kalorien beobachtet wird, heißt der Kalorimeter.

1251. Anmerkung. Nach Versuchen von Lavoisier, Wollasten und anderen werden von einem Wienerpfunde Brennstoffes die in folgender Tafel aufgezeichneten Kalorien entbunden:

Trockene Holzkohle 3222, gewöhnliche Holzkohle 2742, reine Coaks (Kokes) 3220, Steinkohle erster Qualität 3220, Steinkohle zweiter Qualität 2900, dritter Qualität 2710, am Feuer getrocknetes Holz 1675, lufttrockenes Holz 1345, bester Torf 1370, gewöhnlicher Torf 685 Kalorien. Diese Resultate erhält man aber bei vollkommener Verbrennung: in der Ausübung kann man jedoch etwa $^1/_2$ bis $^2/_3$ dieser Größen gelten lassen.

1252. Anmerkung 2. Ferner gibt die Erfahrung, daß man zur Verbrennung von einem W. Pfund Kohle 177 Kubikfuß atmosphärischer Luft bei mittlerer Temperatur und mittlerem Drucke braucht: in der Ausübung muß man aber wegen der Unvollkommenheit der Feuerungen auf das Doppelte oder Dreifache dieser Luftmenge für die vollständige Verbrennung rechnen. Auch ist es nicht gleichgültig, ob die Verbrennung rasch oder langsam vor sich geht: wird nämlich das Feuer schlecht unterhalten, d. i. wenn die Kohlenschichte auf dem Roste zu dick ist, und nicht gehörig zum Durchfallen gebracht wird, so kann der Effekt auf $^5/_6$ desjenigen bei einer gut unterhaltenen Feuerung herabsinken. Ueberdies hängt der Effekt der Verbrennung einer Gewichtseinheit Brennstoffes von der

Digitized by Google

Konstruktion des Kessels ab, in welchen das Wasser zur Verdampfung gebracht wird. Ein solcher Kessel muß die größtmögliche Oberfläche dem Feuer darbieten, auch kommt viel darauf an, daß der Boden desselben nicht übermäßig dick ist und etwa darin eine Schichte Pfannenstein sich gebildet hat.

2. Der Dampfwagen.

1253. Erklärung. Der Dampfwagen oder die Lokomotive besteht gewöhnlich aus einem sechsrädrigen Wagen der eigentlichen Lokomotive, dessen beide mittlere Räder vom größerem Durchmesser sind als die vier äußeren, und Treibräder heißen, auf welchem alle Theile einer Dampfmaschine ihren Platz finden, und aus einem vierrädrigen Munitionswagen, auf welchem das zur Feuerung erforderliche Holz oder Steinkohlen, und das für eine bestimmte Zeit zum Nachfüllen des Dampfkessels ausreichende Wasserquantum untergebracht sind.

1254. Erklärung. Die Haupttheile der Dampfmaschine an einer Lokomotive sind: der Feuerherd oder die Esse und der Dampfkessel, welche die Art der Dampfbildung bestimmen, dann die Schieberventile und der Dampfcylinder, vermittelst welcher die Spannkraft des Dampfes in Thätigkeit kommt, endlich die Kurbeln und Treibräder, durch welche die Bewegung von den Kolben der Dampfcylinder auf die Lokomotive selbst übertragen wird.

1255. Erklärung. Die Esse ist der Raum *A* (Fig. 302) im Längendurchschnitte und (Fig. 303) im Querdurchschnitte, und besteht aus dem eigentlichen Feuerherde oder der Feuerkammer, in welcher das Brennmateriale untergebracht wird, dem aus 18 Stäben von Gußeisen gebildeten Roste *aa*, durch welchen die Asche herabfällt und dessen Zwischenräume immer offen bleiben, damit die zur Verbrennung erforderliche Luft (1252) in die Esse treten kann, und dem Aschbehälter *b*. Die Feuerkammer wird von Außen durch eine Thüre *c* verschlossen, und liegt zwischen doppelten Wänden eines viereckigen Kastens, welche mit dem Kessel in Verbindung

Digitized by Google

stehen, daher stets mit Wasser angefüllt sind: hiedurch wird die freie Wärme, welche durch Verbrennung des Materials entbunden wird, lediglich zur Verdampfung des Wassers im Kessel verwendet. Vor der Thüre *c* liegt auf der Maschine eine starke eiserne Platte, worauf sich der Führer der Lokomotive stellt, und unmittelbar hinter derselben folgt der Munitionswagen mit Wasser und Kohlen, so daß der Führer durch die Thüre *c* leicht Kohlen in die Esse werfen und auf eine weiter unten anzugebende Art Wasser in den Kessel lassen kann.

1256. **Erklärung.** Der Kessel einer Lokomotive bildet einen hohlen Cylinder von $3^1/_2$ Fuß Durchmesser und $7^1/_2$ Fuß Länge: dieser Raum ***BCDEFGHI*** (Fig. 302) und ***DG*** (Fig. 303) besteht aus zusammengenietheten $^1/_3$ Zoll starken Eisenplatten und ist zur Vermeidung der Abkühlung durch die äußere Luft, größtentheils mit einem Mantel von gefederten tannenen Bretern umgeben, die durch eiserne Bänder zusammengehalten werden. Wir unterscheiden am Kessel den Obertheil und den Untertheil: jener ragt über die Feuerkammer hinaus und bildet mit seinem Boden ***BC*** (Fig 302), und ***BB'*** (Fig. 303) die obere Decke derselben, dieser hingegen fängt an der hintern Wand ***CD*** (Fig. 302) der Feuerkammer an, und enthält eine große Anzahl Röhren wie *e'e''*, die Heitzröhren, vom zusammengelötheten Messingblech, mit zwei Zoll äußerem und $1^2/_3$ Zoll innerem Durchmesser, welche der ganzen Länge nach durch den Kessel fortlaufen, in der vertikalen Wand der Rauchkammer ***K*** münden, und die einzige Verbindung zwischen dieser und der Feuerkammer bilden. Durch diese isolirt stehende Röhren streicht die Flamme, und es entweicht die verzehrte Luft, der Rauch, in die Kammer ***K***.

1257. **Folgesatz.** Wird der Kessel bis an die Linie *dd'* mit Wasser gefüllt erhalten, so füllen sich alle Räume, welche die Feuerkammer umgeben mit Wasser, und es kann keine Wärme entweichen, ohne Dampf zu erzeugen: hierbei leistet diese Einrichtung des Kessels noch den schätzbaren Vortheil, daß die Röhren eine viel

Digitized by Google

größere Oberfläche dem Feuer darbieten als außerdem es bei einem Kessel von gewöhnlicher Konstruktion möglich wäre.

1258. Anmerkung. Die größte Schwierigkeit beim Bau dieser Art Kessel besteht in der dampfdichten Verbindung so vieler engen Röhren mit ihren Enden in den beiden vertikalen Bodenplatten des Kessels, deren eine denselben von der Feuerkammer, die andere von der Rauchkammer scheidet: weil diese Röhren so nahe bei einander liegen, daß sie nicht wie die anderen Theile des Kessels zusammengenietet werden können. Gewöhnlich wird hierbei so verfahren: nachdem in den Bodenplatten die korrespondirenden Löcher zur Aufnahme der Röhren mittelst eines Prägewerks ausgeschnitten sind, und der Kessel verbunden ist, werden die ziemlich scharf in die Löcher passenden Röhren eingezogen, und die Enden derselben so abgekürzt, daß sie nicht über die Bodenplatten vorstehen. Darauf wird gleichzeitig in beide Oeffnungen jeder Röhre ein stählerner Ring, der hinten etwas stärker ist als vorn, mit Gewalt eingeschlagen, so daß die Seitenwände der Röhren fest gegen den Rand der Oeffnungen gepreßt werden: der noch vorstehende Rand des Ringes wird aber mit einem runden Hammer so lange übergetrieben, bis er einen Ansatz auf der Bodenplatte bildet, und das Kopfende der Röhre überdeckt.

1259. Erklärung. Der Obertheil des Kessels *FGHIBC* (Fig. 302) besitzt bei *H* eine erhöhete Kuppel vom gehämmerten Kupferblech, innerhalb welcher eine weite knieförmig gebogene Röhre *HLM*, die Dampfröhre, einmündet, nach der ganzen Länge des Kessels fortläuft, und bei ihrer Ausmündung *M* sich in zwei Arme theilet, deren eine Arm *Ml* in der Figur sichtbar ist, durch welche der Dampf in die zu beiden Seiten der Lokomotive in einer geneigten Lage befestigte Cylinder *V* geleitet wird. Die Dampfröhre kann durch einen an dem Buge *L* befindlichen Hahn, den Regulator, dessen Griff *T* ganz außerhalb des Kessels sich befindet, geöffnet oder gesperrt werden, und je nachdem dieser Hahn mehr oder weniger gedreht wird, so wird dem Dampfe ein mehr oder weniger freier Durchgang gestattet.

Digitized by Google

1260. Folgesatz. Sobald also der Dampf in großer Masse im Kessel erzeugt wird, und nirgends entweichen kann, so nimmt er eine beträchtliche Spannung an, und wenn man alsdann den Hahn L öffnet, so tritt er durch die Oeffnung H, welche hoch über dem Wasserspiegel des Kessels liegt, in die Dampfröhre und gelangt so in die beiden Dampfcylinder. Der Eintritt in die Dampfröhre geschieht absichtlich in einer erhöhten Kuppel H, damit das im Kessel beim Sieden aufwallende und von der Lokomotive in eine wellenförmige Bewegung gesetzte Wasser im Kessel, ja nicht bis zur Mündung H steigen kann.

1261. Erklärung. Die Dampfcylinder V (Fig. 302) sind von Gußeisen haben 11 Zoll lichten Durchmesser und 14 bis 18 Zoll Kolbenhub: sie liegen zu beiden Seiten der Lokomotive, horizontal, oder in einer etwas geneigten Stellung, so daß das Ende, durch welches der Kolben auf- und niedergeht tiefer liegt, als der geschlossene Boden. Ueber jeden derselben, und mit ihm aus einem Stücke gegossen, befindet sich eine Kammer ghi (Fig. 304) die Dampfkammer, welche mittelst der Röhre l mit der Dampfröhre in Verbindung steht, und bei i eine Stopfbüchse besitzt, in welcher die Schieberstange NW dampfdicht hin und her sich schieben läßt. Mit dieser Stange ist ein kleineres Gehäuse N, der Schieber verbunden: dies ist ein Würfel ohne Boden, aber mit vorstehenden Rändern, welche eben abgeschliffen sind, und blos durch den Druck des eindringenden Dampfes an die gleichfalls eben abgeschliffene Seite des Dampfcylinders so angedrückt werden, daß der in dem Gehäuse aufsteigende Dampf nirgends entweichen kann, als durch die Oeffnung e, von welcher die Röhre f (Fig. 302) aufsteigt. Der Dampfcylinder ist an derselben Seite, wo der bewegliche Schieber hin und her geht, mit zwei Kanälen 1 und 2 durchbohrt, welche man Dampfwege nennt, und man unterscheidet sie mit dem Namen Durchgang 1 und Durchgang 2; sie können durch die beweglichen Schieber wechselweise offen gelassen oder verdeckt werden. Der Kolben U des Dampfcylinders bewegt sich aber dampfdicht im Raume V zwischen den inneren Rändern der beiden Dampfwege,

Digitized by Google

und dessen Stange, die Kolbenstange geht ebenfalls dampfdicht in der Stopfbüchse *k* des Cylinders. Ein Kolbenhub ist daher um die Breite der beiden Dampfwege kleiner als die Länge des Cylinders, diesen Unterschied nennt man dessen schädlichen Raum.

1262. Aufgabe. Die hin- und hergehende Bewegung der Kolbenstange zu erklären.

Auflösung. Sobald der Dampf nach der in (Fig. 302) durch Pfeile angedeuteten Richtung aus der Dampfröhre *HM* in die Dampfkammer gelangt; so steht ihm in der hier angegebenen Lage des Schiebers der Durchgang 1 nach dem Cylinder offen, er breitet sich daher im Raume *V* aus und bewegt den Kolben *U* nach der Richtung des Pfeiles gegen den Boden des Cylinders: in dem folgenden Augenblicke wird der Schieber *N* vermittelst der Stange *NW* gegen *E* hin bewegt, so daß er in die Stellung *N'* gelangt, wodurch der Durchgang 1 gesperrt, und der Durchgang 2 geöffnet wird, mithin wird der Kolben *U* durch den Eintritt des Dampfes in entgegengesetzter Richtung bewegt: während der im Raume *V* des Cylinders vorhandene Dampf durch die Oeffnung *c* in die Röhre *f* tritt, welche ihn in den Schornstein leitet. Hierauf kommt der Schieber abermals in seine frühere Stellung *N* und das Kolbenspiel wiederholt sich in derselben Ordnung.

1263. Anmerkung. Der Uebergang aus der einen Lage des Gehäuses *N* in die andere *N'* geschieht nur stufenweise, und da die Breite desselben genau dem Abstande der Wege 1, 2 (Fig. 305) gleich ist; so muß es nothwendig, wenn sich dasselbe bei seiner Bewegung in der Mitte befindet, auf einen Augenblick beide Dampfwege zugleich verschließen: dieses trifft gerade in dem Augenblicke ein, worin der Kolben *U* die Richtung seiner Bewegung verändert, und also der Dampf in seiner Kraft nachzulassen hat.

1264. Erklärung. Damit die Lokomotive bei ihrer Bewegung nicht von den über dem Boden erhöht liegenden Bahnschienen herunterglitten kann, so haben ihre Räder an der inneren Seite einen vorspringenden Rand, welcher der Spurkranz heißt; damit aber dieser Spurkranz sich nicht fortwährend an den Seitenflächen

Digitized by Google

der Schienen reibt, sind die Flächen der Räder, mit welchen sie auf den Schienen ruhen, nicht genau cylindrisch, sondern etwas konisch gemacht, so daß der größere Durchmesser zunächst an dem Spurkranze liegt, und wenn der Wagen z. B. etwas zu weit rechts gedrängt wird, so rollt das rechte Rad auf einem Kreisumfange vom größeren Durchmesser fort, als das Rad auf der linken Seite, und durchläuft daher in derselben Zeit einen längeren Weg, wodurch der Wagen bald wieder in dessen mittlere Lage zurückgebracht wird. Sämmtliche Räder einer Lokomotive sind von Gußeisen und sitzen auf ihren Axen fest, so daß sich diese mit den Rädern zugleich drehen, und in eigenen Pfannen des Wagengestelles ihre Stütze erhalten.

1265. Erklärung. Die Axe der Treibräder wollen wir die Radaxe, und das Prisma, woraus die an dieser Axe angebrachten Krummzapfen bestehen die Kurbelaxe nennen.

1266. Erklärung. Die Radaxe besitzt zwei in gleichen Abständen von den Treibrädern gelegene Krummzapfen, deren Ebenen einen rechten Winkel mit einander bilden. Ist (Fig. 306) A der Krummzapfen des linken Treibrades in jener Stellung, da der Zapfen die größte Entfernung von einer durch die Radaxe BB' gezogenen vertikalen Ebene besitzt, so stellt A' die Lage des Krummzapfens des rechten Treibrades vor, welcher sonach in die genannte vertikale Ebene selbst fällt: während in (Fig. 307) wenn der erste Krummzapfen A in diese Ebene zu stehen kommt, der andere A' seine größte Entfernung von derselben erlangt.

1267. Folgesatz. Da es in dem Umlaufe der Kurbel zwei Lagen derselben gibt, in welchen die auf sie wirkende hin und her ziehende Kraft sie eben sowohl weiter als zurückdrehen könnte, nämlich wenn der Kurbelarm in der Richtung der einwirkenden Kraft liegt; so übt bei dieser Einrichtung die eine Kurbel immer ihre volle drehende Kraft aus, wenn die drehende Kraft der andern Null geworden ist, wodurch die Kraft der Maschine, in welcher die beiden Treibräder sammt ihrer Axe und den beiden Krummzapfen eine Masse bilden, nahe ungeändert bleibt.

Digitized by Google

1268. Folgesatz 2. Um also durch die hin- und hergehende Bewegung der Kolbenstange Vk (Fig. 302) den Treibrädern eine rotirende Bewegung zu ertheilen, braucht man nur eine bei n mit einer Büchse versehene Zugstange mn durch ein Charnier m mit der Kolbenstange zu verbinden, und dabei die Büchse einer jeden der beiden Zugstangen über die zugehörenden Krummzapfen gehen zu lassen; so muß die in Bewegung gesetzte Kolbenstange die beiden Treibräder eben so fortbewegen, wie ein Wagen, dessen Räder durch Eingreifen in die Speichen gedreht werden, in Bewegung gebracht wird.

1269. Erklärung. Man nennt Schiebersteuerung die Art und Weise, wie die Schieberstange NW (Fig. 302) eine hin- und hergehende Bewegung durch die Maschine selbst erhält. Zu dem Ende befinden sich an der gut abgedrehten Axe des Treibrades bei D und D' (Fig. 306 und 307) zwei excentrische Scheiben, welche mit der Schieberstange NW (Fig. 308 und 309) mittelst eines Hebels WW', der seinen Drehpunkt in X hat, durch eine Lenkstange ZW verbunden sind. Die letztgenannten Figuren zeigen die Längenansicht dieser Verbindung, wobei O den Mittelpunkt der Radaxe, n den Mittelpunkt der excentrischen Scheibe, und C den Mittelpunkt der Kurbelaxe bedeutet. Insbesondere bezieht sich (Fig. 308) auf die Stellung der Schieberstange, wo der Durchgang 2 offen steht, und man sieht aus dieser Einrichtung, daß wenn sich die Radaxe umdreht die excentrische Scheibe mit fortgeführt wird, welches durch den die Scheibe umgebenden metallenen Ring mm, worin sich die excentrische Scheibe mit sanfter Reibung dreht, hervorgebracht wird: hiedurch muß bei jeder Umdrehung des Rades der Punkt n einen Kreis um O beschreiben, und es kommt bei dieser Bewegung der Punkt n nach und nach von der Rechten zur Linken des Punktes O, also muß auch die mit dem Schieberventil in Verbindung stehende Stange WN hin und her bewegt werden. Die Figur 309 deutet die Stellung der excentrischen Scheibe an, wo das bewegliche Schiebergehäuse gerade in der Mitte seines Weges sich befindet.

1270. Folgesatz. Da ferner der Punkt C das Ende der durch den Kolben in Bewegung gesetzten Kurbel bezeichnet, so ist klar,

Digitized by Google

daß wenn der Dampf den Kolben von dem einen bis zum andern Ende des Cylinders treibt, und diese Kurbel eine halbe Umdrehung macht, die Axe O auch eine halbe Umdrehung zurücklegt; folglich beschreibt der Punkt n um diesen Punkt O einen Halbkreis und es treibt die excentrische Scheibe zu gleicher Zeit den Hebel WW' aus einer seiner äußersten Lagen in die andere. Dadurch öffnet das Schieberventil dem Dampfe den Zutritt zu der entgegengesetzten Seite des Kolbens: dieser bewegt sich also zurück und die Kurbelaxe macht eine neue halbe Umdrehung, wodurch es wieder in seine ursprüngliche einem neuen Kolbenlaufe entsprechende Lage zurückgeführt wird.

1271. Folgesatz 2. Man sieht, daß die excentrische Scheibe hier ganz die Wirkung einer gewöhnlichen Kurbel hervorbringt, um die kreisförmige Bewegung der Radaxe in eine hin- und hergehende Bewegung des Schiebers zu verwandeln: wogegen die Kurbel die hin- und hergehende Bewegung der Kolbenstange in eine drehende Bewegung der Radaxe umformt.

1272. Erklärung. Die excentrischen Scheiben besitzen an ihrer vertikalen ebenen Fläche zwei Löcher oder Augen o, o' (Fig. 306 und 307), welche zur Aufnahme der an der Radaxe befestigten Zapfen r und r' dienen, die man die Direktoren der Bewegung nennt: denn mittelst derselben erhält die Scheibe ihre sichere Lage an der Radaxe, und so lange die Stellung dieser Zapfen nicht geändert wird, findet die Bewegung der Lokomotive stets nach einer Richtung Statt: verwechselt man aber die Angriffspunkte dieser Zapfen, welches mittelst eines zum Maschinenführer reichenden Hebels gerichtet werden kann, so nimmt die Lokomotive sofort die entgegengesetzte Richtung, und bewegt sich rückwärts statt vorwärts.

1273. Anmerkung. Es ist nicht schwer die Lage zu finden, welche die excentrische Scheibe sowohl für die vorwärts- als rückwärtsgehende Bewegung einer Lokomotive auf der Axe haben muß. Wenn nämlich einer der beiden Kolben sich in der Mitte des Dampfcylinders befindet, während in demselben Augenblicke die Kurbel no, auf welche die Kolbenstange wirkt, gerade senkrecht über der Axe steht, wie in Fig. 302, so ist klar, daß wenn sie sich vorwärts be-

Digitized by Google

wegen soll, der Dampf den Kolben in demselben Sinne bewegen muß, denn alsdann bewegt dieser Kolben die Kurbel und folglich auch die Räder in derselben Richtung mit sich fort. Alsdann muß das Schieberventil den Weg 1 öffnen, wozu erfordert wird, daß der größere Halbmesser der excentrischen Scheibe (Fig. 308) horizontal und hinter der Axe liegt, demnach muß der Direktor der Bewegung die Scheibe in dieser Lage befestigen. Im Gegentheil muß zur rückwärtsgehenden Bewegung der Lokomotive der Dampf im Augenblicke des Senkrechtstehens der Kurbel *no* (Fig. 306) auf die entgegengesetzte Seite des Kolbens gelangen können, oder es muß ihm der Weg 2 offen stehen, also die Scheiben eine der vorigen entgegengesetzte Lage haben, in welcher nämlich ihr größere Halbmesser in horizontaler Richtung vor der Axe liegt, da dann in dieser Lage die Scheibe von ihrem Direktor der Bewegung sofort gesichert werden kann.

Beide Direktoren stehen sowohl unter sich als auch gegen die Kurbeln der Axe rechtwinklig, und es entspricht der eine *r* der vorwärtsgehenden der andere *r'* der retrograden Bewegung der Lokomotive. In den neueren Maschinen gibt es statt zwei, vier excentrische Scheiben, nämlich zwei für die eine, zwei für die andere Bewegung, und man läßt die ersteren oder letzteren Scheiben eingreifen, je nachdem man die Lokomotive vor- oder rückwärts bewegen will, wodurch die Direktoren entbehrlich werden.

1274. Erklärung. Außer den bisher beschriebenen **Grundbestandtheilen einer Lokomotive**, welche zu ihrer Bewegung wenn auch nur auf eine kurze Zeit unerläßlich sind, gibt es noch mehrere **Nebenbestandtheile** die auf die Dauer der Bewegung und Sicherheit einen Einfluß nehmen. Um in einem Augenblicke die Spannung des Dampfes im Kessel zu erfahren, dient das Luftmanometer, das Hebermanometer und das Elaterometer: um diesen Dampf nicht überhand nehmen zu lassen, wodurch die Gefahr des Zerspringens des Kessels herbeigeführt werden könnte, werden die sogenannten Sicherheitsventile am Kessel angebracht, um endlich den Wasserstand im Kessel stets auf gleicher Höhe zu erhalten, werden Saugpumpen vorgerichtet, welche durch den Kolben des Dampfcylinders selbst in Bewegung gesetzt, das Wasser aus

dem Munitionswagen dem Kessel zuführen, und zur Reinigung des Kessels dient das Mannsloch.

1275. Erklärung. Das Luftmanometer besteht aus einer gläsernen Röhre, die sich beiderseits in eine Kugel endiget, deren untere mit Quecksilber gefüllt ist. Diese Röhre AB (Fig. 296) ist sammt den beiden Kugeln in ein metallenes Gefäß DEF so gefaßt, daß eine ebene Scheidewand DF, durch welche die Röhre dampfdicht hindurchgeht, das Gefäß in zwei Räume abtheilet, deren der obere Luft, der untere aber, weil er mit dem Dampfkessel einer Lokomotive in Verbindung gebracht wird, den zu prüfenden Dampf enthält. Dieser Dampf steigt durch eine Oeffnung C in den unteren Raum des Gefaßes und äußert seinen Druck auf das Quecksilber der Kugel A durch eine haarkleine Oeffnung, welche am tiefsten Punkte der Kugel sich befindet, und aus welcher das Quecksilber, eben weil sie fein ist, nicht herausfließen kann. Der obere Theil des Gefäßes besitzt seiner Länge nach einen Ausschnitt $aabb$, um den jedesmaligen Stand des Quecksilbers im Momente beobachten zu können. Der untere Theil des Gefäßes wird vermittelst einer beweglichen Schraubenmutter auf einem an dem Kessel der Lokomotive befindlichen Aufsatze befestiget.

1276. Aufgabe. Aus dem beobachteten Stande des Quecksilbers im Manometer, welcher einer Spannung des Dampfes in der Lokomotive entspricht, diese Spannung selbst zu bestimmen.

Auflösung. Durch das Kalibriren des Instrumentes läßt sich leicht eine Röhrenlänge L vom gleichen Querschnitte mit der Röhre desselben angeben, deren Inhalt der Summe der Inhalte beider Kugeln und dem zwischenliegenden Röhrenstücke des Instrumentes gleich kommt: heißt nun p der Druck der Atmosphäre auf die Flächeneinheit, h der Stand des Quecksilbers über den tiefsten Punkt A der Kugel, wenn dasselbe blos den atmosphärischen Druck auszuhalten hat, H der Stand, wenn der Dampfdruck P wirkt, so hat man

$$P = H + (p - h)(L - h) : (L - H).$$

Beweis. Die Luft im Raume oberhalb des Quecksilbers hat

einen Inhalt $L—h$, bei dem gewöhnlichen Luftdrucke $p—h$, und wird auf den Raum $L—H$ zusammengepreßt, wenn der Dampfdruck auf die Größe $P—H$ steigt; mithin ist dem Mariotte'schen Gesetze gemäß

$$P—H : p—h = L—h : L—H$$

woraus sich sofort P wie oben ergibt.

1277. Folgesatz. Um die Skale am Instrumente anzufertigen, muß man vorerst die Stelle c am Instrumente bemerken, bei welcher das Quecksilber unter dem gewöhnlichen Luftdrucke p stehen bleibt, setzt man $Ac=h$, so findet man aus der obigen Gleichung die Stelle x, oder $Ax=H$, wenn der Dampfdruck die Größe P erreicht hat, nämlich

$$H=\tfrac{1}{2}(P+L)—\tfrac{1}{2}\sqrt{[(L—P)^2+4(L—h)(p—h)]}$$

macht man in dieser Gleichung nach einander, $P=2p$, $P=3p$, $P=4p$ u. s. f. so ergibt sich der diesen Werthen von P entsprechende Werth von H, die man sofort auf der nebenstehenden Skale auftragen kann.

1278. Anmerkung. Das Luftmanometer ist transportabel und sehr bequem; es hat gewöhnlich nur eine Länge von 10 Zoll und einen Durchmesser von 1 Zoll, und läßt sich ohne Schwierigkeit an allen Dampfmaschinen anbringen: aber seine Skale muß mit der größten Sorgfalt eingetheilt sein, und es muß auch, um sich zu versichern, daß keine Feuchtigkeit in das Innere des Instrumentes gedrungen ist, welche die Angaben des Instrumentes völlig unsicher machen würde, von Zeit zu Zeit mittelst des schon (1236) beschriebenen Hebermanometers geprüft werden.

1279. Aufgabe. Die Skale am Hebermanometer zu verzeichnen.

Auflösung. Zum Behufe der Beobachtung der Spannkraft des Dampfes in den Kesseln der Dampfmaschinen besitzt das Hebermanometer (1236) im längeren Schenkel bC (Fig. 301) einen metallenen Schwimmer, der stets auf der Oberfläche des Queck-

Digitized by Google

silbers aufliegt, und durch einen feinen über die Rolle p geführten Metalldraht mit einem Gewicht G den Weiser verbunden ist, das auf- und niedersteigt, je nachdem die Oberfläche des Queckſilbers in jenem Schenkel der Röhre ſinkt, oder aber ſich erhebt. Wird nun auf die vorgeſchriebene Art das Inſtrument der Wirkung des Dampfes in einem Keſſel ausgeſetzt, und es ſinkt der Spiegel des Queckſilbers im kürzeren Schenkel der durchgängig gleichweiten Röhre um $MX' = x$, ſo ſteigt es im längeren Schenkel um $mX = MX'$, mithin iſt $2x$ die Länge der Queckſilberſäule, welche nebſt dem Drucke der Atmoſphäre der Spannung des Dampfes im Keſſel und der Waſſerſäule MX' das Gleichgewicht hält. Heißt alſo p der Barometerſtand, P der Dampfdruck auf die Querſchnittsfläche der Röhre und δ das ſpezifiſche Gewicht des Queckſilbers in Beziehung auf das Waſſer, ſo hat man die Gleichung

$$p + 2x\delta = P - x,$$ woraus ſich $P = p + x(1 + 2\delta)$ ergibt.

Wenn in einem anderen Falle P' den Dampfdruck, und x' die Länge der Waſſerſäule vorſtellt, ſo erhält man

$$P' = p + x'(1 + 2\delta),$$ alſo auch $P - p : P' - p = x : x'$

d. i. die um den atmoſphäriſchen Druck verminderten Drückungen des Dampfes verhalten ſich wie die Längen der Waſſerſäulen im kürzeren Schenkel der Röhre, oder auch wie die vom Weiſer zurückgelegten Wege. Gewöhnlich graduirt man die Skale des Hebermanometers ſo, daß daraus der jedesmalige Druck des Dampfes in irgend einer Gewichtseinheit auf den Quadratzoll entnommen werden kann; ſetzt man alſo an den Punkt M, wo das Queckſilber unter dem Drucke der Atmoſphäre ſtehen bleibt $12^3/_4$, und in einer Entfernung von dieſem Punkte $x = p : 1 + 2\delta$ die Zahl $25^1/_2$, und theilt den Abſtand x beider Punkte in 51 gleiche Theile, ſo erhält man die Theilungspunkte an der Skale, welche dem um $^1/_4$ Wiener Pfund zunehmenden Dampfdrucke entſprechen, und die ſofort bis zum tiefſten Punkte der Röhre aufgetragen werden können.

Digitized by Google

1280. **Anmerkung.** Das Hebermanometer dessen Länge über 12 Fuß steigt, ist wenigstens wenn es zur Messung hoher Spannungen des Dampfes bestimmt ist, nicht transportabel, sondern es muß an dem Orte, wo es einmal aufgestellt ist, unverrückbar stehen bleiben, es kann sonach eine Lokomotive auf ihrer windschnellen Reise nicht begleiten: doch leistet es treffliche Dienste anderweitige Vorrichtungen z. B. das Luftmanometer zu rektifiziren.

1281. **Erklärung.** Ein **Thermomanometer** ist nichts anderes als ein gewöhnliches Thermometer, welches in einer ähnlichen Fassung enthalten ist, wie das Luftmanometer (1275), und dessen Kugel in dem Kessel, vermittelst einer beweglichen Schraubenmutter befestiget wird, die Röhre aber außerhalb desselben zur Schau des Führers vorliegt. Ein anderweitiger Unterschied desselben vom Thermometer ist der, daß statt der Temperaturgrade an der Skale überall der Dampfdruck auf den Quadratzoll vorgemerkt ist. Die Figur 310 gibt eine Abbildung dieser Vorrichtung.

1282. **Erklärung** Das **Elaterometer** oder wie man es auch zu nennen pflegt, das **Spiralmanometer** oder **Indikator** besteht aus einem kleinen kupfernen Cylinder von denselben Dimensionen, wie die Einfassung der beiden vorhergehenden Manometer. Innerhalb befindet sich ein Kolben P (Fig. 311), welcher sich in dem Cylinder auf- und abbewegen läßt, und dessen untere Fläche genau einen Quadratzoll messen muß. An seiner oberen Fläche ist ein Stab t, der vermittelst einer metallenen Scheibe cc, mit der er fest verbunden ist, in der Richtung der Axe des Cylinders erhalten wird. Dieser Stab drückt gegen eine im Raume des Cylinders untergebrachte Spiralfeder SS, welche je nachdem der Kolben durch die Wirkung des Dampfes mehr oder weniger gehoben wird, in eben dem Verhältnisse zusammengedrückt wird. An dem oberen Theile des Instruments befindet sich ein Längeneinschnitt $aabb$, so daß man einen mit dem Kopfe der Feder beweglichen Weiser i auswärts beobachten kann, und derselbe zeigt an einer längst des Einschnittes angebrachten Skale

Digitized by Google

den auf die Feder wirkenden Dampfdruck. Zur Verfertigung einer solchen Skale wägt man den Kolben sammt der Scheibe cc ab, worauf man den Cylinder umkehrt, den Kolben darauf legt und den letzteren mit Gewichten stufenweise belastet und an jenen Punkten der Skale, wo der Weiser stehen bleibt, die aufgelegten Gewichte des Kolbens anmerkt.

1283. Erklärung. Damit der Dampf im Kessel nicht eine Spannung annimmt, welche die der Stärke des Kessels angemessene im voraus bestimmte Grenze überschreitet, dient ein am Kessel angebrachtes Ventil, welches mittelst eines am Hebel verschiebbaren Laufgewichts so belastet wird, daß der Druck auf das Ventil dem Gegendrucke des Dampfes wenn dieser die ihm zugemessene Spannung erreicht, gleich kommt. Wie nun der Dampf eine höhere Spannung erhält, so öffnet er das so belastete Ventil und entweicht sofort ins Freie. Man nennt diese Vorrichtung das **Sicherheitsventil**.

1284. Aufgabe. Aus dem Querschnitte des Sicherheitsventils und dem Dampfdrucke auf die Flächeneinheit, welcher die Spannung des Dampfes im Kessel nicht übersteigen darf, die Stellung des Laufgewichts am Hebel zu bestimmen.

Auflösung. Sei a dieser Querschnitt, p der gegebene Druck auf die Flächeneinheit, Q das Laufgewicht, $AB=b$ (Fig. 312) der Hebelsarm des Dampfdruckes, ϱ der Halbmesser des in A befindlichen Zapfens, um welchen der Hebel sich drehen läßt, und μ der Reibungskoeffizient; so hat man den Hebelsarm $AC=c$ des Laufgewichtes

$$c=\frac{ap(b-\mu\varrho)}{Q}+\mu\varrho.$$

Beweis. Der Dampfdruck auf die Fläche des Ventils ist offenbar ap und sein Moment hinsichtlich der Drehaxe abp; der Druck auf den Zapfen hingegen ist $ap-Q$, die hieraus entstehende Reibung $\mu(ap-Q)$ und ihr Moment $\mu(ap-Q)\varrho$, endlich Qc das

Digitized by Google

Moment des Laufgewichts; man hat also

$$abp=\mu(ap-Q)\varrho+cQ$$

woraus sich der für c angegebene Werth finden läßt.

1285. Folgesatz. Hieraus ergibt sich der Druck p auf die Flächeneinheit des Ventils

$$p=\frac{(c-\mu\varrho)Q}{a(b-\mu\varrho)}$$

wozu noch der Druck der Atmosphäre auf die Flächeneinheit hinzukommt: man könnte hiernach, indem man das Laufgewicht auf dem Hebel so lange hin und her schiebt, bis das Ventil im Begriffe ist sich zu öffnen, und also dann der Dampfdruck mit dem Laufgewichte im Gleichgewichte steht, den zu irgend einer Zeit im Kessel herrschenden Dampfdruck durch Versuche bestimmen: allein abgesehen, daß solche Beobachtungen zeitraubend sind, gewähren sie auch keine große Genauigkeit, weil kleine Fehler in der Bestimmung des Querschnittes a, und die hiebei unberücksichtigte Reibung zwischen dem Ventile und der Peripherie der Oeffnung, welche durch den zwischen eindringenden Dampf auf eine unübersehbare Weise sich vergrößert, einen bedeutenden Einfluß auf die so zu ermittelnde Größe p ausüben.

1286. Anmerkung. Bei stehenden Dampfmaschinen wird das Sicherheitsventil nebstdem mit einem metallenen verschließbaren Gitter umgeben, um die Belastung des Hebels nicht von der Willkühr des Arbeiters abhängen zu lassen. Bei Lokomotiven kann indessen diese Vorrichtung deßhalb nicht angewendet werden, weil das auf dem Hebel aufgehangene Laufgewicht während der Bewegung der Maschine beständig auf- und niederspringen und folglich das Ventil abwechselnd öffnen und schließen würde.

1287. Erklärung. Das Sicherheitsventil der Lokomotive besteht aus dem um den festen Zapfen A (Fig. 313) drehbaren Hebel AB, und aus einer Federwage DEF. Im Punkte C drückt der Hebel vermittelst einer Stange CG auf das halbkugelförmige

Digitized by Google

Ventil, welches durch einen in der Röhre GH auf- und abgleitenden Stift in vertikaler Richtung beweglich ist. Im Punkte B wird der Hebel an eine im cylindrischen Gehäuse EF spiralförmig gewundene Feder mittelst einer Schraube DE befestiget, während das Gehäuse selbst im Punkte F des Kessels seine Stütze erhält. Wie nun der Dampf die dem Kessel angemessene Spannung überschreitet, drückt er auf das Ventil und öffnet es, indem der Hebel AB die an der Scheibe mn befestigte Feder auseinander zieht.

1288. Anmerkung. Zur Bestimmung des Dampfdruckes wird vorerst die Kraft der Spiralfeder durch Versuche ermittelt, indem man die Ausdehnung derselben am Gehäuse bezeichnet, wenn gegebene Gewichte an das bewegliche Ende der Feder gehängt werden. Setzt man diese Gewichte in der Formel (1285) statt Q, so erhält man die zugehörigen Dampfdrücke, die man an der Skale des Instrumentes sofort bemerken kann.

1289. Erklärung. Außer den Sicherheitsventilen gibt es noch Sicherheitsscheiben, welche den nämlichen Zweck mit jenen haben, im Augenblicke der Gefahr den Kessel zu öffnen, und den Dampf ins Freie entweichen zu lassen. Zu diesem Ende bringt man in den Wänden des Kessels Zapfen aus einer leichtflüssigen Metallmischung, nämlich aus Blei, Wismuth und Zinn bestehend, an, welche in solchen Verhältnissen zusammengeschmolzen werden, daß die Masse nur bis zu einer bestimmten Temperatur ihre feste Form erhält, über diese Temperatur hinaus aber flüssig wird, wodurch Dampf oder Wasser aus dem Kessel einen freien Ausgang erhalten.

1290. Anmerkung. Nachstehende Tafel liefert die Mischungsverhältnisse und die Temperaturen, bei denen die Metallmischung flüssig wird, die man also der im Kessel beabsichtigten Dampfspannung entsprechend zu wählen hat.

Digitized by Google

Druck in Atmosphären	Temperatur nach R.	Legirung			Druck in Atmosphären	Temperatur nach R.	Legirung		
		Wismuth	Blei	Zinn			Wismuth	Blei	Zinn
1.0	80°.0	8	5	3	4.0	116°.3	8	16	12
1.5	90.6	8	8	4	5.0	122.6	8	22	24
2.0	98.6	8	8	8	6.0	128.1	8	32	36
2.5	104.0	8	10	8	7.0	133.3	8	32	28
3.0	107.9	8	12	8	8.0	137.6	8	30	24
3.5	114.6	8	16	14					

Ueber die Chaussenot'schen Verbesserungen der Sicherheitsventile und Sicherheitsscheiben lese man den Art. Dampfmaschine im technischen Wörterbuche oder Handbuch der Gewerbskunde von Karl Karmarsch und D. Friedrich Heeren. Prag 1843.

1291. Erklärung. Um den Wasserstand im Kessel einer Lokomotive zu erfahren, dient das Visirglas, welches eine an der Seitenwand des Kessels vertikal befestigte gläserne Röhre *mn* (Fig. 314) ist, deren beide Enden in messingene Hülsen eingekittet sind, davon die untere in den Wasserraum, die obere in den Dampfraum des Kessels mündet. Jede der beiden Hülsen ist mit einem Hahne *r* versehen, welche geöffnet den Zutritt des Dampfes und Wassers in die Glasröhre gestatten, und verschlossen werden können, um eine Absperrung zu haben, wenn die Röhre durch einen Zufall zerbricht oder zerspringt, oder der Kitt, durch welchen sie befestigt ist, unhaltbar wird. In solchen Fällen würde man jeder Beobachtung des Wasserstandes im Kessel verlustig sein, und mit Sicherheit die Fahrt nicht weiter fortsetzen können, wenn nicht außer dem Visirglase zur Seite der Heitzkammer zwei Probirhähne von ganz gewöhnlicher Einrichtung angebracht wären, durch welche sich der Wagenführer, so oft er es nöthig findet, von dem richtigen Stand des Wassers im Kessel überzeugen kann.

Digitized by Google

1292. Anmerkung. Von großer Wichtigkeit ist es bei Lokomotiven, das Wasser im Kessel immer genau auf einem gewissen Stand, der in (Fig. 302) durch die Linie dd' angezeigt ist, zu erhalten, weil schon bei einer geringen Senkung die Decke der Rauchkammer, oder die oberen Zugröhren des Untertheils verbrennen würden, während bei einem zu hohen Wasserstand der Dampfraum zu sehr verkleinert und die Dampferzeugung gehindert wird. Zu diesem Ende befinden sich unter dem Körper der Lokomotive zwei Pumpen, die mittelst eines elastischen wasserdichten Schlauches mit dem Wasserbehälter des Munitionswagens in Verbindung stehen, und die das im Kessel verdampfte Wasser aus jenem ersetzen sollen. Jede dieser Pumpen liegt unmittelbar unter der Kolbenstange des Dampfcylinders, welche zugleich den Kolben der Pumpe hin- und herbewegt und das Wasser auf die bekannte Weise in den Kessel treibt, wofern nicht die Zuleitungsröhre, wenn es nöthig ist, gesperrt wird.

1293. Erklärung. Um in das Innere des Kessels gelangen zu können, ist auf dessen Oberfläche eine mit starkem eisernen Deckel verschlossene Oeffnung O (Fig. 302) angebracht, welche so groß ist, daß ein Arbeiter in den Kessel einsteigen kann, um dessen Reinigung vorzunehmen. Man nennt es das Mannsloch. Die Röhre f, welche den verwendeten Dampf aus dem Cylinder in die Rauchkammer f schafft, leistet außerdem den Nutzen, daß mit dem Dampf zugleich auch der Rauch aus der Rauchkammer rascher hinausgetrieben, und der Luftzug in der Esse besser unterhalten wird: da diese Wirkung nicht unähnlich jener eines Blasebalges ist, so führt diese bei Lokomotiven höchst wichtige Röhre den Namen des Blaserohres.

1294. Erklärung. Die Lokomotive hat bei ihrer Bewegung auf einer Eisenbahn verschiedene Hindernisse zu überwältigen, welche bei Bestimmung ihres nutzbaren Effektes in Rechnung zu bringen sind. Diese sind: der Widerstand, den Luft, wie jede andere Flüssigkeit, der Bewegung der Körper entgegensetzt, und welcher bei den großen Geschwindigkiten von 4 bis 10 deutschen Meilen in der

Digitized by Google

Stunde, welche die Lokomotive anzunehmen vermag, so bedeutend werden kann, daß ganze Wagenzüge durch die alleinige Wirkungen des Windes auf beträchtliche Entfernungen an der Eisenbahn fortbewegt, und die im vollen Gange befindlichen Lokomotiven durch die Wirkung des in entgegengesetzter Richtung sich erhebenden Windes aufgehalten werden können, man nennt ihn den **Widerstand der Luft**: ferner die Reibung zwischen den Rädern des Wagenzuges und den Schienen der Eisenbahn, die auf bekannte Art sich vermitteln läßt, endlich der **Widerstand des Blaserohres**. Dieser hat seinen Grund darin, daß der Dampf mit einer gewissen Geschwindigkeit aus dem Blaserohr in den Rauchfang geführt werden muß, um den zur Unterhaltung des Feuers nöthigen Luftzug hervorzubringen (1293), weßhalb er aus dem Cylinder durch eine enge Oeffnung e (Fig. 302) entweichen muß, und sich also unter einem Drucke befindet, welcher größer ist, als der einer Atmosphäre, mit dem er gegen den Kolben im Cylinder zurückwirkt, und ein Theil der den Kolben bewegenden Dampfkraft geht zur Ueberwältigung dieses Hindernisses rein auf.

1295. **Folgesatz.** Da der Widerstand der Luft dem Quadrate der Geschwindigkeit, mit welcher ein fester Körper in derselben bewegt wird, proportional ist, so kann man ihn auf den Quadratfuß Fläche durch αV^2 vorstellen, wo α einen Erfahrungskoeffizienten, und V die Geschwindigkeit des der Luftströmung ausgesetzten Körpers ist.

1296. **Anmerkung.** Nach den von *Borda*, *Dubuat*, *Thibault* angestellten Versuchen ist bei ruhiger Luft der Werth von $\alpha = 0.0811396\nu . F$ in Pfunden, wenn F die vordere Fläche des bewegten Körpers in Quadratfußen, und ν einen numerischen Koeffizienten vorstellt, der von der Form des Körpers abhängt, und zwar: es ist bei dünnen Flächen $\nu = 1.33$, bei einem Würfel $\nu = 1.17$, und bei einem Prisma, dessen Länge die Seite der vorderen Fläche wenigstens dreimal übersteigt, $\nu = 1.10$. Nach diesen Daten berechnet *Pambour* den Widerstand der Luf für einen Quadratfuß Fläche in Pfunden, wenn die Geschwindigkeit der Lokomotive in Meilen auf eine Stunde gegeben ist, wie folgt:

Digitized by Google

Meilen: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Widerstand: 0.07, 0.27, 0.60, 1.07, 1.68, 2.42, 3.29, 4.30, 5.44, 6.72

Bewegt sich aber die Luft mit einer Geschwindigkeit von h Fuß in einer Sekunde der Lokomotive entgegen, so beträgt diese Geschwindigkeit in Meilen auf die Stunde $3600h : 24000 = h : 6.7$ und man hat V um $h : 6.7$ zu vergrößern. Da bei Eisenbahnen von 5 Fuß Spurweite die Fläche des höchsten Wagens auf 70 Quadratfuß steigen kann, und diese Fläche wegen dem an den einzelnen Wagen angebrachten Rädern um beiläufig 10 Pf. für jeden Wagen sich vergrößert, vorausgesetzt, daß der Abstand eines Wagens von dem anderen nicht größer ist, als zwei Fuß, wie es bei Eisenbahnen im Mittel der Fall ist, und daß der mittlere Durchmesser der Räder nicht über 3 Fuß beträgt; so läßt sich bei einem jeden von einer Lokomotive bewegten Wagenzuge der Widerstand der Luft leicht berechnen. Bei 9 Wägen z. B. den Munitionswagen eingerechnet, und bei einer Geschwindigkeit von 4 Meilen ist derselbe $(70 + 90)1.07 = 171.4$ Pfunde.

1297. Anmerkung 2. Hinsichtlich des Widerstandes des Blaserohres hat *Pambour* Versuche angestellt, welche beweisen, daß derselbe der vom Kessel verbrauchten Wassermenge und der Geschwindigkeit der Lokomotive direkt und dem Querschnitte des Blaserohres verkehrt proportional sei, und man hat wenn S die Wassermenge, a den Querschnitt, v die Geschwindigkeit der Lokomotive in Meilen auf die Stunde bedeuten, den Widerstand des Blaserohres $= 0.0023vS : a = \beta v$, wenn $\beta = 0.0023S : a$ Kürze halber gesetzt wird. Die Größe der Reibung eines unbelasteten Wagenzuges kann man wie bei anderen Körpern auf die bekannte Weise ermitteln.

1298. Aufgabe. Wenn ein belasteter Wagenzug auf einer schiefen Ebene durch eine Lokomotive bewegt wird, den Druck auf die Flächeneinheit des Kolbens zu finden, welchen die oben bemerkten Widerstände der Bewegung erzeugen.

Auflösung. Sei M das Gewicht der Ladung sammt dem Gewichte der zu ihrem Transporte erforderlichen Wägen, m' das

Digitized by Google

Gewicht der Maschine, g das relative Gewicht einer Tonne, wenn diese Last auf einer geneigten Ebene erhalten werden soll, k die Reibung des Wagenzuges für jede Tonne Gewicht, $\mathfrak{R}$ die Reibung der leergehenden Maschine in Pfunden, μ der Reibungskoeffizient, r und R die Halbmesser des Dampfkolbens und des Treibrades in Zollen, l die Größe eines Kolbenhubes in Zollen, v die Geschwindigkeit der Lokomotive in Meilen auf eine Stunde, α, β die Koeffizienten des Widerstandes der Luft und des Blaserohres, p der Druck der Atmosphäre auf einen Quadratzoll in Pfunden, endlich P der erforderliche Dampfdruck auf einen Quadratzoll in Pfunden: so hat man

$$P = \frac{R(1+\mu)[(k \pm g)M \pm gm' + \alpha v^2] + R\mathfrak{R}}{2r^2 l} + p + \beta v.$$

wo das obere Zeichen für das Ersteigen der schiefen Ebene das untere Zeichen hingegen für das Herabrollen der Lokomotive auf derselben zu nehmen ist.

Beweis. Da k die Reibung des Wagenzuges für eine Tonne bedeutet, so ist kM die Reibung der ganzen Belastung, und weil $g(M+m')$ das relative Gewicht des Wagenzuges auf der schiefen Ebene vorstellt, welches negativ ist, wenn die Last auf derselben herabgeht, so liefert die Summe

$$kM \pm g(M+m') = (k \pm g)M \pm gm'$$

den von der Reibung und von der Bewegung auf der schiefen Ebene herrührenden Widerstand: fügt man hinzu den Widerstand der Luft αv^2, so erhält man den Druck, welchen die schiefe Ebene von der belasteten Lokomotive auszuhalten hat. Die hieraus entstehende Reibung an den Bahnschienen ist folglich

$$\mu[(k \pm g)M \pm gm' + \alpha v^2],$$

und der Totalwiderstand, den wir Kürze halber W nennen wollen, vergrößert sich auf den Werth

$$W = (1+\mu)[(k \pm g)M \pm gm' + \alpha v^2] + \mathfrak{R}$$

Andererseits drückt der Dampf auf jeden Quadratzoll des Kol-

bens mit der Kraft P, die Luft mit der Kraft p, somit ist der relative Druck $P-p$, und auf beide Kolben deren Fläche $2\pi r^2$ ist, wird dieser Druck $2(P-p)\pi r^2$.

Um nun den so eben gefundenen Widerstand W auf den Kolben zu übertragen, bemerke man, daß dem Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten gemäß sich die Kräfte verkehrt verhalten, wie die gleichzeitigen Wege, welche ihre Angriffspunkte durchlaufen (570); man hat also, da das Treibrad während eines Kolbenhubes l den Weg πR zurücklegt

$$\pi R : l = 2(P-p)\pi r^2 : W, \text{ woraus}$$

$$P = p + RW : 2lr^2 \text{ folgt,}$$

wird noch dieser Ausdruck um den Widerstand des Blaserohres βv vergrößert, und statt W sein Werth gesetzt; so erhält man sogleich den oben für P aufgestellten Ausdruck.

1299. *Folgesatz.* Auf der horizontalen Ebene hat man $g=o$ somit

$$P = \frac{R(1+\mu)(kM+\alpha v^2)+R\mathfrak{R}}{2r^2 l} + p + \beta v$$

wo Versuchen zu Folge $k=6$ Pfunde, $\mu=0.137=1/7$ bedeuten, und je nachdem die Größen R, r, l in Zollen oder Fußen, die Kräfte p, α, β in Pfunden für den Quadratzoll oder den Quadratfuß ausgedrückt werden, erhält man den für den gegen den Kolben wirkenden Widerstand P den Werth in Pfunden für den Quadratzoll oder für den Quadratfuß der Kolbenfläche.

1300. *Anmerkung.* Wenn man die Berechnung auf einen Zug von 9 Wagen, welcher nebst dem Munitionswagen 50 Tonnen wiegt, und mit der Geschwindigkeit von 4 österr. Meilen für die Stunde von einer Lokomotive bewegt wird, für welche $r=5''.5$, $R=30''$, $l=16''$, $m'=8$ Tonnen, $\mathfrak{R}=104$ Pfund, $F=161$ Quadratfuß, $S=60$ Kubikfuß, $a=15.2$ Quadratzoll, $g=1:500$ ist, anwendet; so erhält man in W. Pfunden,

$kM=311$, $g(M+m')=261$, $\alpha v^2=171$, also

$hM+g(M+m')+\alpha v^2=731$, und $731\times1.137=835$ daher $W=939$, $\beta v=3.5$, $p=12.8$ und $P=45$ Pfunde.

1301. Aufgabe. Die Geschwindigkeit der Lokomotive zu finden, wenn ihre Ladung und das in einer Stunde verbrauchte Volumen Wasser gegeben sind.

Auflösung. Sei wie vorhin l die Länge des Kolbenhubes und $l+c$ die Länge des Dampfcylinders, da dieser stets um die Größe c, welche der schädliche Raum des Cylinders heißt, jenen übertrifft, sei ferner S die in einer Stunde verbrauchte Wassermenge, und ω das relative Volumen des Wassers, welches nach (1249) den Werth $1:(m+nP)$ erhält, so ist die Geschwindigkeit der Lokomotive in Meilen

$$v=\frac{lRS}{24000(l+c)[nRW+2r^2l(m+np+n\beta v)]}.$$

Beweis. Da ω das relative Volumen des unter dem Drucke P gebildeten Dampfes bezeichnet, so folgt, daß eine Wassermenge S ein Volumen ωS in Dampfgestalt unter dem benannten Drucke einnehmen muß: dividirt man diese Größe mit dem Volumen des Cylinders $\pi r^2(l+c)$, so erhält man die Anzahl Kolbenläufe, welche erfolgen muß, bis jenes Dampfvolumen ωS verwendet wird, gleich $\omega S:\pi r^2(l+c)$. Während jeder Kolben zwei Hube macht, also der obige Inhalt eines Cylinders sich viermal füllt, durchläuft die Maschine einen Weg, welcher dem Radumfange $2\pi R$ gleich ist: also ist die Anzahl der Hin- und Hergänge, welche erfolgen müssen, bis das Dampfvolumen ωS übertritt, gleich $\omega S:4\pi r^2(l+c)$, mithin ist der in dieser Zeit durchlaufene Weg

$$w=\frac{2\pi R\omega S}{4\pi r^2(l+c)}=\frac{R\omega S}{2r^2(l+c)}$$

oder wenn alle Größen R, r, S, l, c auf Fuße sich beziehen, da dann w ebenfalls in Fußen sich ergibt

I. $v=R\omega S:24000.2r^2(l+c)$ in österr. Meilen.

Digitized by Google

Es ist aber

$$\omega=\frac{1}{m+nP'}, \text{ und nach (1298) } P=p+\beta v+\frac{RW}{2lr^2}$$

substituirt man diese Werthe in einander, und im Ausdrucke für v, so ergibt sich sofort v wie oben.

1302. Anmerkung. Zur Bestimmung eines Annäherungswerthes von v wird man anfangs $\alpha=o$, $\beta=o$ setzen, dann sofort v berechnen, und wenn man diesen Werth in den Gliedern αv^2, βv gesetzt hat, durch eine abermalige Rechnung den Werth für v genauer finden. Hierbei ist nach (1298)

$$W=(1+\mu)[(k\pm g)M\pm gm'+\alpha v^2]+\mathfrak{R}.$$

1303. Folgesatz. Aus dieser Gleichung ergibt sich

$$\textit{II.}\quad M=\frac{W-\mathfrak{R}}{(1+\mu)(k\pm g)}-\frac{\alpha v^2\pm gm'}{k\pm g}$$

während aus (1301)

$$\textit{III.}\quad W=\frac{lS}{24000(l+c)nv}+\frac{2r^2l(m+np+n\beta v)}{Rn}.$$

Substituirt man den Werth von W aus *III.* in *II.* so folgt

$$M=\frac{lS}{24000(l+c)(1+\mu)(k\pm g)nv}-\frac{2r^2l(m+np+n\beta v)}{(1+\mu)(k\pm g)Rn}$$
$$-\frac{\mathfrak{R}}{(1+\mu)(k\pm g)}-\frac{\alpha v^2\pm gm'}{k\pm g}$$

die zulässige Belastung einer Lokomotive in Tonnen mit Einschluß des Munitionswagens, welche einer gegebenen Geschwindigkeit v entspricht.

1304. Anmerkung. Wenn M' das Gewicht des gefüllten Munitionswagens bedeutet, und das mittlere Verhältniß der Nutzbelastung eines Wagenzuges mit Personen und Waaren zum totalen Gewichte desselben $1:q$ ist, so hat man die Nutzlast des ganzen Zuges $Q=(M-M'):q$. Auf Eisenbahnen, deren Spurweite 5 Fuß beträgt, kann man für eine Maschine von 8 bis 12 Tonnen

Digitized by Google

das mittlere Gewicht des Munitionswagens $M'=6$ Tonnen annehmen, und die Nutzlast beträgt gewöhnlich $^2/_3$ von dem Totalgewichte in Tonnen, d. i. man hat $Q=^2/_3 (M-6)$ Tonnen. Die Arbeitsgröße d. i. der Nutzeffekt einer Lokomotive läßt sich daher in zweifacher Hinsicht betrachten: entweder ist er der Ausdruck Mv, oder Qv, je nachdem man das Bruttogewicht M oder das Gewicht der Nutzlast Q im Sinne hat.

1305. Anmerkung. Da ein kräftiges Pferd, wenn es im Schritte geht, 220 engl. Fuß in einer Minute zurücklegt, und fortwährend, ohne ermüdet zu werden, ein am Ende eines über eine Rolle geführten Seiles aufgehängtes Gewicht von 150 engl. Pfunden aufwärts ziehen kann; so ist sein mechanisches Moment, oder was man eine Pferdekraft nennt, gleich $220\times150=33000$ eng. Pfunde gezogen auf einen Fuß in der Minute. In Bezug auf inländisches Maß sind aber 220 engl. Fuß $=212.12$ W. Fuß und 150 engl. Pfund $=121.44$ W. Pfd. demnach eine Pferdekraft gleich $121.44\times212.12=25762$ W. Pfunde, gezogen auf eine Entfernung von 1 W. Fuß in einer Minute. Um diese Messungsweise auf Lokomotiven anzuwenden, bemerke man, daß zur Fortbewegung einer Tonne $=1813.6$ W. Pfd., Versuchen zu Folge, eine Kraft von 6 engl. Pfunden erforderlich ist, um diese Last durch einen Weg von 5280 engl. Fußen oder einer englischen Meile in einer Stunde fortzubringen. Ein beliebiger in Pfunden, die in der Minute auf 1 Fuß gehoben werden, ausgedrückter Nutzeffekt, kann also leicht in Tonnen, die in der Stunde um 1 engl. Meile fortgezogen werden, verwandelt werden, wenn man denselben durch den Faktor $60:6\times5280=1:528$ multiplizirt, und folglich wird die Pferdekraft in engl. Tonnen $33000:528=62.5$, die in der Stunde eine engl. Meile fortbewegt werden oder für inländisches Maß, da 5280 engl. Fuß $=5091$ W. Fuß und 1 österr. Meile 24000 W. Fuß enthält, diese Pferdekraft $=62.5\times5091:24000=13.288$ engl. Tonnen $=240.44$ W. Centner, die eine österr. Meile in der Stunde auf der Eisenbahn bewegt werden. Sobald man also den Nutzeffekt einer Lokomotive in W. Centnern kennt, ergibt sich derselbe in Pferdekräften, wenn man jenen mit 240,41 dividirt.

Digitized by Google

Eine umständlichere Darstellung der Lokomotive findet man in fogenden Schriften:

Traité théorique et pratique des machines locomotives par le comte F. M. G. de Pambour. Deuxieme edition. Paris 1840. Theoretisch-praktisches Handbuch der Dampfwagen des Grafen *P. M. G.* v. *Pambour* deutsch bearbeitet von D. C. H. Schnuse. Braunschweig 1841.

Navier nouvelles considerations sur la machine locomotive in den *Annalen des ponts et chaussées. Paris* 1836.

D. Karl Hartmann Handbuch über die Anlagen von Eisenbahnen und die Einrichtung von Dampf- und anderen Eisenbahnwagen. Augsburg 1837.

Tredgold Thomas the steam engine. London 1838 2 starke Quartbände.

E. F. Scholl, der Führer des Maschinisten. Anleitung zur Kenntniß, Wahl, Aufstellung, Wartung und Feuerung der Dampfmaschinen und Dampfwagen. Braunschweig 1845.

Flachet et Petit guide du mechanicien conducteur de machine locomotive. Paris 1840.

Armengaud l'Industrie des chemins de fer ou desseins et descriptions des principales machines locomotives etc. Paris 1839.

3. Die Dampfschiffmaschine.

1306. Erklärung. Wenn ein Schiff anstatt durch Segel fortgetrieben zu werden, von durch eine Dampfmaschine bewegten Schaufelrädern bewegt wird, so heißt das Schiff nach seiner Größe und Bestimmung Seedampfschiff, Dampfboot, und die zu diesem Ende besonders vorgerichtete Dampfmaschine die Dampfschiffmaschine. Die Figur 315 stellt den Längendurchschnitt eines Schiffes für Passagiere dar, wo der mittlere Raum *AA* für die Dampfmaschine und den Kessel gewidmet ist, *B* ein Kohlenmagazin, *C* ein Behältniß zur Aufbewahrung der Utensilien, *D* das zur Verhütung des Wasserspritzens auf das Verdeck in einem Gehäuse untergebrachte Schaufelrad, *E* den aus dem Feuerherde führenden Rauchfang be-

Digitized by Google

deutet. Seedampfschiffe führen Segel, um den Kohlenverbrauch der Maschine zu vermindern.

1307. *Folgesatz.* Die zu beiden Seiten des Schiffes angebrachten Schaufelräder erleiden bei ihrer Umdrehung einen Widerstand, welchen die Kraft der Dampfmaschine überwinden muß, und durch den das Schiff vorwärts getrieben und mit derjenigen Geschwindigkeit bewegt wird, bei welcher das mechanische Moment des Widerstandes, den das Schiff selbst im Wasser erleidet, dem durch den Stoß der Schaufeln erzeugten Nutzeffekte beider Räder gleich kommt.

1308. *Anmerkung.* Es kann hier nicht der Zweck sein, die mannigfache Einrichtung der Dampfschiffe und ihrer Schiffsmaschinen anzugeben, wie solche seit Erfindung der Dampfschifffahrt zu Anfange dieses Jahrhunderts nach und nach zur Anwendung gebracht werden. Man findet sie in den Schriften: *C. F. Partington Historical and descriptive Account of the Steam Engine. Lond.* 1822. *Buchanan Treatise on Propelling Vessels by steam. Glasgow* 1816.

Marestier Mémoire sur les bateaux a vapeur des Etats unis d'Amerique. Paris 1825 und in dem (1305) angeführten Werke *Tredgold's*.

Eine Beschreibung der Seereise mit dem ersten Dampfboote von London nach Dublin ist in Gilbert's Annalen der Physik, Band 53 lesenswerth.

1309. *Anmerkung.* In der neuesten Zeit hat man Versuche gemacht an die Stelle der Schaufelräder die Schraube, eigentlich ein großes von Schmiedeeisen schraubenförmig gewundenes Ruder an den Hintertheil des Schiffes anzubringen, durch deren von einer Dampfmaschine bewirkten Umdrehung das Schiff vorwärts getrieben wird, doch wird erst die Folge über die Vortheile entscheiden, welche diese Einrichtung verspricht.

1310. *Erklärung.* Der Dampfkessel einer Schiffsmaschine, in welchem das Wasser erhitzt, und in Dampf verwandelt werden soll, ist zunächst an die Bedingung gebunden, daß er kein allzugroßes Gewicht habe, um das Schiff nicht zu sehr zu belasten und daß er

Digitized by Google

so tief als möglich im Schiffe liege, um dessen Stabilität keinen Eintrag zu machen; daher derselbe verhältnißmäßig viel weniger Wasser enthält, als andere Dampfkessel, und da die Anwendung von Mauerwerk gänzlich unterbleiben muß, so wird Kessel und Ofen, wie bei Lokomotiven, aus Metall gebaut, mit denen sie auch die innere Feuerung gemein haben, indem der Ofen und Rost der Schiffskessel im Kessel selbst untergebracht wird, so daß dieselben allenthalben von mit Wasser gefüllten Wänden umgeben sind. Man unterscheidet zwischen einem Niederdruckkessel, wenn der Dampfdruck auf den Quadratzoll nicht über 4 Pfund beträgt, und einem Hochdruckkessel, wenn derselbe auf 2 oder 3 Atmosphären steigt.

1311. Erklärung. Einen Niederdruckkessel, wie er auf den französischen Dampfbooten im Gebrauche ist, stellt (Fig. 316) zum Theil im Querschnitte zum Theil von vorn gesehen, (Fig. 317) im Längendurchschnitte und (Fig. 318) im Grundrisse dar, in denen dieselben Bestandtheile mit gleichen Buchstaben bezeichnet sind: *aa* sind die mit Wasser gefüllten Räume, *bb* der Wasserstand, *cc* der Dampfraum, *dd* die Dampfröhre, welche den Dampf in den Cylinder leitet: *ee* sind die beiden Feuerherde, darin der Rost 4 Fuß lang und 18 Zoll breit ist: derselbe besteht aus 32 gußeisernen Stäben von halber Rostlänge, die unter einander $\frac{1}{2}$ bis $\frac{2}{3}$ Zoll Zwischenraum lassen, *ff* ist der Aschenraum, der noch unter den Kesselboden hinabreicht. Die Decke der Feuerkammer bilden metallene Falten *kk* von 4 Zoll Höhe und $1\frac{3}{4}$ Zoll Breite, welche mit Wasser gefüllt sind und hiedurch sowohl die Heitzfläche vermehren, als auch dem Kessel eine größere Festigkeit ertheilen: der Rost schließt sich an eine hohle Wasserwand an, die Feuerbrücke.

1312. Erklärung. Da der Kessel von Platten mit $\frac{2}{3}$ Linie Dicke gebildet wird, so werden zur Vergrößerung seiner Festigkeit die Platten an ihren Rändern im Winkel aufgebogen und so vernietet, welches im Inneren des Kessels Rippen bildet, und um die Ausbauchung der Kopfplatten des Kessels zu verhindern, sind oberhalb *kk* vier kupferne Stangen der Länge nach als Anker eingelegt. Ferner bedeuten *m* die Züge, welche aus der Feuerkammer

Digitized by Google

zum Rauchfang *h* führen, und welcher ein Charnier Behufs des Umlegens besitzt: *n* ist das bekannte Mannsloch.

1313. Erklärung. Das heberförmige Rohr *gg*, dessen rechter Schenkel zwei Zoll unter den Wasserspiegel des Kessels reicht, und noch $1\frac{1}{2}$ Zoll von der Decke der Feuerkammer absteht, hat eine Höhe von beiläufig 7 Fuß, welche etwas größer ist, als eine Wassersäule, welche dem größten Dampfdrucke im Kessel das Gleichgewicht halten soll: der linke Schenkel geht 1 Fuß tiefer als der rechte und mündet durch die Schiffswand bei *p* ins Freie: nahe am obersten Punkte *o* hat es ein kleines Röhrchen, der Warner genannt, aus welchem Wasser hervorspritzt, wenn der Dampf im Kessel zu stark wird. Man nennt diese Einrichtung das Sicherheitsrohr: denn so wie der Dampfdruck seine ihm zugewiesene Grenze übersteigt, tritt das Wasser über die Biegung des Sicherheitsrohres, und das Wasser fließt so lange fort, bis nicht die Mündung des rechten Schenkels aus dem Wasserspiegel tritt, dann entweichen Dämpfe und die Maschine steht still. Eben so darf das Wasser nie unter den Spiegel *bb* sinken, weil sonst gleichfalls die Dämpfe durch das Sicherheitsrohr einen Ausgang ins Freie erhalten.

1314. Erklärung. Einen zweiten Haupttheil einer Schiffsmaschine macht der Cylinder sammt dem Kondensator und der Luftpumpe aus. Der Cylinder *A* (Fig. 319) ist wie bei der Lokomotive mit einer Schiebervorrichtung versehen, welche den Dampf aus dem Dampfrohre bald unter bald ober den Kolben leitet, während der verwendete Dampf, so wie er aus dem Cylinder kommt, nicht mehr ins Freie entweicht, sondern in einem allseitig geschlossenen Gefäße *D*, dem Kondensator in Berührung mit Wasser gebracht wird. Zu dem Ende wird aus dem Wasserbehälter *E* mittelst des Hahnes *H* in den Raum *D* kaltes Wasser in Strahlenbüscheln gespritzt, welches den Dampf sogleich verdichtet und in tropfbares Wasser umwandelt, wodurch, da das Wasser ein 1700mal kleineres Volumen einnimmt als Dampf, sowohl in der Schieberkammer als auch in dem damit in Verbindung stehenden Raume des

Digitized by Google

Cylinders ein luftverdünnter Raum entsteht. Die Expansivkraft des Dampfes auf der entgegenstehenden Seite des Kolbens kann nun mit ihrer vollen Kraft den Kolben bewegen. Die Luftpumpe *G* hat aber die Bestimmung, das sich im Kondensator sammelnde Wasser sammt der demselben beigemengten Luft in den Behälter *E* zu schaffen, aus welchem es mittelst des Ableitungsrohres *F* zum Speisen des Kessels verwendet wird.

1315. Anmerkung. Die Bewegung des Kolbens und Dampfes ist in Fig. 319 durch Pfeile angedeutet: es tritt nämlich der Dampf durch den Durchgang 2 der Dampfkammer *C* in den Raum *B* unter dem Kolben ein, bewegt ihn also nach oben, während der in dem Raume *A* vorhandene Dampf mittelst des Durchganges 1 in den Kondensator *D* geleitet, und daselbst zu Wasser verdichtet wird, wodurch im Raume ein luftleerer Raum entsteht, und somit der Bewegung des Kolbens kein Hinderniß in den Weg legt. In dem folgenden Augenblicke ändert der Schieber, wie bei Lokomotiven (1262) seine Stellung, der Durchgang 1 steht dem Dampfe zum Eintritt in den Raum *A* offen, der Durchgang 2 hingegen setzt den Raum *B* mit dem Kondensator in Verbindung, der Kolben muß also niedersteigen.

1316. Erklärung. Die Welle der beiden Schaufelräder ist vom Schmiedeeisen, geht quer durch die Breite des Schiffes und steht beiderseits so viel hervor, als zur Befestigung der Schaufelräder an ihren Enden erforderlich ist: eben so sind die Speichen der Schaufelräder sowohl als auch ihr Kranz von Stabeisen, die Schaufeln selbst aber von Eisenblech. Die Fig. 320 zeigt die Verbindung dieser Bestandtheile zu einem Schaufelrade. An der Welle befinden sich zwei Krummzapfen, die wie bei der Lokomotive, um einen rechten Winkel abstehen, in welche die mit den Kolbenstangen beider Cylinder durch Hebel verbundenen Treibstangen eingreifen und eben so besitzt sie zwei excentrische Scheiben, deren Lenkstangen die Schiebersteuerung bewegen.

1317. Erklärung. Die eigentliche Schiffsmaschine bildet ein für sich bestehendes, von den Schiffswänden ganz abgesondertes Ga-

Digitized by Google

ze: es ruht auf zwei starken Bäumen, auf dem Grunde des Schiffes, der mit Eisenblech belegt ist. Ein starkes Gerüst von Eisen Fig. 321 in der Längenansicht, Fig. 322 im Grundrisse und Fig. 323 in dem isometrischen (perspektivischen) Aufrisse stellt die Hälfte derselben dar. In diesen Figuren bedeutet A den Dampfcylinder, dessen Kolbenstange mit einer horizontalen Querstange kk (Fig. 323) verbunden ist, deren Ende in die Lenkstangen kK des Balanciers eingreifen. So wie nun die Kolbenstange auf- und niedersteigt, bewegt sie die Stange kk, und hiemit auch mittelst der Stange kK den Balancier KL von Schmiedeeisen. Die Stangen g und h (Fig. 321) dienen nur dazu, um die vertikale Bewegung der Kolbenstange zu sichern. An jeder Seite der Maschine liegt ein solcher Balancier zu unterst, um sowohl ein hohes und starkes Gerüst zu vermeiden, als insbesondere das Gewicht der Maschine so tief als möglich in den Schiffsraum zu bringen. Das andere Ende L des Balancier (Fig. 321) greift mittelst der Treibstange P in einen der beiden Krummzapfen der Räderwelle, die in O projizirt erscheint, in (Fig. 322) aber durch den Cylinder OO vorgestellt ist: durch die vereinte Thätigkeit beider Hälften der Maschine wird nun die Räderwelle OO umgedreht, und hiermit auch die Schiebersteuerung vermittelst der excentrischen Scheiben in Bewegung gesetzt. In dem vierseitigen Kasten E befindet sich der Wasserbehälter für den Kondensator, darunter dieser selbst und in G die Luftpumpe, deren Spiel von der Bewegung der Balanciers abhängt. Mit der Umdrehung der Welle werden endlich auch die beiden Schaufelräder bewegt und daher die Bewegung des Dampfschiffes erzeugt.

1318. Erklärung. Die Bewegung eines Dampfschiffes wird durch mehrere Hindernisse aufgehalten, welche man Widerstände des Dampfschiffes nennt. Zu diesen gehört: der Wasserstoß gegen die eingetauchte Oberfläche des Schiffskieles, die Adhäsion des Wassers an die Seitenwände des Schiffes, und der Widerstand der Luft gegen die derselben zugekehrte bewegte Fläche des Schiffes, Widerstand der Luft genannt.

1319. Folgesatz. Heißt C die Geschwindigkeit des Stromes V die des Schiffes und I der Querschnitt seines eingetauchten

Theiles senkrecht auf die Richtung der Bewegung; so ist wenn das Schiff stromaufwärts fährt, $V+C$ die relative Geschwindigkeit des Wassers, also wenn k einen Erfahrungskoeffizienten bedeutet, $Ik(V+C)^2\gamma : 2g$ der Wasserstoß auf den Schiffskiel. Ist ferner Q das Gewicht des Schiffes sammt der Ladung, g' der Koeffizient für die relative Schwere beim Besteigen auf der geneigten Oberfläche des Flußes, also Qg' das relative Gewicht des Schiffes, so hat man den Widerstand des Wassers gegen die Bewegung des Schiffes

$$Ik(V+C)^2\gamma : 2g+Qg'.$$

1320. Folgesatz 2. Die Adhäsion des Wassers an die Wände des Schiffskieles ist aber dessen Oberfläche und dem Quadrate seiner Geschwindigkeit proportional: bezeichnet man also mit O die Oberfläche des eingetauchten Theiles für das unbelastete Schiff, und mit o ihre Zunahme für jede Gewichtseinheit der Ladung M, so wird $O+oM$ diese Oberfläche des belasteten Schiffes, und $\beta(O+oM)V^2$ der Widerstand der Adhäsion sein: heißt endlich F die Fläche der der Luft zugekehrten Schiffstheile in Quadratfußen, α der Koeffizient für den Widerstand der Luft, so erhält man αFV^2 für den Werth desselben, mithin hat man den Totalwiderstand des Schiffes

$$W=kI(C+V)^2\gamma : 2g+Qg'+[\alpha F+\beta(O+oM)]V^2.$$

1321. Aufgabe. Den zur Ueberwältigung der Widerstände des Dampfschiffes erforderlichen Druck auf die Flächeneinheit des Kolbens zu finden.

Auflösung. Sei R der Halbmesser des Schaufelrades, r der des Kolbens, l die Länge eines Kolbenhubes, p' der Druck auf die Flächeneinheit der entgegengesetzten Kolbenfläche, wegen der unvollkommen Kondensation des Dampfes, W der Totalwiderstand des Schiffes, so hat man den Druck auf die Flächeneinheit des Kolbens $q=RW : 2r^2l+p'$.

Beweis. Es ist $2\pi r^2$ der Querschnitt beider Cylinder, und somit $2\pi r^2(q-p')$ der relative Druck auf die Kolbenfläche beider

Digitized by Google

Cylinder. Aber während jeder Kolben seinen Weg zweimal durchläuft, beschreibt das Schaufelrad den Umfang eines Kreises vom Halbmesser R, und man hat nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten

$$2\pi r^2(q-p') : W = 2\pi R : 2l$$

woraus $q = RW : 2r^2l + p'$ folgt.

1322. Aufgabe. Die Geschwindigkeit eines Dampfschiffes in Meilen für die Stunde zu finden.

Auflösung. Bei derselben Bezeichnung wie vorhin hat man die Geschwindigkeit des Dampfschiffes

$$V = \frac{\omega RS}{24000 \times 2r^2(l+c)}.$$

Beweis. Heißt ω das relative Volumen des unter dem Drucke q gebildeten Dampfes, und S die in einer Stunde verdampfte Wassermenge, so ist ωS das Volumen dieses Dampfes, welches nach und nach während einer Stunde in die beiden Cylinder übertreten soll: nun ist $2\pi r^2 l$ die Größe der von den Kolben in beiden Cylindern beschriebenen Räume, und $2\pi r^2 c$ die Größe des schädlichen Raumes in denselben, somit ihre Summe $2\pi r^2(l+c)$: folglich wird die Anzahl der dem verbrauchten Volumen ωS Dampf entsprechenden Kolbenzüge ausgedrückt durch $\omega S : 2\pi r^2(l+c)$; allein jeder Kolben durchlauft seinen Weg zweimal, und es füllen sich vier Cylinder mit Dampf in der Zeit, als das Schaufelrad den Weg $2\pi R$ beschreibt, sonach ist die Geschwindigkeit v des Kolbens in Fußen $v = \omega RS : 2r^2(l+c)$ und hieraus folgt die Geschwindigkeit V des Dampfschiffes V wie oben.

1323. Folgesatz. Da bei dem Widerstande W des Dampfschiffes q der Druck auf die Flächeneinheit des Kolbens ist, so hat man

$$\omega = 1 : (m+nq) = 2r^2l : [2r^2lm + n(RW+p')] \quad (1321),$$

wird dieser Werth von ω in (1322) substituirt, so ergibt sich

Digitized by Google

$$V=\frac{lRS}{24000(l+c)[2r^2lm+n(RW+p')]}$$

als Geschwindkeit des Dampfschiffes, wenn dasselbe im ruhigen Wasser sich bewegt.

1324. Folgesatz 2. Multiplizirt man diesen Ausdruck mit Q oder M, so erhält man den Nutzeffekt der Schiffsmaschine, welchen man sofort auch in Pferdekräften, wie bei der Lokomotive bestimmen kann: dagegen ist die in einer Stunde erforderliche Wassermenge

$$S=24000V(l+c)[2r^2lm+n(RW+p')]:lR.$$

1325. Anmerkung. *Navier* verfährt in der o. a. Schrift weiter so: die Geschwindigkeit des Schiffes in einem fließenden Wasser ist eine andere als die der Schaufeln: heißt jene V diese v, so ist die absolute Geschwindigkeit der Schaufeln $V-v$, und da das Wasser mit der Geschwindigkeit C dem Stoße der Schaufeln ausweicht, so ist $V-v-C$ die relative Geschwindigkeit derselben in Bezug auf das Wasser; sei i der Inhalt des eingetauchten Theiles der Schaufelfläche, so erhält man für einen Erfahrungskoeffizienten k' den Wasserstoß gegen die Schaufeln gleich $k'i(V-v-C)^2\gamma:2g$. Wird der Widerstand der Luft und die Adhäsion des Wassers unbeachtet gelassen, so folgt

$$\frac{K'i(V-v-C)^2\gamma}{2g}=\frac{kI(C+v)^2\gamma}{2g}+\frac{aQ}{l}$$

wenn statt des relativen Gewichtes gQ dessen Werth $aQ:l$ gesetzt wird, wo a das Gefälle des Flußes auf die Länge l vorstellt. Hieraus ergibt sich

$$V=C+v+\sqrt{\left[\frac{kI}{k'i}(C+v)^2+\frac{2Qag}{k'liy}\right]}$$

wird diese Geschwindigkeit mit der Kraft des Wasserstoßes gegen das Schiff multiplizirt, so erhält man dessen Nutzeffekt

$$\mathfrak{E}=\left(\frac{kI(C+v)^2\gamma}{2g}+\frac{aQ}{l}\right)\left[C+v+\sqrt{\left(\frac{kI}{k'i}(C+v)^2+\frac{2Qag}{k'liy}\right)}\right].$$

Digitized by Google

Aus Beobachtungen an Flußbetten mit flachem Boden ist $k=0.5$, $k'=3.2$. Kann man das Gefälle a außer Acht lassen, so wird

$$E=\frac{kI(C+v)^2\gamma}{2g}\left(1+\sqrt{\frac{kI}{k'i}}\right), \text{ und } E=\frac{kIv^2\gamma}{2g}\left(1+\sqrt{\frac{kI}{k'i}}\right)$$

wenn $C=o$ ist.

4. Die stehenden Dampfmaschinen.

1326. Erklärung. Die stehenden Dampfmaschinen im Gegensatze der bereits betrachteten beweglichen, die ihr eigenes Gewicht mit zu bewegen haben, sind diejenigen, welche den Ort, wo sie einmal aufgestellt werden nicht ändern, und daher die unverminderte Dampfkraft auf andere mechanische Vorrichtungen übertragen, derenthalben sie gebaut werden.

1327. Erklärung. Die Bewegung des Kolbens wird gewöhnlich mittelst eines zweiarmigen Hebels zum Betrieb der Maschinen übertragen, der sich um seine Mitte wie ein Wagenbalken bewegt, und an dessen einem Ende der Kolben durch das Wattsche Parallelogramm befestiget ist, zur Aufrechthaltung seines vertikalen Auf- und Niedersteigens, und von dessen anderen Ende die Bewegung mittelst einer Leitstange dem Schwengel fortgepflanzt wird. Man nennt diese Vorrichtung den Balancier. Die so fortgepflanzte Bewegung kann nun ebenfalls eine hin- und hergehende sein, wie bei Maschinen zur Betreibung der Pumpenwerke, welche zur Förderung des Wassers aus Schachten angewendet werden: oder die hin- und hergehende Bewegung des Schwengels KL (Fig. 300) wird durch Vermittelung einer Kurbel LO und des Schwungrades ff in eine drehende verwandelt. Dampfmaschinen der letzten Art nennt man Rotationsmaschinen.

1328. Erklärung. In Beziehung auf die Art des Angriffes, welchen der Kolben von dem Dampfe erfährt, zerfallen die Dampfmaschinen in einfach wirkende und in doppelt wirkende: bei jenen treibt der Dampf den Kolben im Cylinder stets nach einer Seite hin, gewöhnlich von unten nach oben, der Rückgang des Kolbens wird schon durch den Druck der Atmosphäre bewirkt: bei

Digitized by Google

den doppelt wirkenden Maschinen tritt der Dampf, wie es bei der Lokomotive und der Schiffsmaschine der Fall ist, abwechselnd auf die eine und auf die andere Seite des Kolbens und treibt ihn im beiderseits gesperrten Cylinder hin und her, hiebei wird der auf der entgegengesetzten Seite des Kolbens befindliche Dampf mittelst der Schiebersteuerung außer Verbindung mit dem Kessel gesetzt, und genöthiget aus dem Cylinder zu entweichen.

1329 Erklärung. Die bewegende Kraft des Dampfes wird auf der einen Seite des Kolbens merklich vergrößert, wenn der bereits verwendete Dampf auf der entgegengesetzten Seite des Kolbens nicht unmittelbar ins Freie hinausgeschafft wird, sondern durch Einspritzung kalten Wassers in einem besonderen Behälter, dem Kondensator niedergeschlagen wird. Maschinen dieser Art heißen Kondensationsmaschinen: diese enthalten nebst den, allen Dampfmaschinen gemeinschaftlich angehörenden Bestandtheilen dem Dampfkessel, Cylinder sammt Kolben, Balancier, Krummzapfen, Schwungrad und Schiebersteuerung, noch den Kondensator, ferner eine Kaltwasserpumpe zur Einspritzung des kalten Wassers, Injektionswassers, in den Kondensator, eine Luftpumpe um in demselben einen luftverdünnten Raum zu erzeugen, und eine Warmwasserpumpe, um das durch den Niederschlag des Dampfes erhitzte Wasser abzuleiten, und nach dem Dampfkessel zu schaffen.

1330. Erklärung. Je nachdem man den Dampf von der Temperatur unter 80 *R.* Grade, oder aber von einer höheren Temperatur als diese in Anwendung bringt, unterscheidet man die Dampfmaschinen in atmosphärische oder Niederdruck- und in Hochdruck-Maschinen. Des Dampfersparnisses wegen, ist es bei beiden Arten der Dampfmaschinen vortheilhaft, den Dampf aus dem Kessel nicht so lange in den Cylinder strömen zu lassen, bis der Kolben an den Boden des Cylinders gekommen ist, sondern die Verbindung des Cylinders mit dem Dampfkessel schon früher zu unterbrechen, damit der noch übrige Theil des vollen Kolbenhubes durch die Expansion des abgeschlossenen Dampfes bewirkt werde. Maschinen bei denen eine solche Absperrung des Dampfes vor sich geht, heißen Expansionsmaschinen.

Digitized by Google

1331. Erklärung. Mit der Axe des Schwungrades ist in der Regel die Steuerung verbunden, wodurch der Schieber des Cylinders auf- und niederbewegt wird: sie besteht in einer excentrischen Scheibe, die sich in einem Ringe bewegt, und so die Lenkstange der Steuerung bald verlängert, bald verkürzt: dagegen bewegt der Balancier die Kolbenstange der Luftpumpe und der Kalt- und Warmwasserpumpe, und der ihnen zugehörigen Hähne. Zur Absperrung des Dampfes aus dem Kessel dient der schon betrachtete Regulator oder das Centrifugalpendel, dessen Axe durch die Welle des Schwungrades in Bewegung gebracht wird. Man sieht diese Vorrichtung in Fig. 300, wo *h* das Centrifugalpendel bedeutet, dessen Axe an der Scheibe *i* fest sitzt, um welche ein Seil ohne Ende *nn'* über eine Rolle und die Welle des Schwungrades *ff* geschlungen ist, wodurch der Winkelhebel *l'lm* das Drosselventil *m* der Dampfröhre öffnet und absperrt.

1332. Anmerkung. Die Dampfmaschine schafft sich daher, je nachdem es nöthig ist, mehr oder weniger Luftzug und Feuer, sie wandelt das Wasser in Dampf um, leitet ihn nach Bedarf in den Cylinder, bringt ihn dort in Wirksamkeit, sie schlägt ihn als heißes Wasser nieder, indem sie sich selber das hiezu erforderliche kalte Wasser herbeischafft und leitet jenes nach dem Kessel zurück. Bei zu großer oder zu geringer Spannung des Dampfes schafft sie sich selber Luft, um einer Zertrümmerung des Kessels vorzubeugen: sie öffnet und schließt alle Ventile zu rechter Zeit pünktlicher, wie es der vereinigten Thätigkeit mehrerer Personen nicht gelingen würde, und nur wenn die Nachhilfe des Menschen unentbehrlich ist, gibt sie es durch Pfeifen oder andere Anzeichen zu erkennen.

1333. Erklärung Man kann die stehenden Dampfmaschinen unter drei Klassen bringen: zu der ersten gehören die Rotationsmaschinen ohne Expansion, welche auch unter dem Namen der doppelt wirkenden Watt'schen Dampfmaschine vorkommen, zu der zweiten Klasse zählt man die Rotationsmaschinen mit Expansion, diese begreift: die Kornwalli'sche Dampfmaschine, bei welcher die Expansion und Kondensation in einem Cylinder vorgenommen

Digitized by Google

wird, die Woolf'schen und Edwards'schen Maschinen mit Kondensation und Expansion in zwei verschiedenen Cylindern, und die Evans'schen Dampfmaschinen, welche zwar Expansion aber ohne Kondensation besitzen. Eine dritte Klasse bilden die einfach wirkenden Dampfschinen nämlich die einfach wirkenden Maschinen von Watt, Cornwallis, und die atmosphärischen Maschinen.

1334. Erklärung. Um den Dampf in den Cylinder nach Belieben oberhalb oder unterhalb des Kolbens eintreten zu lassen, dient eine Vorrichtung, welche man die Steuerung nennt. Insbesondere besteht die Schiebersteuerung aus zwei hohlen Cylindern *FF*, *bb'* (Fig. 324) unter denen der innere innerhalb des äußeren mittelst der Schieberstange *cc* beweglich ist, und an einer Seite *aa* genau abgeschliffene Ränder besitzt, mit welchen er an der äußeren Bekleidung *bb* dampfdicht auf- und abgleitet. Die kreisförmigen Oeffnungen *D* und *G* sind die beiden Dampfdurchgänge, *E* ist die mit dem Drosselventil versehene Mündung der Dampfröhre aus dem Kessel; *H* ist der Durchgang zum Kondensator. Für den Eintritt des Dampfes über den Kolben gilt die Stellung des Schiebers *A*, da dann der unterhalb des Kolbens befindliche Dampf durch *G* nach *H* gelangt. Dagegen zeigt die Stellung *B* des Schiebers, daß der Dampf bei *G* unterhalb des Kolbens einströmt, und bei *D* aus dem Raume oberhalb des Kolbens mittelst der Oeffnung *H* in den Kondensator entweicht. Die Bewegung der Schieberstange *cc* ersieht man aus (Fig. 325), in welcher *RR* das Schwungrad, *SS* die an dessen Welle angebrachte excentrische Scheibe, *Q* den Krummzapfen für den Angriff der Treibstange, *T* die an einem um die excentrische Scheibe gezogenen Ringe befestigte Lenkstange bedeutet: diese bewirkt mittelst des Winkelhebels *UU* die Erhebung des beweglichen Schiebers *F*, oder aber dessen Senkung, wodurch im Cylinder *BB* der Dampf bald oberhalb, bald unterhalb des Kolbens einströmt. Statt der Schiebersteuerung besitzen manche Dampfmaschinen die Hahnsteuerung, von der bereits (1235) die Rede war, und die Kolbensteuerung die weiter unten beschrieben wird.

Digitized by Google

1335 **Erklärung.** Die Watt'sche doppelt wirkende Dampfmaschine ist in (Fig. 326) im vertikalen Durchschnitte und (Fig. 327) im Grundrisse abgebildet. Zwischen den doppelten Wänden des Cylinders *AABB* ist der Dampf enthalten, welcher durch das Drosselventil *C* der Dampfröhre eintritt. Die Figur bezeichnet die Stellung des Schiebers *F* beim Eintritt des Dampfes durch den Durchgang *D* oberhalb des Kolbens, indem der unterhalb desselben befindliche Dampf durch den mit Pfeilen bezeichneten Weg *GH* in den Kondensator *I* entweicht: durch die vereinigte Wirkung des in *D* eintretenden und des in *I* kondensirten Dampfes geht der Kolben *C* abwärts. Der Kondensator ist mit der Luftpumpe *K* in Verbindung, deren Kolbenstange an dem Balancier hängt, sie dient zur Wegschaffung der im Kondensator sich anhäufenden atmosphärischen Luft. Wie der Dampf in den Kondensator anlangt, drückt er an das Ventil des Behälters *L*, das Injektionsventil und alsogleich spritzt eine mit einem durchlöcherten Kopfe, wie bei einer Gießkanne, endigende Röhre, Wasser in vielen zertheilten Strahlen in den Kondensator ein, wodurch dem Injektionswasser eine möglichst große Berührungsfläche mit dem Dampfe dargeboten wird, in Folge dessen der Dampf schnell in Wasser von gleicher Temperatur umgewandelt und somit im Kondensator ein nahe luftleerer Raum erzeugt wird. *LL* bedeutet den mit einem Gewicht belasteten Winkelhebel zur Sperrung des Injektionsventils. Damit aber das den Kondensator umgebende Injektionswasser, durch die in ihm entstehende Wärme nicht selbst zu sehr erhitzt wird, muß es fortdauernd erneuert werden, dies bewirkt eine besondere Pumpe *N*, die Kaltwasserpumpe, deren Kolbenstange an dem Balancier befestigt ist. Mit ihrem Saugrohre steht sie im Brunnenwasser, pumpt dieses in den Behälter, welcher den Kondensator umgibt, dies sinkt wegen des größeren spezifischen Gewichtes darin unter und nöthiget das wärmere Wasser zum Ueberfließen in den Stiefel der Luftpumpe, aus dem es durch eine Ausgußröhre in den Behälter *M* gelangt, und durch die Warmwasserpumpe *M* in den Dampfkessel gefördert wird. *O* ist das Watt'sche Parallelogramm, *V* der Regulator, dessen Lenkstange bereits beschrieben wurde (656), *R* das

Schwungrad, Q der Krummzapfen und P die Treibstange des Balanciers.

1336. Aufgabe. Die Relation zwischen den kubischen Inhalten des Dampfes, welche aus derselben Wassermenge entstehen, und den Drückungen, welche derselbe auf die Flächeneinheit ausübt, aufzustellen.

Auflösung. Heißt S das Volumen Wasser, welches in Dampf verwandelt, unter dem Drucke p auf die Flächeneinheit das Volumen M, und bei einem Drucke p', das Volumen M' einnimmt; so hat man $M : M' = m + np : m + np$.

Beweis. Nach (1249) ist das relative Volumen $\omega = 1 : (m + np)$ also gibt eine Wassermenge S unter dem Druck p ein Dampfvolumen $\omega S = S : (m + np)$, und unter dem Drucke p' ein Dampfvolumen $\omega S = S : (m + np')$; man hat also

$$M = S : (m + np),\ M' = S : (m + np'),\ \text{somit}$$

$$M : M' = m + np' : m + np.$$

1337. Folgesatz. Bestimmt man hieraus bei gegebenen Werthen von M, M', p' den Druck p, so ergibt sich

$$p = \frac{M'}{M}\left(\frac{m}{n} + p'\right) - \frac{m}{n}.$$

1338. Aufgabe. Bei einer unter beliebigem Drucke in dem Kessel mit Expansion und Kondensation arbeitenden Dampfmaschine (Nieder- oder Hochdruckmaschine) den zur Ueberwältigung der Reibung und anderer Widerstände der Maschine erforderlichen Druck auf die Flächeneinheit des Kolbens zu bestimmen.

Auflösung. Sei p der Druck des Dampfes im Kessel, und p' dieser Druck im Cylinder vor der Absperrung des Dampfes, und q derjenige Druck auf die Flächeneinheit des Kolbens, der in irgend einem Augenblicke nach der Absperrung daselbst Statt

Digitized by Google

hat, und im Stande ist, alle Widerstände der Maschine zu gewältigen; sei ferner l die Länge eines Kolbenhubes, h der Weg, welchen der Kolben von dem Anfange seines Laufes bis zum Augenblicke zurücklegt, wo die Absperrung eintritt, sei endlich c die Länge eines Cylinders vom gleichen Halbmesser mit dem Kolben, dessen Inhalt dem nach Beendigung des Kolbenlaufes frei bleibenden schädlichen Raume des Cylinders gleich ist; so hat man

$$ql=(h+c)\left(\frac{m}{n}+p'\right)\left(\frac{h}{h+c}+\lambda\frac{l+c}{h+c}\right)-\frac{ml}{n}.$$

Beweis. Wenn der Kolben in der vom Anfange des Laufes verstrichenen Zeit t einen Raum x durchlaufen hat, so bewegt er sich in dem folgenden Zeitmomente dt durch einen Raum dx, und seine Arbeitsgröße ist, wenn der Halbmesser des Kolbens mit r bezeichnet wird, $\pi r^2q\,dx$. Es ist aber der Raum, welchen der Dampf im Augenblicke der Absperrung einnimmt, gleich $\pi r^2(h+c)$, und in demjenigen Augenblicke wo der Druck gleich q ist, nimmt er einen Raum $\pi r^2(x+c)$ ein, mithin hat man nach (1337)

$$q=\left(\frac{m}{n}+p'\right)\frac{h+c}{x+c}-\frac{m}{n}$$

hiermit erhält man die Arbeitsgröße

$$\pi r^2q\,dx=\pi r^2(h+c)\left(\frac{m}{n}+p'\right)\frac{dx}{x+c}-\frac{m\pi r^2dx}{n}.$$

Integrirt man diesen Ausdruck von $x=h$, bis $x=l$, so ergibt sich

$$\pi r^2q(l-h)=\pi r^2(h+c)\left(\frac{m}{n}+p'\right)\lambda\frac{(l+c)}{h+c}-\frac{m\pi r^2(l-h)}{n}.$$

Da diese Größe, die während der Expansion verrichtete Arbeit vorstellt, so erhält man die während des ganzen Kolbenlaufes von dem Dampfe geleistete Arbeit, wenn man hiezu den vor der Absperrung hervorgebrachten Effekt $\pi p'r^2h$ addirt; hiedurch wird der Totaleffekt während eines Kolbenlaufes, wenn man unter q denjenigen Druck versteht, der bei einer gleichförmigen Bewegung

Digitized by Google

der Maschine Statt hätte, sich durch $\pi r^2 ql$ vorstellen lassen, und man hat

$$\pi r^2 ql = \pi r^2(h+c)\left(\frac{m}{n}+p'\right)\lambda\frac{l+c}{h+c} - \frac{m\pi r^2 l}{n} + \frac{m\pi r^2 h}{n} + \pi p' r^2 h$$

$$\text{allein } \frac{m\pi r^2 h}{n} + \pi p' r^2 h = \frac{\pi r^2 h(h+c)}{h+c}\left(\frac{m}{n}+p'\right)$$

woraus sofort der geforderte Ausdruck folgt.

1339. Folgesatz. Wirkt die Dampfmaschine ohne Expansion, dann ist $h=l$, und es ergibt sich

$$ql = \left(\frac{m}{n}+p'\right)l - \frac{ml}{n} = p'l, \text{ also } q=p' \text{ wie es sein soll.}$$

1340. Aufgabe. Aus der in einer Minute verbrauchten Wassermenge, ferner aus dem gegebenen Dampfdrucke auf die Flächeneinheit, dem Kolbenhube, und dem Kolbenwege bis zur Absperrung, die Geschwindigkeit des Kolbens zu bestimmen.

Auflösung. Diese ist, wenn S die in einer Minute verbrauchte Wassermenge bezeichnet

$$v = \frac{S}{\pi r^2(m+nq)}\left[\frac{h}{h+c}+\lambda\frac{l+c}{h+c}\right].$$

Beweis. Es ist das in einer Minute erzeugte Volumen Dampf $\omega S = S : (m+np')$, und wenn in dieser Zeit t Kolbenläufe Statt haben, da bei jedem ein Volum Dampf gleich $\pi r^2(l+c)$ verwendet wird, so ist $\pi r^2 t(l+c)$ das in einer Minute in den Cylinder übergetretene Dampfvolum, man hat also

$$S : (m+np') = \pi r^2 l(l+c) \text{ allein } v = tl$$

$$\text{mithin } v = lS : (m+np')\pi r^2(l+c).$$

Setzt man hierin den Werth von $m+np'$ aus (1338), so reduzirt sich v auf den angegebenen Werth.

1341. Erklärung. Der Widerstand einer Dampfmaschine besteht aus drei Theilen, aus dem von der Bewegung der La-

Digitized by Google

dung, welchen wir Q nennen wollen, aus dem von der eigenen Reibung der Maschine herrührenden Widerstande $\mathfrak{R}+\mu Q$, wo $\mathfrak{R}$ die Reibung der Maschine und μ die Zunahme dieser Reibung für die Einheit der Ladung bedeutet, endlich aus dem Drucke, welchen die derjenigen, auf welche der Dampf wirkt entgegengesetzte Kolbenfläche erleidet, und welchen wir mit q' bezeichnen wollen, so daß diese letztere Größe den atmosphärischen Druck bedeutet, wenn die Maschine ohne Kondensation wirkt, oder blos den Druck im Cylinder wegen der nichtvollständigen Kondensation bezeichnet. Alle diese Größen Q, $\mathfrak{R}$, μQ und q' beziehen sich auf die Einheit der Kolbenfläche.

1342. *Folgesatz.* Man hat also $q=Q+\mathfrak{R}+\mu Q+q'$, und wenn man zur Abkürzung die Größe

$$\frac{h}{h+c}+\lambda\frac{l+c}{h+c}=k \text{ setzt}$$

so verwandelt sich der Werth für v (1339) in

$$v=\frac{Sk}{\pi r^2[m+n(Q+\mathfrak{R}+\mu Q+q')]}.$$

1343. *Folgesatz.* 2. Hieraus ergibt sich ferner

$$\pi r^2 Q=\frac{Sk}{(1+\mu)vn}-\frac{\pi r^2}{1+\mu}\left(\frac{m}{n}+\mathfrak{R}+q'\right)$$

der Widerstand, welchen eine gegebene Maschine mit einer gegebenen Geschwindigkeit zu bewegen im Stande ist, und die erforderliche Wassermenge

$$S=\frac{v\pi r^2[m+n(Q+\mathfrak{R}+\mu Q+q')]}{k},$$

wornach man bei dem Dampfkessel, den man anwenden will, die Größe der Heitzfläche bestimmen kann, welche man dem Kessel der Maschine geben muß, um die gewünschte Wirkung zu erhalten.

1344. *Folgesatz.* Den Nutzeffekt der Maschine E zu finden, braucht man blos den Werth von $\pi r^2 Q$ (1342) mit v zu mul-

Digitized by Google

tipliziren, dies gibt

$$E=\frac{Sk}{(1+\mu)n}-\frac{\pi r^2 v}{1+\mu}\left(\frac{m}{n}+\Re+q'\right)$$

welcher auf die bekannte Weise auch in Pferdekräften bestimmbar ist.

1345. Anmerkung. Für die numerische Berechnung dieser Formeln, folgt hier die von *Pambour* berechnete Hülfstafel der Größe k, für Werthe von $h=0.1$, bis $h=0.9$ in Tausendteln der Größe $l=1$.

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.1	2.613	2.569	2.526	2.485	2.446	2.408	2 371	2,336	2.301	2.268
0.2	2.235	2,203	2.173	2,142	2.114	2,085	2 059	2 032	2,006	1.980
0,3	1,955	1.931	1.908	1.884	1.862	1.840	1.818	1.797	1.776	1.755
0.4	1.736	1.716	1.697	1.678	1.669	1.642	1.624	1.606	1.589	1.572
0.5	1.555	1.539	1.523	1.507	1.491	1.476	1.461	1.445	1.431	1.417
0.6	1.402	1.388	1.374	1.361	1.347	1.334	1.321	1.308	1.295	1 282
0.7	1.269	1.257	1.240	1.233	1.221	1,210	1.197	1.186	1.175	1.164
0.8	1.152	1.141	1.131	1.119	1.109	1.099	1.088	1.078	1.067	1.057

1346. Lehrsatz. Bei der doppelt wirkenden Watt'schen Dampfmaschine erhält man, wenn die bisherige Bezeichnung beibehalten wird, die Geschwindigkeit v

$$v=\frac{Sl}{\pi r^2(l+c)[m+n(Q+\Re+\mu Q+q')]}.$$

Beweis. Da diese Maschine ohne Expansion wirkt, so ist $h=l$, mithin $k=l:(l+c)$, mit diesen Werthen folgt aus (1342) v wie oben.

1347. Folgesatz. Durch Auflösung dieser Gleichung für v ergeben sich sofort noch die Ausdrücke:

$$\pi r^2 Q=\frac{Sl}{(l+c)(1+\mu)nv}-\frac{\pi r^2}{1+\mu}\left(\frac{m}{n}+\Re+q'\right)$$

$$S=v\pi r^2[m+n(Q+\mu Q+\Re+q')](l+c):l$$

Digitized by Google

$$E = \frac{Sl}{(l+c)(1+\mu)r} = \frac{\pi r^2 v}{1+\mu}\left(\frac{m}{n} + \Re + q'\right)$$

wo zur numerischen Berechnung $(l+c) : l = 1.05$, und für englisches Fußmaß $m = 0.0001421$, $n = 0.00000023$, $\mu = 1/7$ und im Mittel für den Quadratzoll $\Re = 0.5$ Pfunde zu setzen kommt.

1348. Erklärung. Die Woolf'schen und Edwards'schen Dampfmaschinen unterscheiden sich von den bisher betrachteten im Wesentlichen darin, daß die Expansion des Dampfes in zwei ungleich großen Cylindern, welche dieselbe Dampfmenge nach einander durchströmt, indem er sich immer mehr ausdehnt, bewirkt wird. Die Figuren 328 bis 335 dürften eine Vorstellung der Edwards'schen eben nicht einfachen Dampfmaschine geben. Die Figuren 328 und 329 liefern, und zwar die erstere eine äußere Ansicht der Dampfmaschine mit Hinweglassung des Balanciers, die andere ihren Grundriß, hiebei bezeichnen in allen Figuren einerlei Buchstaben dieselben Bestandtheile. *A* ist der kleinere, *B* der größere Dampfcylinder, *G*, *G* sind ihre Stopfbüchsen, *CC* ist ein großer cylindrische Raum, welcher die Steuerung den Kondensator und die Dampfkammer *HH* einfaßt, *D* ist die unmittelbar aus dem Kessel führende Dampfröhre.

1349. Anmerkung. Die Figur 330 stellt den vertikalen Durchschnitt beider Cylinder geführt nach der Linie *rr* ihres Grundrisses (Fig. 331), welcher durch einen horizontalen Querschnitt beider Cylinder nach der gebrochenen Linie *ss* entstanden ist, eben so bedeutet (Fig. 332) den vertikalen Durchschnitt des kleineren Cylinders nach der Linie *tt* (Fig. 333) seines Grundrisses, welcher als Querschnitt von jenem nach der Linie *uu* zum Vorschein kommt. Wir bemerken im Grundrisse (Fig. 331) die Oeffnungen *a*, *b*, welche die Mündungen zweier Dampfwege bezeichnen, deren erstere in Fig. 332 aus dem Raume unter dem Kolben des kleinen Cylinders zu dem Raume oberhalb des Kolbens im größeren Cylinder führt, der andere aber den im letzteren bereits verbrauchten Dampf in den Kondensator leitet. *E* und *F* sind die Kolben beider Cylinder, welche in den Stopfbüchsen *G*, *G* dampfdicht auf- und niedergehen.

Digitized by Google

1350. Folgesatz. So wie der Dampf aus dem Kessel durch die Dampfröhre *D* in den kleinen Cylinder einströmt, breitet er sich in dem Raume *d* (Fig. 330) zwischen den Doppelwänden desselben aus, und tritt durch den Kanal *d* (Fig. 332) in den Raum *A* oberhalb des Kolbens, wo er während eines Theiles des Kolbenlaufes mit vollem Drucke wirkt: dann wird die Verbindung mit dem Kessel aufgehoben, der bereits in den Cylinder eingetretene Dampf expandirt sich darin so lange, bis er den Kolben *E* in seinen tiefsten Stand herabgedrückt hat. In diesem Augenblicke wird vermittelst des Vierwegehahnes *g* (Fig. 333) und (Fig. 334) zwischen dem oberen Theile des kleinen Cylinders und dem unteren Theile des größeren Cylinders eine Verbindung hergestellt, der Dampf, welcher den Raum über dem Kolben jenes Cylinders füllte, tritt also zum Theil in den großen Cylinder unter den Kolben *F*, welchen er vermöge seiner Expansivkraft aufwärts treibt: aber gleichzeitig als die eben gedachte Verbindung zwischen den beiden Cylindern eintritt, wird neuer Dampf aus dem Kessel unter den Kolben des kleinen Cylinders geleitet, wodurch auch dieser aufwärts steigt. Die beiden Kolben bewegen sich also jetzt zugleich aufwärts, und nachdem der Dampf seine Wirkung in dem großen Cylinder verrichtet hat, tritt er in einen besonderen Behälter wo er kondensirt wird, da dann das Spiel derselben von Neuem beginnt. Es bewegen sich also beide Kolben gleichzeitig auf und nieder.

1351. Erklärung. Eine Steuerung heißt eine Kolbensteuerung, wenn dieselbe durch Kegelventile, welche in die ähnlich geformte Apperturen eines Gefäßes dampfdicht passen, gerichtet wird. Die Figuren 334 und 335 geben eine Ansicht einer Kolbensteuerung, wo die gegen einander gekehrten Kegel den Raum *i* der Dampfkammer oben oder unten verschließen, hierunter sitzt der obere Kegel *h* an einem hohlen Cylinder fest, innerhalb dessen die Axe des unteren Kegels *h'* hindurchgeht, und es können diese Ventile eine solche Stellung erhalten, daß der Raum *i* bald oben, bald unten offen steht, welches durch die Federn *KK* vermittelt wird. Ferner bemerken wir an den Fig. 328 und 329 die excentrische Scheibe *m*, welche

Digitized by Google

ihre Umdrehung um den Punkt n durch die Kurbelaxe erhält, wodurch die Stangen o, p eine auf- und niedersteigende Bewegung annehmen, jene öffnet und sperrt die Kolbenventile h, h', diese regulirt die Bewegung des Vierwegehahnes g. In der Stellung dieses Hahnes (Fig. 334) kommuniziret der Raum c unter dem Kolben des kleinen Cylinders mit dem Raume h der Dampfkammer, aus welchem der Dampf über den Kolben des großen Cylinders geleitet wird, um denselben abwärts zu bewegen.

1352. Aufgabe. Den Druck auf die Flächeneinheit des kleinen Cylinders in der Woolf'schen oder Edwards'schen Dampfmaschine zu bestimmen, wenn die Spannung des Dampfes allen Hindernissen der Bewegung das Gleichgewicht hält.

Auflösung. Seien R, r, die Halbmesser der beiden Cylinder, L, l die Längen eines Kolbenhubes, und C, c die Längen zweier Cylinder von beziehungsweise gleichem Halbmesser R, r mit jenen, welche dem Inhalte des schädlichen Raumes derselben gleich kommt, h der vom Kolben des kleineren Cylinders bis zum Augenblicke der Absperrung zurückgelegte Weg, p der Druck auf die Flächeneinheit im Kessel, p' derselbe auf den Kolben vor der Absperrung und q der gesuchte mittlere Druck auf den Kolben nach der Absperrung, so hat man

$$q=\frac{(h+c)}{l}\left(\frac{m}{n}+p'\right)\left[\frac{h}{h+c}+\lambda\frac{l+c}{h+c}+\lambda\frac{R^2(L+C)+r^2c}{r^2(l+c)+R^2C}\right]$$
$$-LmR^2:lnr^2.$$

Beweis. Multiplizirt man den in (1338) für die Arbeitsgröße des Dampfes auf die Flächeneinheit erhaltenen Ausdruck mit dem Querschnitte des Cylinders πr^2, so findet man die Arbeitsgröße des direkt in den kleinen Cylinder getretenen und durch die Expansion denselben ausfüllenden Dampfes

$$I.\ \pi r^2(h+c)\left(\frac{m}{n}+p'\right)\left[\frac{h}{h+c}+\lambda\frac{l+c}{h+c}\right]-\frac{mnr^2l}{n}.$$

Hat der Kolben des kleinen Cylinders in irgend einem Augenblicke nach der Absperrung vom Anfange des Cylinders einen Weg x beschrieben, so ist, da die beiden Kolbenläufe L und l in den beiden Cylindern während derselben Zeit vollendet werden (1350), der gleichzeitig vom großen Kolben zurückgelegte Weg $Lx : l$, und folglich ist der Raum des ausgedehnten Dampfes, welcher sich sowohl über dem großen als unter dem kleinen Kolben befindet, gleich

$$\pi R^2\left(\frac{Lx}{l}+C\right)+\pi r^2(l-x+c)=\pi\frac{(R^2L-r^2l)x}{l}$$
$$+\pi r^2(l+c)+\pi R^2C$$

oder wenn man Kürze halber

$$\frac{R^2L-r^2l}{l}=N,\ r^2(l+c)+R^2C=O \text{ setzt,}$$

diese Größe gleich $\pi(Nx+O)$

dieser Ausdruck ist also der Werth des unter dem Drucke q wirklich eingenommenen Dampfvolumens: andererseits nahm der Dampf unter dem Drucke p' ein Volumen $\pi r^2(h+c)$ ein, und man hat nach (1337)

$$q=\frac{\pi r^2(h+c)}{\pi(Nx+O)}\left(\frac{m}{n}+p'\right)-\frac{m}{n}$$

Multiplizirt man diesen Ausdruck mit $\pi R^2Ldx : l$ und nimmt das Integrale desselben von $x=o$, bis $x=l$, so ergibt sich der Werth, der durch die Expansion des Dampfes von dem Anfange bis zum Ende des Kolbenlaufes auf den großen Kolben hervorgebrachten Totalarbeit

$$II.\ \pi r^2(h+c)\left(\frac{m}{n}+p'\right)\frac{R^2L}{Nl}\lambda\frac{Nl+O}{O}-\frac{\pi mR^2l}{n}$$

multiplizirt man aber den Werth für q mit πr^2dx, und integrirt das Produkt von $x=o$ bis $x=l$, so erhält man die Größe der durch den Widerstand des Dampfes hervorgebrachten Wirkung, welchen der kleine Kolben von dem Anfange seines Laufes bis an

Digitized by Google

das Ende desselben zu erleiden hat

$$III.\ \pi r^2(h+c)\left(\frac{m}{n}+p'\right)\frac{r^2}{N}\lambda\,\frac{Nl+O}{O}-\frac{\pi m}{n}r^2l.$$

Vereiniget man die Ausdrücke *I.* und *II.* in eine Summe, und zieht *III* ab, so ergibt sich die Arbeitsgröße des Dampfdruckes q oder

$$\pi r^2ql=\pi r^2(h+c)\left(\frac{m}{n}+p'\right)\left[\frac{h}{h+c}+\lambda\frac{l+c}{h+c}+\frac{R^2L-r^2l}{Nl}\lambda\,\frac{Nl+O}{O}\right]$$
$$-m\pi R^2L:n$$

und nach Substituirung der für N und O angenommenen Werthe erhält man q wie oben.

1353. Folgesatz. Bezeichnet man mit q' den Druck auf die Flächeneinheit, welcher noch in dem mit dem Kondensator kommunizirenden Cylinder Statt hat, so ist derselbe $\pi q'R^2$; heißt ferner M die durch die Maschine in Bewegung gesetzte Last, und w die Länge, um welche dieselbe während eines Kolbenlaufes bewegt wird, so ist ihre Wirkung auf die Maschine offenbar Mw: sei noch die Reibung in den beiden Cylindern beziehungsweise durch r, R vorgestellt, demnach wird $\pi(r^2rl+R^2RL)$ die während eines Kolbenlaufes durch diese beiden Widerstände hervorgebrachte Arbeit, wenn endlich μ die Zunahme der Reibung für jede Gewichtseinheit der Last M bedeutet; so ergibt sich für die Größe aller Widerstände der Ausdruck

$$W=(1+\mu)Mw+\pi(r^2rl+R^2RL+q'R^2).$$

Man hat also, wenn q den Druck auf die Flächeneinheit des kleineren Kolbens bezeichnet, zu dessen Bestimmung die Gleichung

$$\pi r^2ql=\pi r^2(h+c)\left(\frac{m}{n}+p'\right)\left[\frac{h}{h+c}+\lambda\frac{l+c}{h+c}+\lambda\frac{R^2(L+C)+r^2c}{r^2(l+c)+R^2C}\right]$$
$$-\frac{\pi mR^2L}{n}-W.$$

Digitized by Google

1354. Aufgabe. Aus der in einer Minute verbrauchten Waſſermenge dem Widerſtande und dem Drucke auf die Flächeneinheit, die Geſchwindigkeit beider Kolben zu beſtimmen.

Auflöſung. Setzt man mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung Kürze halber

$$\frac{h}{h+c}+\lambda\frac{l+c}{h+c}+\lambda\frac{R^2(L+C)+r^2c}{r^2(l+c)+R^2C}=k'$$

und ſetzt die Geſchwindigkeit des kleinen Kolbens v, die des großen Kolbens V: ſo ergibt ſich

$$v=\frac{lSk'}{\pi(mR^2L+nr^2ql)+Wn},\quad V=\frac{Lv}{l}.$$

Beweis. Wenn S das Volumen Waſſer bedeutet, welche der Keſſel in einer Minute verdampft, ſo wird das Volumen des daraus unter dem Drucke p' gebildeten Dampfes $S:(m+np')$: wenn ferner v die Geſchwindigkeit des Kolbens iſt; ſo hat eben dieſes Volumen noch den Werth $\pi vr^2(h+c):l$ es iſt daher

$$\frac{S}{m+np'}=\frac{\pi vr^2(h+c)}{l}$$

aber nach (1353) hat man

$$\pi r^2ql=\pi r^2(h+c)\left(\frac{m}{n}+p'\right)k'=\frac{\pi mR^2L}{n}+W$$

eliminirt aus dieſen beiden Gleichungen die Größe $m+np'$, ſo erhält man v, und wegen $V:v=L:l$ ſofort auch V wie oben.

1355. Anmerkung. *Pambour*, dem wir in der Darſtellung der theoretiſchen Beſtimmungen der Lokomotive und ſtehenden Dampfmaſchinen gefolgt ſind, betrachtet bei jeder Gattung dieſer Maſchinen noch ihren größten Nutzeffekt, indem er, da (1344) v in dem negativen Gliede dieſes Ausdruckes vorkommt, $v=o$ annimmt, und nebſtdem für die Größe q, welche den Dampfdruck auf die Flächeneinheit des Kolbens im Cylinder bedeutet, die Größe p oder

Digitized by Google

den Dampfdruck im Kessel setzt: allein diese Annahmen scheinen uns illusorisch. Erstlich ist das Produkt zweier Faktoren M, v nicht ein Größtes sondern ein Kleinstes, wenn einer derselben null ist. Sodann kann die Größe q nie den Werth von p erreichen, außer im Falle, daß der Kessel ein unendliches Volumen hätte, und keine Absperrung des Dampfes vorgenommen würde, wodurch die vorausgesetzte Expansion sofort aufgehoben wäre. Unseres Erachtens wächst der Nutzeffekt der Dampfmaschinen mit der Spannung des Dampfes beständig ohne Ende fort, und hat sonach kein Maximum. Eine Theorie der einfach wirkenden Dampfmaschinen findet man im zehnten Kapitel des Werkes: Neue Theorie der Dampfmaschinen von *P. M. G. de Pambour*. Deutsch bearbeitet von D. E. H. Schnase, Braunschweig 1839, und in der schon öfters angeführten Mechanik von Kayser. Eine Beschreibung von Dampfmaschinen verschiedener Gattung kann man im zweiten Bande des Werkes: *Traité de Mécanique industrielle par M. Christian. Paris* 1825 4. dann im *Traité complet des machines a vapeur appliquées à l'industrie par Janvier Bruxelles* 1838. 12 und *Manuel du constructeur de chemins de fer par M. Ed. Biot. Bruxelles* 1838. 12. und im Tredgold's oben a. Werke über Dampfmaschinen nachschlagen.

1356. Erklärung. Die Dampfkessel für Niederdruckmaschinen haben entweder die bekannte Gestalt eines großen Reisekoffers mit einwärts gebogenen Boden und Seitenwänden Kofferkessel, oder die eines Cylinders mit zwei halbkugelförmigen Böden (Fig. 336 und 337 Tafel *XVII*), durch welchen eine oder zwei cylindrische Heitzröhren gezogen sind, cylindrische Dampfkessel, die letzteren sind auch für Hochdruckmaschinen anwendbar. Man nennt die vom Feuer bestrichene Fläche eines Kessels, wobei aber die Fläche der Heitzröhren nur zu $^2/_3$ ihrer Oberfläche gerechnet wird, dessen Heitzfläche, und die Menge Wasser, welche ein Kessel in einer bestimmten Zeit in Dampf umzuwandeln vermag, dessen Verdampfungskraft.

Digitized by Google

1357. Anmerkung. Die Kofferkeſſel bieten den Vortheil, daß ſich der Pfannenſtein nicht unmittelbar an den Boden anſetzen kann, indem die erdigen Theile des Waſſers ſich in die tieferen Ränder des Keſſels ablagern: zur Verhütung ihrer Ausbauchung erhalten die Wände des Keſſels innere Verankerungen von Schmiedeeiſen. Die Fig. 337 ſtellt einen Keſſel für Hochdruckmaſchinen vor, bei dem der Druck auf den Quadratzoll 38¼ Pfund oder 3 Atmoſphären gleich iſt, aber auch auf 4 Atmoſphären geſteigert werden kann. Die Blechdicke ſeiner Oberfläche unmittelbar über dem Feuer iſt 0.″58, nach hinten 0.″47, oben im Dache 0.″38: er hält 4 Fuß im lichten Durchmeſſer und 18 Fuß in der Länge, und dient zu einer zehnpferdigen Dampfmaſchine. Dieſe Art Keſſel iſt ſowohl einfach als ſtark, und geſtattet eine gute Feuerung: nur dürfen ſie nicht über 4 Fuß im Durchmeſſer halten, denn alsdann müſſen die Platten an der unteren Oberfläche den geſetzlichen Beſtimmungen gemäß zu dick werden, wie folgende für Oeſterreich geltende Tafel nachweiſet:

Tafel der Blechdicke der Keſſel in Wiener Linien, deren Durchmeſſer in Wiener Zollen, und Druck in Athmoſphären gegeben iſt.

Druck	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54
	Blechdicke in Zehnteln einer Wiener Linie																	
2	18	18	19	19	20	20	20	21	21	22	22	23	23	24	24	25	25	26
3	22	23	24	25	26	27	28	29	29	30	31	32	33	34	35	36	37	37
4	27	28	29	31	32	33	35	36	37	39	40	41	43	44	45	47	48	49
5	31	33	35	37	38	40	42	44	45	47	49	51	52	54	56	58	59	61
6	36	38	40	42	44	47	49	51	53	55	58	60	62	64	66	69	71	73
7	40	43	45	48	51	53	56	59	61	64	66	69	72	74	77	80	82	85
8	44	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	78	81	84	88	91	94	97

z. B. Ein Keſſel von 36 Zoll im Durchmeſſer muß bei 6 Atmoſphären Dampfdruck eine Blechdicke von 5.3 W. Linie haben.

1358. Anmerkung 3. Man nimmt die Länge des Keſſels 5 bis 7mal ſo groß als der Durchmeſſer iſt, und wendet dann zwei

Digitized by Google

Kessel an, wenn einer bei diesen Verhältnissen nicht zureicht: die Heitzröhren erhalten stets einen Durchmesser zwischen 12 und 18 Zoll, damit ein Arbeiter (gewöhnlich ein Knabe) zur Beseitigung des sich ansetzenden Rußes hineinkriechen kann. Eben so müssen die inneren Kesselräume weit genug sein, um in dieselben zum Behufe der Reinigung gelangen zu können.

1359. Erklärung. Der Woolf'sche Kessel, für Hochdruckmaschinen bestimmt, enthält statt den Heitzröhren, zwei cylindrische Röhren *d* (Fig. 338 und 339 Tafel *XVIII*) vom kleineren Durchmesser, welcher vermittelst zweier kurzen cylindrischen Röhren *ee* mit dem Kessel *c* dampfdicht verbunden sind. Man nennt diese mit Wasser gefüllten und ganz vom Feuer umgebenen Röhren die Sieder oder Siederöhren. In der Figur 338 bezeichnet *ab* den Wasserstand des Kessels, *c* dessen Dampfraum *dd* die Sieder, *ee* die Verbindungsröhren.

1360. Folgesatz. Die Vortheile dieser Konstruktion sind: 1. man darf nur dünne Platten zu den Siedern verwenden, weil solche einen geringen Durchmesser von 1 bis 2 Fuß besitzen, 2. der Ofen kann günstiger gebaut werden, 3. der Hauptkessel leidet nicht so sehr, und die Reparaturen sind leichter herzustellen, endlich 4. vergrößern die Sieder die Heitzfläche des Kessels um mehr als $^2/_3$ ihrer Oberfläche.

1361. Anmerkung. Die Verbindungsröhren *ee* dürfen ebenfalls nicht unter 12 Zoll im Durchmesser halten. Bei den Cornwallis'schen Dampfmaschinen befinden sich an den Kesseln nebst den Siedern auch noch die Heitzröhren.

1362. Aufgabe. Zu untersuchen, ob ein Dampfkessel die beabsichtigte erforderliche Stärke besitzt.

Auflösung. Nach den bestehenden Vorschriften muß jeder Dampfkessel mit zwei Sicherheitsventilen versehen sein, deren eines außer dem Bereiche des Maschinisten gestellt ist. Nachdem man alle Oeffnungen im Kessel bis auf die beiden Ventilöffnungen geschlossen hat, füllt man denselben mit Wasser, mißt den Durchmesser der kreisförmigen Oeff-

Digitized by Google

nung des einen Ventiles genau, und belastet dasselbe mit dem dreifachen Gewichte, als die höchste Dampfspannung, welche der Kessel aushalten soll, erfordert (1284) und pumpt mittelst einer Druckpumpe, wofür in vielen Fällen die Feuerspritze dienen kann, so lange Wasser in den Kessel, bis es aus der so belasteten Ventilöffnung rings herum strahlenförmig in Gestalt eines hohlen Wassercylinders auszuspritzen anfängt. Von dieser bei der Probe angewandten Belastung dienet der dritte Theil und bei Lokomotiven die Hälfte als normale oder höchste Belastung des Sicherheitsventils beim Gebrauche dieses Kessels, welche sofort von der zur Prüfung des Kessels abgeordneten Kommission mit einem Stempel an der Maschine bezeichnet wird.

1363. Anmerkung. Zur Bestimmung der Oeffnung des Sicherheitsventils dient die Erfahrung, daß man bei lebhaft brennenden Feuer auf jeden Wiener Quadratfuß Heitzfläche 17.84 W. Pfunde Dampf in einer Stunde erzeugen kann. Berechnet man daher aus dem Dampfdrucke im Kessel die Geschwindigkeit, mit welcher der Dampf durch das offene Ventil strömt nach (994), und dividirt in die gefundene Dampfmenge, so erhält man den Inhalt der Oeffnung, woraus sich auch der Durchmesser leicht ergibt.

Tafel der Durchmesser in Zehnteln eines Wiener Zolles für die kreisförmigen Oeffnungen der Sicherheitsventile, wenn der höchste im Kessel Statt findende Dampfdruck in Atmosphären, und die Heizfläche des Kessels in Wiener Quadratfußen gegeben ist.

Druck	Heitzfläche in Wiener Quadratfußen														
	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300
	Durchmesser der Ventile in Zehnteln Zoll														
$1^1/_2$	13	19	23	27	30	32	35	38	40	42	44	46	48	50	25
2	11	16	19	22	25	27	29	31	33	35	37	38	40	41	43
$2^1/_2$	10	11	17	19	22	24	26	27	29	31	32	34	35	36	37
3	9	12	15	17	19	21	23	25	26	27	29	30	31	33	34
$3^1/_2$	8	11	14	16	18	19	21	23	24	25	26	28	29	30	31
4	7	10	13	15	17	18	20	21	22	23	24	26	27	28	29
$4^1/_2$	7	10	12	14	15	17	19	20	21	22	23	24	25	26	27
5	7	9	11	13	15	16	17	18	20	21	22	23	24	24	25
$5^1/_2$	6	9	11	12	14	15	16	18	19	20	21	22	22	23	24
6	6	8	10	12	13	15	16	17	18	19	20	21	21	22	23

Digitized by Google

Die Ventile dürfen wohl größer aber in keinem Falle kleiner sein, als die Werthe dieser Tafel es verlangen. In der That sollten die Ventile auch für die größte Spannung des Dampfes nicht kleiner gestattet werden, wie die für den Druck von $1^1/_2$ Atmosphäre angegebenen, z. B. für eine Heitzfläche von 180 Quadratfuß und bei einem Dampfdruck von 3 Atmosphären ist der erforderliche Durchmesser des Sicherheitsventils 2″.6.

1364. Erklärung. Eine jede Dampfkesselfeuerung zerfällt in folgende drei Haupttheile: 1. den Feuerraum oder die Esse, 2. die Kanäle oder Züge, welche die Flamme, den Rauch und die unzersetzte Luft 3. in den Schornstein führen, der zugleich jene Produkte der Verbrennung nicht nur schnell abzuleiten, sondern auch die erforderliche Luftströmung zu unterhalten hat.

1365. Erklärung. In der Esse bildet der Rost die Hauptsache: auf ihm liegt der Brennstoff ausgebreitet, durch die Zwischenräume seiner Stäbe zieht die Luft ein, und indem sie einen Theil ihres Sauerstoffes an den erhitzten Brennstoff abgibt, unterhält sie die Verbrennung. Dieser Rost besteht nun aus 12 bis 18 Stäben, den Roststäben, welche 1 bis $1^1/_2$ Zoll breit sind, und für Steinkohlen mit Zwischenräumen von $^1/_2$ Zoll auf einem gußeisernen Stabe in abgesonderten Lagern aufgelegt werden; demnach wird der Roststab dreimal so breit als die Oeffnung. Wenn die Rostlänge 4 Fuß übersteigt, so zieht man es vor, doppelte Längen zu nehmen, nämlich jeden Roststab aus zwei Hälften zusammen zu setzen, welche in der Mitte (Fig. 318) eine Stütze bekommen. Damit der Roststab unter der Last des Brennmaterials sich in seiner Mitte nicht biegt, begrenzt man seine untere Fläche elliptisch, und noch besser macht man denselben aus Gußeisen und gibt ihm die Form (Fig. 340, Tafel *XIX*), auch dürfen die Stäbe in ihren Lagern nicht befestiget werden, sondern müssen vielmehr frei aufliegen, und erhalten an ihren Enden einen Spielraum von 2 bis 3 Linien, sonst verkrümmen sie sich bei ihrer Ausdehnung durch die Hitze.

1366. Erklärung. Um die Rückstände der Verbrennung, nämlich Asche und unverbrannte Schlacke leichter durchzulassen, macht man

Digitized by Google

die Roststäbe beweglich, so daß sie um ihre Axe hin und her schwingen können. Eine solche Verbindung der Roststäbe führt den Namen eines **Schüttelrostes**. Zu diesem Ende hat jeder Stab nach vorne eine besondere Verlängerung *g* (Fig 340) deren Ende in einen cylindrischen Wulst ausläuft: eine Zahnstange *h* (Fig. 341, Tafel *XVI*) verbindet sämmtliche Stäbe, und wird durch zwei Hebel *i*, *i'* getragen, wovon der eine *i* zwischen den Knaggen drehbar befestiget, lediglich zum Tragen, der andere *i'* aber gleichzeitig zum Bewegen der Stange dient. Dieser Hebel sitzt auf der Spindel *k* (Fig. 340), die außen den Griff *l* trägt, und durch dessen hin- und hergehende Bewegung abwechselnd nach der Rechten und Linken bewegt wird: *aa* ist die Thürplatte, *b* die Feuerplatte, an welche *c* der Rostträger gegossen ist, *d* ist ein Roststab mit 6 Lücken *e*. Das Lager der Stäbe *ff* (Fig. 342, Tafel *XVI*) ist, um eine durchgängig gleiche Tragfähigkeit zu erzielen, nach unten elliptisch abgerundet. Daß die Bewegung des Griffes gleichfalls durch die Maschine bewirkt wird, braucht nicht erst bemerkt zu werden.

1367. Anmerkung. Die Heitzfläche der Kessel bei Maschinen mit niederem Drucke soll 14 bis $16^3/_4$ W. Quadratfuß für jede Pferdekraft betragen, und die ganze Oberfläche des Rostes im Feuerherde soll 0.62 bis 0.77 Quadratfuß für jede Pferdekraft enthalten: auf jedem Quadratfuße der Roststäche müssen in einer Stunde 12 Pfund Steinkohlen der besten Gattung verbrennen. Durch die Erfahrung hat man für Watt'sche Dampfmaschinen gefunden, daß zwischen den in einer Stunde verwendeten Steinkohlen und dem Nutzeffekte der Maschine sich folgende Verhältnisse herausstellen: zu einer Maschine mit

	1	2	10	20	100	200	Pferdekräften
braucht man	20	31	100	166	555	1060	Pfd. Steinkohlen.

Aus diesen Daten ist zu ersehen, daß in Beziehung auf den Kohlenverbrauch größere Maschinen vortheilhafter sind als kleinere: was nur darin seinen Grund hat, daß von der durch die Verbrennung erzeugten Wärme bei größeren Maschinen verhältnißmäßig weniger verloren geht. Bei sehr zweckmäßig gebauten und gut

Digitized by Google

eingerichteter Feuerung kann man in Beziehung auf Kohlenverbrauch gewiß noch günstigere Resultate erzielen.

1368. Anmerkung 2. Bei den stehenden Dampfmaschinen bedient man sich fast immer der äußeren Feuerung, d. i. der Feuerherd, welcher das im Dampfkessel befindliche Wasser in Dampf verwandeln soll, befindet sich unter dem Kessel, und der Ofen ist so gebaut, daß die Flammen allenthalben dem Kessel durch ausgemauerte Züge zugeführt werden können, und denselben größtentheils bestreichen. Die Figur 343 Taf. *XXIII.* stellt einen vertikalen Durchschnitt eines solchen Ofens dar, in welcher *A* den Dampfkessel sammt dem Mannsloch *pq*, *BB* die Heitzröhre bedeuten, *CC* ist das Mauerwerk des Kessels, welches zunächst dem Feuer und unterhalb des Kessels aus feuerfesten, dann aus gewöhnlichen Ziegeln und Bruchsteinen hergestellt ist, *a* ist der Feuerrost, *h* ein Kanal für das Zuströmen der Luft, *f* Aschenfall, *i* Kanal oder Zug unter dem Kessel konzentrisch mit der Kesselfläche gemauert, aus welchem die Flamme in die Heitzröhren *B*, *B* geht, und auch in die Züge *k*, *k* sich vertheilt. Diese vereinigen sich kurz vor dem Schornstein wieder in den Kanal, in welchem die Rauchklappe (Register) angebracht ist. Die Entfernung des Rostes von der unteren Kesselfläche variirt zwischen 12 und 18 Zoll: 13 Zoll hat man für reine Sinterkohlen gut gefunden, 15 Zoll für Backkohlen 18 Zoll für Brennholz. Die Schornsteine werden hin und wieder von Eisenblech, meistens aber aus Ziegeln gebaut: sie erhalten eine Länge zwischen 60 und 100 Fuß, und bei der Ausmündung eine Breite von 12 Zoll. Kürzerere Schornsteine erfordern einen größeren Kohlenverbrauch und sollten in bewohnten Oertern wegen Belästigung der Nachbarn gar nicht geduldet werden.

1369. Anmerkung. 3. Zum Schluße wollen wir die Verhältnisse zwischen der Größe des Kolbenhubes, Geschwindigkeit des Kolbens, Durchmesser des Cylinders, sämmtlich in Wiener Zollen, der Zahl der Umdrehungen des Schwungrades und dem Nutzeffekte der Maschine in Pferdekräften anführen, wie solche aus der Vergleichung der von Watt bei diesen Maschinen angenommenen Regeln hervorgehen.

Digitized by Google

Pferdekräfte	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Kolbenhub	34.7	40.5	45.6	45.6	45.6	45.6	46.3	46.3	53.8
Geschwindigkeit	33.5	36.4	37.0	37.0	37.0	38.5	38.5	38.5	41.2
Durchmesser	11.4	13.4	15.3	16.7	18.4	20.0	20.5	21.8	22.9
Umdrehungen	29	27	26	25	25	25	23	23	$21^1/_2$

Mehrere hieher einschlagende Bemerkungen enthält die schon o. angeführte Schrift Kaiser's und Scholl's.

Digitized by Google

I. Sachregiſter.

(Die beigefügte Zahl bedeutet den Abſatz oder Paragraph.)

Abfallboden 841.
Abhang 1053.
Abplattung der Erde 650.
Abſolute Ruhe 10.
Abwägung doppelte 457.
Aequator, deſſen Halbmeſſer 650.
Aërostat 923.
Aërostatik 797.
d'Alembert's Princip 733.
Anfangsgeſchwindigkeit 579.
Angriffspunkt 13.
Anomalie wahre 616.
Anziehung einer Kugel gegen einen Punkt geſchieht gerade ſo, als ob ihre Maſſe in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre 624.
Anprallung, Anprallungswinkel 1113.
Aphelium, 616.
Apparat zur Rettung der Menſchen in Feuersbrünſten 477, 508.
Apſidenlinie 616.
Arbeitsgröße 717.
Arche 840.
Archimedes, Flaſchenzug 481, Waſſerſchnecke 1205.
Aſchenbehälter 1255.
Aſymptoten der Kettenlinie 344, der Wurflinie in widerſtehender Luft 611.
Atmoſphäre 895, ihre Maſſe, 914, ihre Höhe 915.
Aufhängepunkte, Aufhängewinkel 306, iſt vom Parameter und der ganzen Belaſtung abhängig 362.
Auftrieb 856.
Augenblickliche Umdrehungsaxe 763.
Ausdehnung der Luft durch die Wärme 912, die des Queckſilbers 901.
Ausgleichung 398.

Digitized by Google

Ausgußrohr 947, A. konisches, Druckhöhe bei demselben 1126, wenn das Mundstück die Gestalt des zusammengezogenen Wasserstrahles besitzt 1127, Ausschnitt des Zahnes 520.
Auschlagwinkel 452, Bestimmung desselben bei einer Krämerwage 455.
Axe freie 696, A. neutrale 198, ihre Lage 199.
Axendrehung eines Körpers, gleichförmige, veränderliche 687, geht am schnellsten vor sich, wenn die Drehaxe des Körpers durch den Schwerpunkt geht 689.
Axensystem, festes, bewegliches 777, Gleichungen für den Uebergang von dem einen zum andern 779, Bestimmung der den festen Axen parallelen Geschwindigkeiten 780, Gleichungen zwischen den Koordinaten beider Systeme 785.
Bach 1052.
Bahn 15, eines im leeren Raume geworfenen schweren Körpers 601, ihre Gleichung 602, B. im widerstehenden Mittel 609, bei kleinen Elevationen 612, Bestimmung der Wurfshöhe und Wurfsweite 613.
Balancier 448, B. der Schiffsmaschine 1317, der stehenden Dampfmaschine 1327.
Balken, dessen Druck auf die Unterlagen 206, trägt beiderseits gestützt, 4mal so viel als wenn er nur einerseits befestiget wäre 207, B. von größter respektiver Festigkeit aus einem cylindrischen Stamme, dessen Querschnitt ein Kreis ist 209, mit Rücksicht auf die zulässige Biegung 263, aus einem dreiseitigen Prisma 210, aus einem cylindrischen Stamme, dessen Querschnitt, eine halbe Ellipse ist 211, ein Kreisabschnitt ist 214, ein Kreisausschnitt ist 217, aus einem parabolischen Cylinder 213.
Barometer 902, Barometerkoeffizient 918, dessen numerischer Werth 919, Korrektion der Luftsäule und der Quecksilbersäule 921.
Barometerstand 902, Vorsichten bei Beobachtung desselben 904, Korrektion beim Gefäßbarometer 903.
Becherzackenschwamm 421.
Bedingung des Zusammentreffens zweier schiefgestoßenen Kugeln 726.
Befestigungskammern 391.
Behälter zusammengesetzte 1043, Druckhöhe in denselben 1049, Wassermenge 1050.
Beschleunigung 577, ihr Ausdruck 586, B. der Schwere, s. Erdschwere.
Bette des Flußes 1053.
Bewegung 9, gleichförmige 18, beschleunigte 579, B. schwerer Körper in vertikaler Richtung 588, B. eines freifallenden Körpers im leeren Raume mit Rücksicht auf die Abnahme der Schwere 594, im widerstehenden Mittel 595, eines aufsteigenden schweren Körpers im leeren Raume 593, im widerstehenden Mittel 597, B. eines Punktes durch eine krumme Linie, seine Geschwindigkeit 635, Dauer 636, Bewegung auf einer schiefen Ebene 637, in einem vertikalen Kreisbogen 640, in kleinen Kreisbögen erfolgt die Bewegung bis zum tiefsten Punkte des Durchmessers in derselben Zeit 641.
Bewegungsgleichungen eines freien Systems von materiellen Punkten, auf welche beliebig viele Kräfte nach bestimmten Richtungen wirken 735, B. eines von beliebigen Kräften getriebenen Körpers 757, B. seines Schwerpunktes 759, B. des durch das offene Ende eines Gefäßes ausfließenden Wassers 1018, wenn die Ausflußöffnung klein ist 1019, Bewegung veränderliche 579.
Bewegungsgröße 584.
Biegsamer Körper 200.
Bildungsgesetze der Sonne, Erde und Planeten 809.
Blaserohr 1292, dessen Widerstand 1297.
Blattzapfen 510.

Digitized by Google

Blechdicke der Kessel 1365.
Boden eines Gefäßes 810, des Rades 1145.
Bodenöffnung 983.
Bodenschaufel 1146.
Böschung, Böschungswinkel 293.
Brahma'sche Wasserpresse 815, ihr Druck 816.
Brechungsaxe, Brechungsfläche 196.
Brechungsfugen 398.
Brechungskoeffizient 204, Tafel derselben für verschiedene Stoffe 205.
Breite ausgeglichene des Flußbettes 1034.
Breitenprofil 1053.
Brückenbögen, gesunkene zu erhöhen 859.
Brückenmaterialien 421.
Brückenwage 451, 465.
Brust des Zahnes 520.
Chablone 929.
Charlier 923, Füllung 928, Hülle 929.
Centralbewegung 614.
Centralkräfte 614.
Centrifugalpendel 655, 1331.
Centrifugalpumpe 977, Wassererhebung zu erklären 978.
Centripetalkraft 614.
Cykloidalkonoid, dessen Schwerpunkt 128, 151.
Cykloide, ihr Schwerpunkt 93, 111.
Cykloide ist eine Brachystochrone und Tautochrone 639.
Damm 840.
Dampf 907, Tafel seiner Spannungen 1238, Tafel seiner Dichtigkeit 1246, seines Gewichts unter dem Volumen eines Kubikfußes 1247, T. der auf sein Gewicht bezogenen Kraft 1248.
Dampfboot 1306.
Dampfcylinder 1234, D. der Lokomotive 1261, ihr schädlicher Raum 1261.
Dampfdruck, Tafel für denselben 1240.
Dampfkammer 1261.
Dampfkessel 1234, 1310, cylindrische 1356.
Dampfmaschine, bewegliche, stehende 1233, 1326 ihre wesentlichen Theile 1234, D. einfach, doppelt wirkende 1328, Kondensationsmaschinen 1329, D. atmosphärische, Hochdruckmaschinen 1330, Expansionsmaschinen 1330, ihre Klassen 1333, ihre Widerstände 1341, D. Bemerkungen über **Pambour's** Bestimmung ihres größten Nutzeffektes 1355.
Dampfröhre 1259.
Dampfschiff, Geschwindigkeit in Meilen aus dem Volumen des in einer Stunde verbrauchten Dampfes, dem Halbmesser des Schaufelrades und Dampfcylinders 1322, aus dem Volumen des verwendeten Wassers und den Widerständen der Bewegung 1323, erforderliche Wassermenge, wenn die Geschwindigkeit des D. gegeben ist 1324, Bestimmung dieser Geschwindigkeit des D. und ihres Nutzeffektes nach **Navier** 1325.
Dampfschiffmaschine 1306, erforderliche Kolbendruck zur Ueberwältigung der Widerstände 1321.
Dampfvolumen bei gegebenem Drucke und Temperatur 1244, D. relatives, Tafel desselben 1245, Ableitung der **Pambour**'schen Formel 1249.
Dampfwagen 1253, dessen Haupttheile 1254, die hin- und hergehende Bewegung der Kolben zu erklären 1262, erforderliche Kolbendruck zur Gewälti-

Digitized by Google

gung der Widerstände 1298, wenn der D. auf horizontaler Ebene sich bewegt 1299, Beispiel 1300, Geschwindigkeit des D. bei gegebener Ladung 1301, Ladung des D. bei gegebener Geschwindigkeit 1303, Nutzlast 1304.
Dampfwege 1261.
Daumen 537, die Abrundung ist eine Kreisevolvente 538, beim gegebenen Hube die Anordnung der Daumen anzugeben 539.
Decimalwage 451, 463, der Hebelsarm des Einsatzgewichtes ist 10mal so groß als der Hebelsarm der Last 464.
Dichtigkeit 2, ihr Verhältniß bei verschiedenen Massen und Volumen 3.
Direktoren der Bewegung 1272, ihre Bestimmung 1273.
Direktrix der Kettenlinie 309.
Drehende Bewegung 56.
Drehende Reibung 166.
Drehpumpe, oszillirende 979, rotirende 981.
Dreiwegehahn 938.
Drosselventil 1331.
Druck beliebiger Kräfte auf eine flüssige Masse 798, D. des Wassers auf den Boden 813, ist vom Gewichte der Wassermasse unabhängig 814, D. auf die Seitenwand eines mit Wasser angefüllten Gefäßes 817, wenn das Gefäß ein Parallelopiped ist 818, D. auf den Boden bei Flüssigkeiten verschiedener Dichtigkeit 825.
Druckhebel 448.
Druckhöhe 810.
Druckkolben 943, 944. mit Brahma'scher Liederung 946.
Druckpumpe 963, Wassererhebung zu erklären 964, Kraft zur Anziehung des Kolbens 966, D. werden paarweise angeordnet 968, Reibung des Kolbens 969, Druckstiefel 963.
Dubuat's Hydrometer 1057, Bestimmung der Geschwindigkeit 1058.
Dunst 907.
Durchstich 1052.
Dynamik 30.
Ebene, schiefe 542, Kraft, welche der Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält 513. Besondere Fälle wenn die Kraft horizontal oder zur Länge der schiefen E. parallel ist 544. Vortheilhafteste Wirkung der Kraft 545.
Edwards'sche Dampfmaschinen 1333.
Einarmiger Hebel 50.
Einmündung 1053.
Einsatzgewichte 451.
Eisen, dessen Verhalten bei der Belastung 191, Vorsicht bei Anwendung des E. zu Kettengliedern 192.
Eisenbahnschienen von gleicher respektiver Festigkeit 240.
Elastische Flüssigkeit 31.
Elastischer Körper 200.
Elastische Linie 244, ihre Gleichung wenn die Ruthe gewichtslos einerseits befestigt und andererseits durch ein Gewicht gebogen wird 247, wenn die Ruthe gleichförmig belastet und mit einem Ende befestigt wird 249, wenn sie beiderseits befestigt und durch ihr eigenes Gewicht gebogen wird 254, ihre Senkung in der Mitte ist $^5/_8$ derjenigen, welche entsteht wenn dieselbe Last bei einer gewichtslosen Ruthe in der Mitte angebracht wird 257.
Elastizitär, absolute, relative 245, ihr Verhalten 246, E. absolute Tafel derselben 253.
Elasterometer 1822.

Elevationswinkel 600. Bestimmung desselben, wenn Entfernung und Höhe des zu treffenden Gegenstandes gegeben sind 606.
Elfen-Raupe 926.
Ellipse, welche mit der Kettenbrückenlinie genauer übereinfällt als eine Parabel 375, E., welche als Wölbungskurve erscheint, wenn die Druckhöhen im Scheitel und an den Kämpfern gegeben sind 418.
Ellipsoid, halbes hohles, die Tiefe seines Einsinkens 868, bei gegebener Belastung 869.
Elongationswinkel 642.
Elongationen des Pendels nehmen in einer geometrischen Progression ab 659.
Endesgeschwindigkeit 579.
Erdaxe, Länge ihrer Hälfte 650.
Erde, ist an den Polen abgeplattet 650. E. der Stoß, den dieselbe ursprünglich erlitt, ging in einer Entfernung von ungefähr 5 Meilen von ihrem Mittelpunkte 724.
Erddruck auf eine vertikale Mauer 295, wenn die Futtermauer beiderseits eine Ausladung besitzt 297.
Erdschichte, welche den größten horizontalen Druck auf die Mauer ausübt halbirt den Böschungswinkel der Erde 296.
Erdschwere nimmt vom Aequator gegen die Pole zu 650, ihre Zunahme ist dem Quadrate des Sinus der geographischen Breite proportional 653, ihre Verminderung durch die Schwungkraft ist nahe dem Quadrate des Cosinus der geographischen Breite proportional 652.
Erdwinde 493.
Esse 1255.
Evans'sche Dampfmaschinen 1333.
Expansionsmaschinen 1330, Druck auf die Flächeneinheit des Kolbens 1338, Geschwindigkeit des Kolbens zu bestimmen 1339, erforderliche Wassermenge 1313, Nutzeffekt 1344, Hülfstafel zur Berechnung dieser Größen 1345.
Expansivkraft der Luft 895, steigt bei Zusammendrückung und Erhöhung der Temperatur 896, nimmt mit der Entfernung von der Erdfläche ab 898, ihre Messung 900. Expansivkräfte der Luft, ihr Verhalten bei verschiedenen Temperaturen 912, E. der atmosphärischen Luft in irgend einer Höhe zu bestimmen 932.
Extrados 398.
Eytelwein's Formel für die Geschwindigkeit des Wassers in Flußbetten 1101, in Röhrenleitungen 1109.
Fachbaum 1032.
Fahrbahn, ihr Gewicht 361, ihre größte Belastung ist das Menschengedränge 379, ihre schädliche Last 382.
Fall, freier, Formeln dafür 588, Gesetze desselben 590—592. Zeit und Höhe eines aufsteigenden Körpers im leeren Raume 593, mit Rücksicht auf den Widerstand der Luft 597, Geschwindigkeit und Zeit eines im leeren Raume fallenden Körpers mit Rücksicht auf die Abnahme der Schwere 594, im widerstehenden Mittel 595.
Federwage 451.
Felgen 1145.
Feste Axe 55.
Fester Körper 31, 55.
Festes System 55.
Festigkeit der Körper 183, F. absolute 184, ihr Verhalten bei prismatischen Körpern 185, Versuche darüber und Tafeln 187, F. auf die Dauer 188, F.

Digitized by Google

einer eisernen Stange aus den an ihr beobachteten Ausdehnungen bei verschiedenen Belastungen 193, F. respektive 196, Formel dafür 201, Verhalten bei vierkantigen Balken von gleichnamiger Materie 202, F. respektive, wenn die Berechnungsfläche ein Dreieck ist 220, dessen Spitze allein in der Brechungsaxe liegt 223, F. resp. wenn die B. ein Trapez 221, irgend ein Polygon ist 225, wenn die Brechungsfläche ein Halbkreis ist 226, und die Brechungsaxe eine zum Durchmesser parallele Tangente ist 228, wenn die Brechungsfläche ein Kreis ist 231, F. resp. zweier Kreiscylinder 232, einer cylindrischen Röhre, Vergleichung derselben mit der eines vollen Cylinders 234, wenn die Brechungsfläche eine Ellipse ist 235, eines Kreiskegels 242, F. rückwirkende 264, Formel derselben 265, Verhalten bei zwei Körpern von gleicher Materie 266, Tafel derselben 267, Anwendung auf die Gebäude 268, F. r. eines eichenen Balkens 431, Beispiel ihrer Berechnung 433.

Feuerbrücke 1311.

Feuerherd, Feuerkammer 1255.

Feuerspritze 975.

Fixer Punkt 55.

Flaschenzug des Archimedes 481.

Flaschenzug, gewöhnlicher 484, Bestimmung der Kraft, welche der Last sammt Reibung das Gleichgewicht hält 486.

Fläche, vom Radiusvektor beschriebene 615, ist der Zeit proportional 617.

Floß, die Tiefe seines Einsinkens bei bekannter Belastung 860, dessen Belastung, wenn die Tiefe des Einsinkens bekannt ist 862.

Flügelzapfen 511.

Flüssiger Körper 31, 794, Fortpflanzung des Druckes 796.

Fluß 1052, Gleichung zwischen Geschwindigkeit, Querschnitt, Perimeter des Profils und Gefälle 1080, Gleichung zwischen der Geschwindigkeit, Breite, benetzter Tiefe und dem Gefälle, wenn das Breitenprofil ein Rechteck ist 1081, G. zwischen Wassermenge, Breite, benetzter Tiefe und Gefälle 1085.

Förderungshöhe 1197.

Fortschreitende Bewegung 56.

K. Franzens-Kettenbrücke 390 bis 392.

Freies System 55.

Fugen 398.

Fuß des Gewölbes 398, F. des Zahnes 520.

Gase 895.

Gefälle 841.

Gefäßbarometer 802.

Gegenpresse 556.

Gegenwinde 505, Verhalten der Kraft zur Last 506, ihre Anwendung 507.

Geißfuß 466.

Gerinne 1052, gerades 1156.

Gerstner's Formel für die Geschwindigkeit des Wassers in Röhrenleitungen 1109.

Geschwindigkeit 18, G. virtuelle 560, G. einer gleichförmigen Bewegung 18, veränderlichen B. 580, G. verhalten sich wie die Beschleunigungen 582, G. in der Centralbewegung 623, G. eines Punktes bei seiner Bewegung durch eine krumme Linie 635, 754, G. der Umdrehung eines zusammengesetzten Pendels 699, G. des ausfließenden Wassers verhalten sich wie die Quadratwurzeln der Druckhöhen 988, 1019, bei verschiedenen Ausflußöffnungen 994, G des Wassers, mittlere 1029, ergibt sich, wenn man die Wassermenge durch den Querschnitt der Ausflußöffnung dividirt 1030, in

Digitized by Google

einem Breiten- und Längenprofil 1054, G. mittlere in Flußbetten nach Prony und Eytelwein 1075, Formel hiefür 1079, wenn der Querschnitt des Flußbettes ein Rechteck ist 1081. G. bei Anschwellungen 1083, G. des Wassers in den Röhrenleitungen 1107, durch die Druckhöhe dargestellt 1108, genauere Werthe derselben nach Eytelwein und Gerstner 1109 G. des Wassers in gekrümmten Röhren 1115.
Geschwindigkeitshöhe 600.
Geschwindigkeitsskale 1069, des Oberrheins, Niederrheins, der Waal und des Arno 1070, Berechnung derselben aus den in den gegebenen Wassertiefen beobachteten Geschwindigkeiten 1071, Anwendung auf die genannten Flüsse 1072, sind die Ordinaten einer Ellipse mit bestimmten Hauptaxen 1073.
Getriebe 516.
Getriebszahn, dessen kleinste Länge, wenn das Rad vom Kumpfe umgetrieben wird 532.
Gewässer, fließende 840.
Gewicht absolutes, spezifisches 811 G. eines Kubikfußes Wasser 812.
Gewichtsverlust, eines in Wasser eingesenkten Körpers 854.
Gewinde der Spiralpumpe 1191.
Gewölbe 398, von gleichem Drucke 407, Beispiel der Berechnung eines solchen Gewölbes 409—412, G. Druck in irgend einem Punkte desselben, wenn die innere Wölbung gegeben ist 416, wenn die innere Wölbung eine Ellipse ist 407, Bestimmung der Ellipse wenn die Druckhöhen im Scheitel und an den Kampfern gegeben sind 418, wenn die innere Wölbung ein Kreis ist 419.
Gewölbsrippe 409.
Gewölbsteine 398.
Gleichförmige Bewegung 18.
Gleichgewicht 29, G. dreier Kräfte an einem Punkte 42, G. einer beliebigen Anzahl Kräfte, die nach gegebenen Richtungen an einem Punkte wirken 47, G. zweier Kräfte am mathematischen Hebel 52, am Winkelhebel 54, G. mehrerer Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten in einer Ebene 64, wenn die Richtungen der Kräfte parallel sind 65, G. mehrerer Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten im Raume 67, G. paralleler Kräfte, welche an einem festen System von Punkten im Raume wirken 79, G. der Kräfte an einem festen System mit einem fixen Punkte 566, wenn es auf einer krummen Linie verbleiben muß 567.
Gleitende Reibung 166.
Göpel 493.
Graben 1052.
Grathen des Gewölbes 400.
Gravitation 619, der Sonne gegen die Planeten ist dem Quadrate ihrer Entfernungen von der Sonne verkehrt proportional 620. G. in der Einheit der Entfernung ist für alle Planeten dieselbe 622.
Grazer Kettenbrücke 393.
Green 923.
Griessäulen 1158.
Grundbeet 1053.
Grundsätze 11, 21, 582, 733.
Guldinische Regel 164.
Gurgel 975.
Hängebrücke 423, ihre Gleichung 425, das Gewicht ihres Tragbogens 427, Länge der Tragstangen 428, Querschnitt der Fugen 429, ihre Aufstellung 436 bis 439.

Digitized by Google

Zähne 936.
Zahnsteuerung 1334.
Zakenzapfen 509.
Zalboberschlächtiges Rad 1156.
Zammersmithsbrücke 394 bis 396.
Zarte Körper 200.
Zaspel 489, Bestimmung der Kraft, welche der Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält 495.
Zaubengewölbe 400.
Zauptaxen 669 sind in jedem Körper vorhanden 671.
Zauptmomente 669, bei ungleichen H. ist das größte unter ihnen größer, das kleinste aber kleiner als das Trägheitsmoment desselben Körpers in Bezug auf eine andere Momentenaxe 672, sind aber zwei H. einander gleich, so hängt das Trägheitsmoment eines Körpers blos von einem der drei Richtungswinkel ihrer Momentenaxe ab 673, und es gibt außer diesem Systeme von Hauptaxen noch eine unendliche Menge anderer Systeme von Hauptaxen 674, bei 3 gleichen H. sind alle anderen Systeme von Axen, die man durch denselben Anfangspunkt legen kann, gleichfalls Hauptaxen.
Zauptträgheitsmomente, s. Hauptmomente.
Zauptprojektionsebene 744, ihre Lage 745.
Zausschwamm 421.
Zebel 447, mathematischer 50, physischer 448, Bestimmung der Kraft, welche der Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält 449, H. zusammengesetzter 470, Verhalten der Kraft zur Last 471.
Zebelsarme 50.
Zebelwage 451.
Zeblade 466, deutsche 467, Erklärung der Lasterhebung 468, H. französische 469.
Zebezapfen 537.
Zeberbarometer 902.
Zeitfläche 1356.
Zeitröhren 1256, ihre Anfertigung 1258.
Zelfarme 1142.
Zemmung 572.
Zochdruckkessel 1310.
Zochdruckmaschine 1330.
Zöhe eines Schraubenganges 551, eines Schneckenganges 1205.
Zöhenmessung barometrische, s. Höhenunterschied.
Zöhenunterschied zweier Stationen ist das Produkt eines beständigen Faktors mit dem Unterschiede der Logarithmen der an diesen Stationen beobachteten Barometerstände 917. Korrektion wegen der Temperatur der Luft 920, wegen der Polhöhe des Ortes 921.
Zolz das beste Brückenmaterial 421.
Zorizontalräder 1143.
Zorizontale Wasserrad s. Turbinen.
Zorn 1191.
Zornhaspel 492.
Zub 537, Hubhöhe 947.
Zydrodynamik 32.
Zydraulik 32.
Zydrostatik 32, 797.
Zydrotechnik 32.
Indikator 1282.

Digitized by Google

Inhalt derselben Dampfmenge unter dem Einfluß verschiedener Drückungen 1336.
Injektionswasser 1335.
Intrados 398.
Isochronisches Pendel 701, dessen Länge 702.
Kämpfer 398, 424.
Kämme 517.
Kalorien 1250, verschiedener Brennstoffe 1251.
Kalorimeter 1250.
Kaltwasserpumpe 1329.
Kammrad 517, Kammbaum 527.
Kanäle 1045, Auffahrt aus einem niedrigeren Theile in einen höheren und umgekehrt 1046, vortheilhafteste Gestalt des Querprofils 1086, wenn das Querprofil ein Rechteck ist 1087: das Rechteck vom gegebenen Inhalte und Umfange in ein Trapez von gleichem Inhalte und Umfange zu verwandeln 1088, Trapez mit kleinstem Umfang bei einer gegebenen Seitenböschung 1090. Tafel der Trapeze mit kleinstem Umfange 1093, Anwendung dieser Tafel 1094, Betrachtungen über K. mit horizontaler Sohle 1095, Wassertiefe bei der Einmündung 1097.
Kappengewölbe 400.
Kegelventil 941.
Kehrzackenschwamm 421.
Keil 447, 547, Kraft mit Hinsicht auf Reibung 548, Anwendung des K. im gemeinen Leben 550.
Kepler'sche Gesetze 617, Aenderung des dritten Gesetzes wegen der Massen der Planeten 630.
Kessel der Lokomotive 1256, Vortheile desselben 1257, K. einer Schiffsmaschine 1310, K. der stehenden Dampfmaschinen 1356, ihre Blechdicke 1357, Kesselprobe 1362.
Ketten, ihr Vorzug vor den Seilen 190.
Kettenbrücke 376, ihre Bestandtheile 376.
Kettenbrückenlinie 350, ihre Wurzelpunkte, Tragpfeiler, Spannweite, Pfeil 351, Parameter, Modulus 352, ihre große Mannigfaltigkeit 356, ihre Gleichung 354, sie ist eine Parabel, wenn ihr Modulus verschwindet 357, und eine gleichgespannte Kettenlinie, wenn ihr Modulus gleich Eins wird 360, ihre Bogenlänge 363, für den Fall einer Parabel 366, Berechnung des Parameters und des Modulus 380, Beispiel dieser Berechnung 381, ihr Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt 410, ihre genäherte Gleichung 373, Fall wenn der Modulus $=1$ ist 374, Bestimmung der Ellipse, welche mit ihr genauer zusammenfällt, als eine Parabel 375.
Kettenglied, ihre Zusammensetzung 377, dessen Lage an irgend einer Stelle der Tragkette zu bestimmen 369, dessen erforderliche Stärke zu berechnen 370, die demselben zugehörige Länge der Tragstange 371.
Kettenglieder lassen sich durch Auswahl der Schienen der Theorie gemäß konstruiren 378.
Kettenhaus 393.
Kettenkonoid, dessen Oberfläche 331, Kubikinhalt 332, die Oberfläche ist ein Kleinstes oder Größtes 337.
Kettenlinie, gemeine 306 ist rektifikabel 310, ihre Koordinatengleichung 312, liegt ganz auf einer Seite der Direktrix 313, die Koordinaten der K. sind hyperbolische Funktionen des Stellungswinkels 314, Bestimmung ihres Parameters 316, 322, Hülfstafel dazu 318, die Lage beliebig vieler Punkte derselben durch Rechnung zu finden 321, Bestimmung ihrer Hülfslinien 325,

Digitized by Google

ihres Krümmungshalbmessers 327, ihre Tangente zu verzeichnen 326, ihre Quadratur 330 ihr Schwerpunkt hat unter allen Kurven die tiefste Lage 336.
Kettenlinie, die gleichgespannte 347, Bestimmung der Bogenlänge 340, ihre Gleichung 341, ist eine transzendente Kurve 342, anderweitige Ausdrücke in hyperbolischen Funktionen 343, besitzt zwei vertikale Asymtoten 344, ihr Krümmungshalbmesser 345, Bestimmung des Parameters 348, Hülfstafeln dazu 349.
Klappenventil 940.
Kloben 472.
Klostergewölbe 400.
Kniepresse 574, die Kraft der Zusammendrückung zu bestimmen 375.
Körper 1, gleichartige 2, von gleicher absoluten Festigkeit 189, von gleichem Widerstande 237 haben die Gestalt eines dreiseitigen Keils oder eines parabolischen Cylinders 238, seine Gestalt, wenn die Querschnitte Kreise sein sollen 239, Körper des Zahnes 520.
Körperelement 5, dessen Masse 6.
Kofferkessel 1356.
Kolben 943, die hin- und hergehende Bewegung bei der Lokomotive 1262 bei der Schiffsmaschine 1315.
Kolbensteuerung 1334, 1351.
Kolbenventil 943.
Komplanation, statische der Rotationsflächen 160.
Kommunizirende Röhren 826, Gleichgewicht zweier Flüssigkeiten von ungleicher Dichtigkeit 827, Gleichgewicht gleichartiger Flüssigkeiten 828.
Kondensationsmaschinen 1329.
Kondensator 1314.
Kontrakzionskoeffizient 995, Tafel desselben 994.
Kopf des Widders 1220, des Zahnes 520.
Kopfhahn 938.
Kornwallis'sche Dampfmaschinen 1333.
Krämerwage 451, Einrichtung einer K. 453, Empfindlichkeit derselben 456, Methode der doppelten Abwägung 457.
Kraft momentane 577, bewegende beschleunigende 577, lebendige 717, ihr Werth bei einem bewegten Körper 792, Prinzip ihrer Erhaltung 751.
Kräfte, welche nach einem festen Mittelpunkte wirken, ihre Eigenschaften 740, 752, 755.
Kräfte-Parallelogram 39.
Kreiselräder 1142, 1170.
Kreuzgewölbe 400.
Kreuzhaspel 492.
Kronrad 517.
Kropfgerinne 1156.
Kropfräder 1142, 1156.
Krümmungshalbmesser der gemeinen 325, der gleichgespannten Kettenlinie 345 der Kettenbrückenlinie 410.
Krümmungswinkel 1113.
Krummzapfen der Radaxe 1266, der Welle für die Schaufelräder 1316.
Kubirung statische der Rotationsflächen 162.
Kugelgewölbe 400.
Kugelventil 942.
Kumm 1207.
Kumpf 527.

Digitized by Google

Kuppelgewölbe 400.
Kurbel 448.
Kurbelaxe 1265.
Längenprofil 353, 1053.
Länge des Keils 547, des einfachen Pendels, das mit einem zusammengesetzten gleichzeitig schwingt 705.
Lagen des Gleichgewichts 871, stabile, labile 873, in der stabilen L. fällt der Schwerpunkt des Körpers unterhalb des Metacentrums 875, ihre Anzahl ist bei jedem Körper eine gerade 877, Kraft, mit welcher ein Körper in dieselbe zurückkehrt 878, L. eines schwimmenden dreiseitigen Prisma 881, ihre Gleichung 882, L. eines rechtwinkligen Parallelopieds, wenn blos eine der vier horizontalen Seitenkanten im Wasser ist 887, wenn ihrer drei 889, wenn ihrer zwei im Wasser eingesenkt sind 890, L. eines paraboliſchen Cylinders 893.
Lager offene, geschlossene 513.
Last 50, schädliche der Tragketten 382.
Lasten aus dem Grunde des Meeres zu erheben 859.
Lastschiffe ihre Form 864, Tragfähigkeit 865, Bestimmung ihrer Belastung aus der Tiefe ihrer Einsinkung 867.
Laufrad 494.
Lehrbogen 399.
Lenkstange 1269.
Leitkurvenapparat 1170.
Leitrolle 472, Bestimmung der Kraft, welche der Last sammt der Reibung das Gleichgewicht hält 473, wenn die Richtungen der Kraft und Last parallel sind 474, ihr Gebrauch im gemeinen Leben 476.
Lokomotive s. Dampfwagen.
Luftarten, ihr Gewicht 897.
Luftballon 923, Minimum des Durchmessers, unter welchem er nicht aufsteigen kann 925, Bestimmung dieses Durchmessers 930, seine Sicherheitsklappe 927, Geschwindigkeit 933, Steighöhe 934, größte Höhe 935.
Luftmanometer 1275, vermittelst desselben die Spannung des Dampfes zu bestimmen 1276, ihre Skale zu berechnen 1277, Vorzüge und Nachtheile desselben 1278.
Luftpumpe einer Dampfschiffmaschine 1314, einer stehenden Dampfmaschine 1329.
Luftpumpenhahn 938.
Mannsloch 1293, 1368.
Manometer 1236.
Mantel des Wasserrades 1147, der Wasserschnecke 1208.
Mariotte'sches Gesetz 911.
Maschinen 446, einfache zusammengesetzte 447.
Maschinenlehre 32.
Masse 2.
Maß der Kräfte 24.
Materie 1.
Materieller Punkt 5. M. Linie 83, Fläche 83.
Mechanik 30 elementare, höhere, populäre 33.
Metacentrum 374.
Mittelpfeiler 398.
Mittelpunkt der Bewegung 614, bei der Planetenbewegung nimmt ihn die Sonne ein 618.
Mittelpunkt des Druckes 829, allgemeine Formeln dafür 831, Bestimmung

Digitized by Google

desselben, wenn die Seitenwand ein Trapez ist 834, wenn sie ein Dreieck 836, eine Ellipse 837, ein Kreis 838, eine Parabel ist 839.
Mittelpunkt paralleler Kräfte 76.
Mittelpunkt des Stoßes 696.
Mittelrad 572.
Modulus der Kettenbrückenlinie 352, der Hängebrücken 424, sein Einfluß auf die Länge des Tragebogens steigt mit dem Aufhängewinkel 445.
Moment, dynamisches 561, statisches 51, dessen Bestimmung bei blos zweien Kräften 57, bei beliebig vielen Kräften, deren Angriffspunkte in einer Ebene sind 60, Momentenaxe 661.
Montgolfier 923.
Mündung 1053.
Muldengewölbe 400.
Mundstück 975, 1022.
Munitionswagen 1253.
Muschelventil 942.
Nebenbestandtheile einer Lokomotive 1274.
Niederdruckkessel 1310, 1311.
Normalbarometerstand 905.
Normale der Kettenlinie 325.
Normalstoß 1138.
Nothpumpen 961.
Nutzlast der Lokomotive 1304.
Oberboden 841.
Oberfläche einer Flüssigkeit, ihre Gleichung 801, die Resultirende sämmtlicher auf die flüssige Masse wirkender Kräfte ist in jedem ihrer Punkte auf dieselbe normal 802, Bedingungen des Gleichgewichts einer flüssigen Masse von veränderlicher Dichtigkeit 804, Fall, wo die O. sphärisch ist 805, ihre Gestalt an dem Meere und den Planeten 806, Einfluß der Centrifugalkraft bei rotirenden Flüssigkeiten auf dieselbe 808.
Oberschlächtiges Wasserrad 1143, dessen Einrichtung 1145, Bestimmung der Höhe des wasserhaltenden Bogens 1147, seiner bewegenden Kraft 1151, Nutzeffekt desselben 1152, Verhältniß der Nutzeffekte zweier Wasserräder 1153.
Obertheil des Zahnes 520, dessen kleinste Länge zu bestimmen 525, 530.
Oberwasser 841.
Ort des Körpers 8, O. des Zusammentreffens zweier nach gegebenen Richtungen mit bekannten Geschwindigkeiten gestoßener Kugeln 725, Bedingung dieses Zusammentreffens 726.
Pansterrad, Pansterzeug 1157.
Parallelstoß 1138, ist dem Quadrate vom Sinus des Einfallswinkels proportional 1139, Bestimmung des P. bei einer schwimmenden Kugel 1141.
Parameter der gemeinen Kettenlinie 309, Bestimmung des P. aus Spannweite und dem Pfeile 316, aus der Lage der Aufhängepunkte und der Länge der Kettenlinie 322, P. der gleichgespannten Kettenlinie 348, der Kettenbrückenlinie 380.
Pegel 1033.
Pendel, einfaches, zusammengesetztes 642, konisches 655: die Beschleunigung der Bewegung eines einfachen P. ist dem Sinus des Elongationswinkels proportional 644, isochronisches P. 646, hydrometrische P. 1062, P. Bewegung im widerstehenden Mittel 657.
Pendellänge 642, in irgend einer Breite 654.
Pendelstange 572.

Digitized by Google

Pendeluhr 572.
Perihelium 615.
Pfeil der elastischen Kurve 244, der Kettenlinie 306, der Hängebrücke 424.
Pferdegöpel 493.
Pferdekraft 1305.
Pippe 938.
Pitot'sche Röhre 1059, Messung der Geschwindigkeit des fließenden Wassers 1060.
Planetenbahnen ihre Polargleichung 626, sind Kegelschnitte 627, deren Gattung blos von der Geschwindigkeit und Entfernung von der Sonne im ersten Augenblicke der Bewegung abhängt 629.
Prinzip der Erhaltung der Flächen 741, P. der Erhaltung der lebendigen Kräfte 751, P. der Erhaltung des Schwerpunktes 739, P. der kleinsten Wirkung 756, P. der virtuellen Geschwindigkeiten 561, Beweis für 3 Kräfte an einem Angriffspunkte 562, für beliebig viele Kräfte 563, für mehrere Angriffspunkte 565, dessen Anwendung auf Maschinen 570.
Probirhähne 1291.
Probirwage 462.
Pumpe, Wasserpumpe 947, kolbenlose 977, P. der Lokomotive 1292.
Quecksilber, dessen Ausdehnung durch die Wärme 901, Gewicht eines Kubikfußes, 1239.
Querprofil 353, Q. der Kanäle s. Kanäle.
Rad, gezähntes 516, die Halbmesser des Rades und Getriebes sind den an ihrem Umfange angebrachten Zähnezahlen proportional 521.
Radare 1265, besitzt zwei unter rechten Winkeln geneigte Krummzapfen 1266, wodurch die Kraft zur Umdrehung der Treibräder nahe dieselbe bleibt 1267, und die hin und hergehende Bewegung der Kolbenstange in eine rotirende Bewegung der Treibräder übergeht 1268.
Radhaspel 492.
Radiusvektor 615.
Radkranz 1142.
Radstube 1142.
Räder, konische 517.
Räderwerk 516, Kraft mit Rücksicht auf die Reibung 518, Kraft und Last verhalten sich wie das Produkt aus der Anzahl der Triebstöcke in den Halbmesser des letzten Getriebes zum Produkte der Anzahl Zähne in den Halbmesser des ersten Rades 522, Umlaufszahl des letzten Rades auf einen Umlauf des ersten 571.
Rauchkammer 1256.
Rauchklappe 1368.
Register 1368.
Regulator 656, R. der Lokomotive 1259 der stehenden Dampfmaschine 1331.
Reibung 166, R. gleitende ist dem Drucke proportional 168, bei gleichartigen Körpern größer als bei ungleichartigen 170, Morins Resultate über die gleitende und wälzende R. 172, R. eines um einen Cylinder gewundenen Seiles 177.
Reibungskoeffizient 169, Bestimmung desselben durch Versuche 171, Tafel der R. 172.
Reibungswinkel eines angelehnten Balkens 174, 176.
Resultirende 26 mehrerer Kräfte an einem Angriffspunkte, deren Richtungen in dieselbe Gerade fallen 34, R. zweier Kräfte an einem Angriffspunkte, deren Richtungen einen rechten 36, einen beliebigen Winkel einschließen 37, R. mehrerer Kräfte nach gegebenen Richtungen an einem Angriffspunkte 41,

Digitized by Google

wenn die Richtungen dreier Kräfte wechselweise auf einander senkrecht sind 43, R. mehrerer Kräfte nach beliebigen Richtungen an einem Angriffspunkte 45, R. zweier Kräfte an zwei Angriffspunkten 48 R. mehrerer Kräfte an beliebigen Angriffspunkten in einer Ebene 62, Fall paralleler Richtungen 63, R. mehrerer Kräfte an verschiedenen Angriffspunkten im Raume 70, Fall, wenn die Richtungen dieser Kräfte einander parallel sind 71.
Richtung einer Kraft 13, Bestimmung derselben im Raume 14.
Riegelschaufel 1146.
Ringzapfen 511.
Rinnsal 1058.
Rippen eines Gewölbes 400.
Röhren, ihre Stärken verhalten sich wie Produkte aus ihren Halbmessern in die Druckhöhen 849, Dicke gußeiserner und bleierner R. 851.
Röhrenförmige Gestalt der Knochen bei Menschen und Thieren, der Halme beim Getreide, der Stengel bei Blumen und Pflanzen 234.
Röhrenleitung, Gewicht des erforderlichen Gußeisens 852.
Rolle 447, feste, bewegliche 472.
Rollenzug 481. Bestimmung der Kraft, welche der Last und der Reibung das Gleichgewicht hält 482.
Rost 1255, dessen Entfernung von der Kesselfläche 1364, Roststäbe 1365.
Rotationsbewegung eines Körpers, ihre Gleichungen 786, werden einfacher, wenn die beweglichen Axen Hauptaxen sind 788.
Rotationsmaschinen 1327.
Ruder, schraubenförmig gewundenes 1309.
Ruhe 9, relative 10.
Rücken des Keils 547.
Sackräder 1160.
Saugkolben 943, 944.
Saugpumpe 947, Wassererhebung zu erklären 949, Höhe des Wassers nach einem Kolbenhube 950, schädliche Raum 954, vermindert die Wirksamkeit der S. 958, erforderliche Kraft zur Aufziehung des Kolbens 959, zulässige Geschwindigkeit 962.
Saugröhre 947, ihre größte Länge 956.
Saug- und Druckwerk 970, einkolbiges 971, Vorgang der Wasserhebung 972.
Schaufeln 1145, Schaufelräder 1307.
Scheiben excentrische 1269, ihre Wirkung an der Lokomotive 1271, an der Watt'schen Dampfmaschine. 1334.
Scheitel des Gewölbes 398.
Schere 452.
Schieberstange 1261.
Schiebersteuerung 1269, 1334.
Schiebervorrichtung 1314.
Schiefe Ebene 447, Bestimmung der Kraft, welche nach horizontaler Richtung die Last und die Reibung erhält 294, Kraft; welche in beliebiger Richtung wirkt 543.
Schiffsaiche 863.
Schiffsmaschine 1317.
Schiffsmühlenräder 1155.
Schiffswinde 493.
Schlamkästen 1120.
Schlange 1191.
Schleuße 840, ihr Grundwerk 841, gekuppelte Sch. 841.

Digitized by Google

Schleußenboden 841, Waſſerdruck auf denſelben 844.
Schleußenkammer 841, Sch. ſo weit mit Waſſer anzufüllen, daß beide Schleußenthore gleichen Druck erleiden 845, Zeit der Anfüllung einer Sch. 1047.
Schleußenmauer, ihre Dicke, um vom Druck des Waſſers weder fortgeſchoben noch umgeworfen zu werden 846.
Schleußenthore 841, Schleußenwände 841.
Schlüſſel eines Hahnes 936.
Schlußſtein 398.
Schneide eines Keils 547.
Schneckengang 1206 ihre Verzeichnung 1208.
Schnellwage 451, 458, Stellung des Laufgewichts 459, ihr Gebrauch 461, hydrauliſche Sch. 1129.
Schornſtein, deſſen Länge 1368.
Schraube ſtumpfe, ſcharfe 551, rechte, linke 552, einfache, doppelte, dreifache S. 552, Kraft an der S. mit Zuziehung der Reibung 553, ohne Reibung 554, S. holländiſche 1207.
Schraube ohne Ende 557, Kraft an derſelben 558.
Schraubengewinde, Schraubenlinie, Schraubenmutter, Schraubenſpindel 551.
Schub 278.
Schütze 840, Aufziehen derſelben 841, erforderliche Pfoſtendicke 843.
Schußgerinne 1156, Schußbret 840.
Schwammbildung im Holze, Urſache 421.
Schwengel 1327.
Schwerer Körper 76.
Schwerpunkt 76, deſſen Koordinaten in einem feſten Syſteme von Punkten 80, S. einer geraden Linie liegt in ihrer Mitte 84.
Schwerpunkt einer materiellen krummen Linie 85, eines Kreisbogens 87, Kreisquadranten 88, eines parabolischen Bogens 90, elliptiſchen Bogens 91, elliptiſchen Quadranten 92, des Cykloidal-Bogens 93, der halben Cykloide 94, des Kettenbogens 333.
Schwerpunkt ebener Figuren 95, hängt von drei Integrationen ab 96, Sch. eines Trapezes 98, eines Dreieckes 99, ſein Abſtand von einer beliebigen Geraden 101, Sch. eines Parallelogrammes 100, eines elliptiſchen Abſchnittes 102, eines Kreisabſchnittes 104, ſein Abſtand vom Mittelpunkte des Kreiſes 105, Schw. eines elliptiſchen Quadranten 103, eines Kreisſektors 106, eines Kreisquadranten 107, eines zwiſchen zwei konzentriſchen Kreisbögen enthaltenen Ringſtückes 108, eines halben Kreisringes 110, eines halben elliptiſchen Ringes 111, wenn die Ellipſen einander ähnlich ſind 112, Schw. einer Parabelfläche 113, einer Cykloidalfläche 114, einer halben Cykloide 115, einer Kettenfläche 334.
Schwerpunkt krummer Oberflächen 118. S. eines abgeſtutzten Kegels 119, eines ganzen Kegels 120, einer hohlen Kugelzone 121, einer Halbkugel 122, eines Kettenkonoids 335. Sch. eines parabolischen Konoids 123, eines abgeplatteten Sphäroids 124, des länglichten Sphäroids 126, eines Cykloidal-Konoids 128.
Schwerpunkt für den Inhalt einer Pyramide 130, ſein Abſtand von einer beliebig geführten Ebene iſt der vierte Theil der Summe der Perpendikel aus den Ecken 132, Sch. aller Kegelgattungen 131, einer parallel abgeſtutzten Pyramide 133, eines ſo abgeſtutzten Kreiskegels 134, elliptiſchen Kegels 135, eines Prisma oder Cylinders 136, S. eines ſchief abgeſchnittenen dreiſeitigen Prisma 137, eines Ellipſoids mit 3 ungleichen Axen 139, eines ausgehöhlten halben Ellipſoids 142, S. eines Rotationskörpers 144, eines durch die Rotation eines

Digitized by Google

Kegelschnittes entstandenen Körpers 146, eines paraboloidischen Konoids 148, eines Sphäroids 149, eines hyperboloidischen Konoids 150, eines Cykloidalkonoids 151, eines Kugelsektors 154, S. eines körperlichen Ausschnittes 155, eines Kegelausschnittes 156, eines Kugelausschnittes 157, Lehrsätze über den Schwerpunkt: Prinzip seiner Erhaltung 739, S. eines Systems materieller Punkte liegt am höchsten oder am tiefsten 569.
Schwimmare, Schwimmebene 856.
Schwimmer 1055, dient zur Messung der Geschwindigkeit des Wassers 1056.
Schwimmgerinne 1157.
Schwimmender Körper 856, ist nur dann in Ruhe, wenn sein Schwerpunkt und der des verdrängten Wassers in einerlei Vertikalen sich befinden 858.
Schwingungsmittelpunkt eines zusammengesetzten Pendels 701, sein Abstand von der Drehaxe 702, dieser Abstand bleibt ungeändert, wenn die Drehaxe durch den S. gezogen wird 707.
Schwingungszahlen zweier Pendel in derselben Zeit 649.
Schwingungszeit 642, des einfachen Pendels im luftleeren Raume 643, in widerstehender Luft 658.
Schwungkraft 631, dargestellt durch die Geschwindigkeit und den Halbmesser des Kreises 632, durch die Umlaufszeit und den Halbmesser 633, ihre Bedeutung bei der Bewegung eines schweren Punktes auf einer krummen Linie 634.
Schwungrad 1327, dessen Umdrehungen 1369.
Seigerblech 947.
Seilrad 491.
Seiten des Keils 547.
Seitendrehungen eines Körpers 764, aus den gegebenen S. die den Axen parallelen Geschwindigkeiten 765, dessen Winkelgeschwindigkeit zu finden 767, und die Lage eines im Raume bewegten Körpers zu bestimmen 770, die Summe der Quadrate der S. ist dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit gleich 768, Differentialgleichungen der S. 769, Fall wo sich die drei Differentialgleichungen auf eine einzige zurückführen lassen 773, insbesondere wenn zwei Hauptmomente einander gleich 774, wenn alle drei Hauptmomente gleich sind 775.
Seitenkräfte 26.
Seitenöffnung 983.
Seitenstoß des Wassers 1138.
Seitenwände 810.
Sekundenpendel 646, Bestimmung seiner Länge aus den an einem anderen Pendel beobachteten Schwingungszahlen 649.
Segelschaufel 1146.
Sicherheitsrohr 1313.
Sicherheitsscheiben 1289, deren Bestandtheile und Mischungsverhältnisse 1290.
Sicherheitsventil 1283, Stellung des Laufgewichts für einen gegebenen Dampfdruck 1284 und umgekehrt Dampfdruck, wenn die Lage des Laufgewichts gegeben ist 1285 normale Belastung des S. 1362, ihr Durchmesser 1363.
Sicherheitsventil der Lokomotive 1287.
Sieden 907.
Siedepunkt, dessen Bestimmung 908.
Sieder, Siederöhren 1358, ihre Vortheile 1359.
Sohle 353.
Sonnentag, wahre 17.
Sophienbrücke 380.
Spannung eines Punktes 306, Größe derselben 307, ist im Scheitel der Kettenlinie am kleinsten 308, S. des Dampfes 1332.

Digitized by Google

Spannkraft des Dampfes größte 1242, ändert sich mit der Temperatur nicht aber mit dem Volumen des Dampfes 1242, ausgenommen bei plötzlichen Volumensänderungen 1243.
Spannkette 376, aus den Koordinaten ihrer Wurzelpunkte, die Spannweite, den Pfeil, den Aufhängewinkel und die Spannung der S. zu finden 386, Länge der S. zu bestimmen 387.
Spannweite der Kettenlinie 306, des Gewölbes 398.
Sperrhahn 936.
Sperrventil 1220.
Spillenrad 492.
Spindel 1208.
Spiralmanometer 1282.
Spiralpumpe, ihre Gattungen 1191, Wassererhebung zu erklären 1193, in einer konischen S. den Halbmesser der letzten Windung 1194, und die Druckhöhe zu bestimmen 1195, die Druckhöhe in einer cylindrischen S. ist größer als in der konischen 1196. Bestimmung des Wasserdruckes in der letzten Windung 1198, der erforderlichen Anzahl der Windungen 1199, der Summe der Ausflüsse in der Steigröhre 1200, der in einer Minute geförderten Wassermenge 1201, des erforderlichen Halbmessers der Schlange 1202, der Kraft zur Umdrehung der S. 1203, diese ist bei der cylindrischen größer als bei der konischen S. 1204.
Spitzzapfen 509.
Springwerk 1022.
Spritzenkasten 975.
Sprunghöhe 1022, ist kleiner als die Druckhöhe 1023, Tafel der Sprunghöhen bei gegebenen Druckhöhen 1024, erforderliche Durchmesser des Mundstückes 1025.
Sprungweite 1022, bei Oeffnungen, welche von der Mitte des Wasserstandes im Behälter gleichviel abstehen sind die S. gleich 1027, größte S. 1028.
Spurkranz 1264.
Staberad 1155.
Stabilität eines homogenen Körpers von gegebener Gestalt 279, einer Mauer 281, wenn ihr Querschnitt ein Trapez ist 284, eines dreiseitigen Prisma 286, einer mit Pfeilern gestützten Mauer 287, einer Mauer mit Strebepfeilern 288, eines Rotationskörpers 289, eines abgestutzten Kreiskegels 291, eines Kugelabschnittes 292, der Fahrzeuge 876.
Stämpfer 537.
Stärke der Dampfkessel zu untersuchen 1362.
Standwinkel 1209.
Statik 30.
Stauhöhe beim Einbau 1040, 1098.
Stauweite 1098, Berechnung derselben 1099, Gerstner's Verfahren bei ihrer Bestimmung 1100.
Steifigkeit der Seile 179, ist der Kraft an den Maschinen nachtheilig 181, Erfahrungen darüber 182.
Steigrad 572.
Steigröhre 963, 971.
Steigventil 1220.
Stellungswinkel eines Punktes 306.
Sterntag 17.
Steuerung 1331.
Stiefel 943, ihre Dauer 944, Einrichtung gußeiserner St. 948.
Stiefelventil 943.
Stirnpfeiler 398.

Digitized by Google

Stirnrad 517, vortheilhafteste Gestalt der Zähne eines St. 523, 531, wenn es einen innerhalb des Rades befindlichen Trilling umtreibt 534.
Stirnräder, deren eines innerhalb des andern umgetrieben wird, Gestalt der Zähne 535.
Stockpanster 1157.
Stopfbüchse 946.
Stoß gerader fester Körper 709, Dauer des St. 710, Geschwindigkeit nach dem St. bei nicht elastischen Kugeln 711, bei elastischen Kugeln 714, wenn der gestoßene Körper in Ruhe ist 715, wenn sich beide gegen einander bewegen 716. Verlust an lebendiger Kraft beim St. harter Körper 719, beim St. elastischer Körper ist derselbe null 720. Geht der S. nicht durch den Schwerpunkt eines Körpers, so erzeugt er nebst der fortschreitenden noch eine drehende Bewegung 721, Erklärung der Bewegung einer Kugel auf der schiefen Ebene 723, einer gestoßenen Billardkugel und einer abgeschossenen Bombe 724, Stoß isolirter Wasserstrahlen 1131.
Stoß schiefer bei nicht elastischen 727, bei elastischen Kugeln 728, wenn der gestoßene Körper eine unbewegliche Ebene ist 729, 730.
Stoßheber 1220, die Erhebung des Wassers in demselben zu erklären 1221, Eytelwein's Versuche und Resultate 1223, Bewegung des Wassers beim offenen Sperrventil 1224, Geschwindigkeit des Wassers und verlorene Wassermenge im St. 1225, Bewegung des Wassers beim offenen Steigventil 1226, die Zeit, während welcher das Sperrventil offen steht, ist größer als die Zeit des offenen Steigventils 1228, Geschwindigkeit für die vortheilhafteste Wirkung des St. 1229, Bestimmung der ihr entsprechenden Zeit, der verlorenen und gehobenen Wassermenge 1230, ferner der Druck- und Förderungshöhe des St. 1231.
Stoßhebersventil 441.
Stoßschaufel 1146.
Strauberrad 1155.
Strom 1052.
Stromgeschwindigkeitsmesser 1054.
Stromquadrant 1062, Verzeichnung seiner Skala 1063, Vorsichtsmaßregeln beim Gebrauche des St. 1064.
Stuzel 1145.
Subnormale und **Subtangente** der gemeinen Kettenlinie 325.
Tachometer 1129.
Tangente der Kettenlinie zu ziehen 325.
Tangentialkraft 614.
Tautochronische Kurve 638.
Theilriß 520, des Wasserrades 1146.
Theilung des Zahnes 520.
Thermomanometer 1281.
Tonnengewölbe 400, die Wölbungskurve ist bei Gewölben von durchgängig gleicher Dicke eine gemeine Kettenlinie 400, Bestimmung des Druckes auf die Kämpfer 404, der Stärke seiner Widerlagen 406.
Tonnenmühle 1206.
Torricellische Leere 902.
Torsionsfestigkeit 269, bei einem prismatischen Balken 270, wenn der Querschnitt ein Kreis 271, und ein Quadrat ist 272, T. für eine schmiedeiserne Stange 277.
Trägheit 12.
Trägheitsmoment 661, dessen Werth, wenn eine der Koordinatenaxen die Momentenaxe ist 6162, T. in Beziehung auf eine durch den Schwerpunkt gehende

Digitized by Google

Axe 664, ist kleiner als in Beziehung auf jede andere ihr parallele Axe 666; Bestimmung des T. in Bezug auf eine, der Lage nach gegebene, gerade Linie 667. Wenn die Hauptmomente der T. und die Lage einer geraden Linie hinsichtlich der Hauptaxen bekannt sind, das T. eines Körpers in Bezug auf diese Gerade zu bestimmen 670. Die Summe der drei auf rechtwinklige Axen bezogenen T. eines Körpers ist stets eine konstante Größe 676, T. eines Parallelopipeds 677, eines homogenen Ellipsoids 678, eines Rotationskörpers 680, wenn derselbe durch einen Kegelschnitt erzeugt wird 681, insbesondere T. einer Kugel, eines paraboloischen Konoids 683, eines Sphäroids 684, eines abgestutzten Kreiskegels 685, eines Kegels und Cylinders 686.

Tragebogen 424, Bau desselben 436, bei cylindrischen Fugen 441, Bestimmung seiner Länge 427.

Tragfähigkeit eines schief liegenden Balkens 208.

Tragkette, ihre schädliche Last 382, Vereinigung ihrer Glieder mit den Tragstangen 383, ihre Ausrüstung 389, ihr Gewicht 361.

Tragpfeiler 351, Beschreibung derselben 388.

Tragsattel 383.

Tragstange ihre Länge für eine gegebene Stelle der Tragkette als Funktion der Bogenlänge 371, Fall, wenn die Tragkette eine Parabel ist 372, Beispiel der Berechnung ihrer Längen für die K. Franzens Kettenbrücke 384.

Tragungsvermögen eines Balkens 261, nach Gerstner 262.

Trapez des schnellsten Abflußes 1093.

Treibräder 1253, sind konisch gebaut 1264.

Treibstangen 1316.

Tretrad, Tretscheibe 494, Seitendruck der Zapfen gegen die Pfannen 500, die Kraft zu finden, welche mit der Last und der Reibung im Gleichgewichte steht 501.

Treibstöcke, Trilling 517.

Tropfbare Flüssigkeit 31.

Turbinen 1142, 1170, Kraft des Wassers bei ihrer Umdrehung 1177, ihr größter Werth 1178, läßt sich nie erreichen 1180, Bestimmung des Neigungswinkels für den Eintritt des Wassers in die Schaufeln 1181, ihre Wassermenge 1183, Winkel zwischen der Tangente des ersten Schaufelelements und dem Halbmesser des Rades 1185, Geschwindigkeit des in die Schaufeln tretenden Wassers 1172, dessen lebendige Kraft 1173, wird durch die Centrifugalkraft vergrößert 1174, Geschwindigkeit des aus den Schaufeln tretenden Wassers 1175, und die lebendige Kraft dieser Wassermenge 1176, die Schaufelkurve schneidet den an ihren Anfang gezogenen Halbmesser in zwei Puncten 1186, Polarkoordinaten der Schaufelkurve 1188, Verzeichnung derselben 1189, Konstruktionsverhältnisse der T. 1190.

Ueberfall 1032, ihr Nutzen 1033, Wassermenge eines vollkommenen U. 1035, Breite des U. 1036, Wasserstand 1037, Wassermenge eines unvollkommenen U. 1038. Stauhöhe beim Einbau 1040, Näherungsweise Bestimmung 1041. Breite zwischen dem Einbau 1042.

Ueberlaßschwelle 1032.

Uhrenpendel 704, ihren Schwingungsmittelpunkt zu finden 705.

Umdrehungsaxe 646, Druck während der Drehung eines Körpers auf die U. 692, Bedingungen unter denen dieser Druck verschwindet 694, wenn blos die Schwere die Bewegung erzeugt, so muß der Abstand des Schwerpunktes von der Umdrehungsaxe gleich sein dem Trägheitsmomente des Körpers getheilt durch das statische Moment desselben 695, freie U. 696, augenblickliche U. 763, ihre Lage und Winkelgeschwindigkeit zu bestimmen 766, ihre Gleichungen 790.

Digitized by Google

Umlaufszeit 616, ihre Quadrate verhalten sich bei zwei Planeten wie die dritten Potenzen der großen Axen der elliptischen Bahnen 617.
Unterlage 50.
Unterschlächtiges Wasserrad 1143, 1155, bewegende Kraft des U. 1162, wenn das Gerinne einen Kropf hat 1164, dessen Nutzeffekt 1165, Vergleichung der Nutzeffekte im geraden und im Kropfgerinne 1166, Bestimmung der Geschwindigkeiten zweier hinter einander angebrachten U. für den Fall, wenn ihre Nutzeffekte einander gleich sind 1167, wenn die Summe ihrer Nutzeffekte den größten Werth erhält 1169.
Unterwasser 841.
Unveränderliche Ebene der Himmelskörper 747.
Ursprung irregulärer Flußbette 1102.
Ventile 936, 940.
Veränderliche Bewegung 18.
Verbrennung, erforderliche Luftmenge 1252, V. langsame ist der Verdampfung des Wassers nachtheilig 1252.
Verdampfungskraft 1356.
Verdunstungswärme des Kessels 1250.
Verschiebbarkeit 794.
Vertikalräder 1142.
Vertikale Richtung 76.
Vertheilung des Wassers unter die verzweigten Röhren einer Wasserleitung, wenn sämmtliche Endröhren in einer horizontalen Ebene liegen 1119, wenn dieselbe nicht in einer horizontalen Ebene münden 1121.
Vierwegehahn 939.
Viertelstücke 1142.
Visirglas 1291.
Waare 451.
Wälzende Reibung 166.
Wage 451.
Wagebalken, Wageschalen 452.
Wagenwinde 536, französische 559.
Walzenrad 572.
Wangenbretter 1158.
Warmwasserpumpe 1329.
Warner 1313.
Wasserbänke 1157.
Wasserdruck auf die Seitenwand eines Parallelopipeds 818, wenn die Seitenwand ein Trapez ist 819, wenn sie eine Parabel 821, eine Ellipse ist 822, W. auf die krumme Oberfläche eines abgestutzten Kegels 823, eines ganzen Kegels 824.
Wasserhaltende Bogen 1147, bei Rädern ohne Mäntel ist dessen Höhe fünf sechstel, bei eisernen Wasserrädern sieben achtel von dem Durchmesser des Theiltrisses 1148, Länge des W. in der Wasserschnecke 1216, Bestimmung dessen statischen Momentes 1149.
Wasserhöhe, hydrostatische 1197.
Wasserkunst 1022.
Wasserleitung 848.
Wassermenge beim Abfluße durch die Bodenöffnung eines Gefäßes 985, ihr Gewicht 987, wirkliche, hypothetische 992, Tafel der W. bei Oeffnungen in einer dünnen Platte und bei einer kurzen Ansatzröhre 993, beim Abfluße durch die Seitenöffnung 996, wenn die Seitenöffnung ein Trapez 998, ein Rechteck 1000, ein Dreieck mit der Spitze nach oben 1001, mit der Spitze

Digitized by Google

nach unten 1002, eine Parabel 1003, eine Ellipse ist, und Bt Wasserspiegel die Ellipse berührt 1005, genäherte Bestimmung der W. durch eine elliptische Seitenöffnung bei irgend einem Wasserstand 1007, mittlere W. 1034, Bestimmung der W. in einem Breitenprofile 1066, W. einer Röhre 1110, wenn diese gegeben ist, den Durchmesser der Röhre zu finden 1112.
Wasserpresse, Bramah'sche 815, Druck, welchen die Kraft eines Menschen bei der Zusammenpressung bewirkt 816.
Wasserrad 1142, freihängendes, eingeschlossenes 1156, mit cylindrischen Schaufeln 1161.
Wasserschnecke 1205, ihre Aufstellung 1210, die Summe aus dem Stand- und Windungswinkel der W. ist kleiner als 90 Grade 1212, ihr wasserhaltende Bogen 1213, Länge desselben 1216, Lage der Einflußöffnung 1215, Wassermenge der W. 1217 Kraft zur Umdrehung der W. 1218.
Wasserschraube 1207, wird in Holland durch Windmühlenflügel bewegt 1210.
Wasserspiegel 353, 810.
Wasserstand 810, W. im Kessel der Lokomotive muß auf derselben Höhe bleiben 1292.
Wasserstau 1032.
Wasserstoß 1129, gerader, schiefer 1130, relativer 1130, Bestimmung seiner Größe 1133, wirklicher, hypothetischer 1135.
Wasserstrahl aus der Seitenöffnung eines Behälters beschreibt eine Parabel 1026.
Wassertiefe, mittlere 1034.
Wasserzoll 1033.
Watt'sche Dampfmaschinen 1333, doppelt wirkende W. 1335, Druck auf die Flächeneinheit des Kolbens 1338, Geschwindigkeit des Kolbens 1346, erforderliche Wassermenge und Nutzeffekt 1347, Kolbenhub und Geschwindigkeit 1369.
Wechselhäuschen 1120.
Wechselrad 572.
Weg 15.
Wehre 840.
Welle 1142, ihre Stärke 514.
Wellrad 447, s. Haspel, Mittel die Kraft am W. zu verringern 504.
Widder, hydraulischer, s. Stoßheber.
Widerlager 398, deren Stärke bei einem gleich dicken Tonnengewölbe 406.
Widerstand des Blaserohres 1297.
Widerstand der Luft ist bei kleinen Geschwindigkeiten diesen selbst proportional 660, W. bei Lokomotiven 1295, Größe auf die Fläche eines Quadratfußes 1296.
Widerstand des Wassers in gebogenen Röhren nach Gerstner 1123, Anwendung auf die Sprunghöhe der Wasserkunst 1124, Bestimmung der Druckhöhe und des Durchmessers der Zuleitungsröhre 1125, W. gegen die Bewegung des Schiffes 1319.
Widerstände der Bewegung des Wassers in Flußbetten 1076, sind permanent oder zufällig 1077, Abhängigkeit des permanenten Theiles der W. vom benetzten Umfange, Querschnitte und Geschwindigkeit des Wassers 1078, W. der Lokomotive 1294, des Dampfschiffes 1318, 1320.
Widerstandshöhe 1103, ist der Unterschied zwischen Druckhöhe und Geschwindigkeitshöhe 1104, W. in Röhren 1105, W. wegen der Krümmung 1113, ihre Bestimmung nach **Dubuat** 1114, bei einer kreisförmig gebogenen Röhre 1117.
Wiederholungspumpen 957.
Windbruch der Bäume 243.
Winde 489, 493, die Kraft, welche der Last und der Reibung das Gleichgewicht hält 499.

Digitized by Google

Windkessel 1220.
Windstöcke 1120.
Windungen einer Spiralpumpe 1191, Material 1192, Halbmesser der letzten W. 1194.
Windungsfestigkeit s. Torsionsfestigkeit.
Windungswinkel 1205.
Winkelbeschleunigung 687.
Winkelgeschwindigkeit 646, des einfachen Pendels 647, eines gleichförmig um eine Axe sich drehenden Körpers 688.
Winkelhebel 50, 448.
Wirkung mechanische 717, kleinste W., ihr Prinzip 756.
Wölbungskurve 398, bei einem gleich dicken Tonnengewölbe 401, eines Gewölbes von gleichem Drucke 407, W. ist eine Parabel wenn die senkrechte Höhe durchgängig gleich ist 413, W. ist eine Kettenlinie, wenn die Ausgleichung eine ebene Fläche ist.
Woolf'sche Dampfmaschine 1350, Druck auf die Flächeneinheit des kleineren Cylinders 1352, Größe des Widerstandes 1353, Geschwindigkeit des Kolbens in beiden Cylindern 1354.
Woolf'sche Kessel 1359.
Woltmann'sche Flügel 1065.
Wurfbewegung 600, die Bahn des Körpers im luftleeren Raume ist eine Parabel 601, W. in widerstehender Luft 609.
Wurfhebel 448.
Wurfhöhe 600, in widerstehender Luft 613.
Wurfweite 600, größte W. bei 45 Grad 603, gleiche W. bei Elevationswinkeln, die sich zu 90 Graden ergänzen 604, W. in widerstehender Luft 613.
Wurzelpunkte 351, ihre Befestigung 391.
Zähne der Räder 516, Lehre derselben anzufertigen 526, vortheilhafteste Gestalt für einen vom Stirnrade bewegten Kumpf 528.
Zahnstock 527, Gestalt seiner Zähne 533.
Zapfen 452, ihre Stärke 514.
Zeit der Bewegung 16, eines schweren Punkes in einem vertikalen Kreisbogen 640.
Zeit des Abflußes durch die Bodenöffnung, in welcher der Wasserstand im Behälter um eine gegebene Größe sinkt 1009, der gänzlichen Entleerung 1010. Z. durch die Seitenöffnung, wenn diese an den Wasserspiegel reicht 1012, der gänzlichen Ausleerung 1013, wenn ein kleinerer Zufluß, als der Abfluß ist, Statt findet 1014, Z. der Entleerung nicht prismatischer Behälter 1016, einer Schleußenkammer 1048, Z. der Anfüllung eines leeren Behälters 1044, einer Schleußenkammer 1047.
Zellen 1145, ihre Anzahl 1146, nach Gerstner erhält das Wasserrad 21mal so viele Z. als der Durchmesser des Theilrisses Fuße hat 1148.
Zerlegung der Kräfte 27, 40.
Ziehpansster 1157.
Zugrolle 472, Verhältniß zwischen Kraft und Last 478, Reibung an derselben 479.
Züge 1364.
Zuleitung des Wassers in den Dampfkessel 1292.
Zunge 452.
Zusammensetzen der Kräfte 27.
Zusammenziehung des Strahles 991, hängt sowohl von der Beschaffenheit der Ausflußöffnung als auch von der Druckhöhe ab 992.
Zusatzrad 572.

Digitized by Google

II. Autorenregister.

Arago 1237, 1240.
Arzberger 1237.
Armengaud 1305.
d'Aubisson 1132.
Barlow 277.
Baumgartner 982.
Bernouilli 1219.
Bessel 648.
Betancourt 1237.
Biot 922, 1237, 1355.
Blumhof 277.
Borda 660, 1296.
Bossut 894, 1070, 1135.
Brünnings 1070.
Buchanan 1308.
Burg 1132.
Camus 531.
Cauchy 273.
Christian 1355.
Clark 394.
Coulomb 305.
Creße 339.
Dalton 1237.
Delambre 650.
Dietlein 277, 420.
Dubuat 1070, 1135, 1296.
Duleau 277,
Dulong 1237, 1240.
v. Ettingshausen 565, 904, 982.
Euler 531, 793, 824, 1219.
Eytelwein 33, 277, 305, 420, 541, 853, 1070, 1101, 1132, 1141, 1223.
Fidler 1132.
Fischer 1132.
Flachet 1305.
Français 305.
Gauss 793.
Gehler 922, 982,
Gerstner 33, 262, 277, 305, 420, 465, 851, 982, 1100, 1154.
Gerzabek 1154.
Gilbert 1308.
Girard 277.
Gregory 277.
Grunert 375, 565.
Gudermann 339.
Hartmann 1305.
Heeren 1290.
Heim 277.
Hülsse 33.
Hutton 420.
Janvier 1355.
Ide 576.
Jenko 433, 441.
Kästner 531.
Karmarsch 1290.
Kayser 33, 1132, 1154, 1369.
Knochenhauer 420.
Krönke 277.
Kulik 329, 397.
Kuppler 277.
Lacille 731.
Lagrange 33, 782, 776.

Lahire 531.
Lahmeyer 576.
Laplace 33, 732, 747.
Langsdorf 1025, 1070.
Lehmus 853, 894, 1135.
Littrow 1238.
Marestier 1308.
Mariotte 1025.
Martoni de Köszegh 305.
Mitis 380.
Möbius 576.
Montgolfier 1223.
Morin 172, 514.
Munich 1219.
Muschenbroek 851.
Navier 33, 277, 305, 397, 853, 982, 1305, 1325.
Newton 630, 1101.
Ohm 33, 731.
v. Pambour 1296, 1297, 1305, 1355.
Pancer 442.
Partington 1308.
Pasquich 33.
Petit 1305.
Poisson 33, 654, 731.
Poncelet 576, 1161.
Pontécoulant 33.
Pratt 33.
Prechtl 421, 1239.
Prony 1075, 1237.
Provis 397.
Römer 541.
Rüst 982.
Schemerl 422.
Schmidt 648, 982, 1237.
Schnirch 390.
Scholl 1305, 1369.
Sganzin 397.
Stampfer 1239.
Telford 397.
Thibault 1296.
Tredgold 277, 515, 1305, 1308.
Unger 33, 277, 420.
Venturoli 277, 982, 1135.
Watt 1237.
Weißbach 33.
v. Wiebeking 385, 412.
Ximenes 1070.
Zebrawski 444.

Druckfehler.

Seite	§	Zeile	Statt:	ließ:
13	36	2	R^3	R^2
15	42	17	BAG	$\sin BAG$
23	59	3	$OG=x$,	$OG=x$
27	67	8	$^1/_2P_2\cos\alpha_1$	$^1/_2P_1\cos\alpha_1$
28	—	2	$^1/_1\Sigma P(2x\cos\gamma-2x\cos\alpha)$	$^1/_2\Sigma P(2x\cos\gamma-2x\cos\alpha)$
28	—	4	P_2	P_2
30	71	22	P_2z_2	P_2z_2
40	102	9	$b^2y^3:3a^2$	$b^2y^3:3a^2l$
41	107	2	$x=$	$y=$
42	108	9	$AA'B'B$	$AA'B'B$ (Fig. 14)
46	113	7	$\int y^1dx$	$\int y^1dy$
48	118	2	BC	AB
50	123	6	$-^1/_6p^3\pi$	$-^1/_6p^3\pi$
57	—	6	(A. 1790)	(A. 1700)
57	134	3	$\sqrt{Rr}$	Rr
58	—	13	DCE	ACE
58	—	23	$^2/_3(c-b)F$	$^1/_3(c-b)F$
61	146	4	$y=^1/_2x^2$	$y=^1/_2x$
67	166	3	$(^1/_4n+x)^3$	$(^1/_4p+x)^3$
78	183	21	$-\delta=q$	$\delta=9$
93	113	12	$-5ax$	$-6ax$
94	217	13 u. 14	$x\cot\alpha$	$y\cot\alpha$
98	223	13	$k(b+x)a^2$	$k(b+x)$
99	226	1 unten	431)	134)
100	—	1	$\int dx\sqrt{(r^2-x^2)^3}$	$\int dx\sqrt{(r^2-x^2)}$
103	—	15	$\sqrt{^1/_2\varrho^2}arc\sin(x:\varrho)$	$+^1/_2\varrho^2arc\sin(x:\varrho)$
104	—	1	$5r^3:\varrho^35r\sqrt{(r^2-\varrho^2)}$	$5r^3+\varrho^3:5r\sqrt{(r^2-\varrho^2)}$
106	241	5	R	Q
107	—	1	$x=^1/_2\sqrt{(1-}$	$x=^1/_2l\sqrt{(1-}$
110	—	4	$\sqrt{(dx^2+dy^2)}$	$\sqrt{(dx^2+dy^2)^3}$
112	—	8	$Q'=2Q$	$Q=2Q'$
120	270	6	R	Q
121	—	7	OB	AB
138	—	5	Q	MQ
138	—	8 u. 9	die, der	der, die
139	310	24	$ds=$	$dy=$
140	311	2	winwel	winkel
141	315	5	multiplizirn	multiplizirem hat
145	—	12	$(2a-p)=r$	$(2a-p)=\gamma$
152	—	5	$p^2d\sigma$	$pd\sigma$
153	342	1	tran=	trans=
159	—	11	Int. 73)	Int. 37)
162	—	6	$h^2p^3w^2:q$	$h^2p^3w^3:g^2q$
197	403	11	$(2px+x^2)$	$\sqrt{(2px+x^2)}$
198	406	9	$2pg:q'$	$2pg:g'$
200	—	12	Diviſion	Multiplikation
200	—	13	$\sqrt{(p^2+\sigma^2)}$	$p^2+\sigma^2$
204	413	13	$gdscosv$	$gcdscosv$

Digitized by Google

Seite	§	Zeile	Statt:	lies:
216	413	16	434. Aufgabe. Auf	433. Aufgabe. Aus
223	444	8	Anmerkung	445. Anmerkung.
258	—	5	E	F
292	574	1	Kniepresse	Kniepresse (Fig. 170)
302	597	13	dt	$-dt$
304	601	4	AT	AT (Fig. 172)
307	606	15	$e^2tg^2\varphi=$	$e^2tg^2\varphi=$
313	613	1	Wurfshöhe	größte Wurfshöhe
314	614	10	Tagentialkraft	Tangentialkraft
316	620	7	$CP=as$	$CS=as$
316	620	9	$MSP=\omega$	$XSP=\omega$
337	—	9	$N=v^2:r$	$N=v^2:r$
344	662	9	FE	FC
346	—	letzte Z.	sin	cos
347	670	8	$B\cos^2\beta$	$B\cos^2\beta$
347	670	10	$\int y^2dM$	$\int z^2dM$
375	—	20	AG, GL	CG, GE
378	727	8	AHL	AHL
401	766	8	(Fig. 184)	(Fig. 185)
455	865	10	Prisma	Prismen-
457	—	1	441	457
457	—	12	$^2/_3abc$	$^2/_3nabc$
462	—	5 b. u.	$ACA'\times hl\,AC=Axv$	$ACA'\times hl=2ACA'\times r$
467	887	17	MO	MN
493	—	9	gr	gr^2
538	1018	8	$-{}^1/_2\left(1-\frac{a^2}{A^2}y^2\right)$	$-{}^1/_2\left(1-\frac{a^2}{A^2}\right)y^2$
573	1089	5	a	a —
588	1117	13	CB	CD —
608	1149	1 b. u.	CF	CT —
621	1175	10	1476	1176
624	—	3	δ	ϱ —
626	1188	14	$\Delta\varrho$	$\Delta\varrho^3$ —
629	—	23	Steigröhre	Steigröhre
633	1196	3	$^1/_2\pi(R+r)$	$^1/_2\pi(R+r)$ —
638	1207	5	Kummi	Kummi,
638	1207	6	be	bei —
642	—	11	MR	$M'R$
652	—	6	dir	die
653	—	7	ergibt	ergibt sich
653	1230	4	$2.497l$	$2.197l$
654	—	1	$h=\frac{25M+16al}{25HM}$	$h=\frac{25HM}{25M+16al}$
654	1232	12	442.93	143.23
658	—	8 u.	575.0	675.0
660	—	4	128° R.	138° R.
671	1262	14	c	e
678	—	17	x	x'
685	1296	3	0.0811396	0.0011996
685	1297	9	Luf	Luft

Digitized by Google

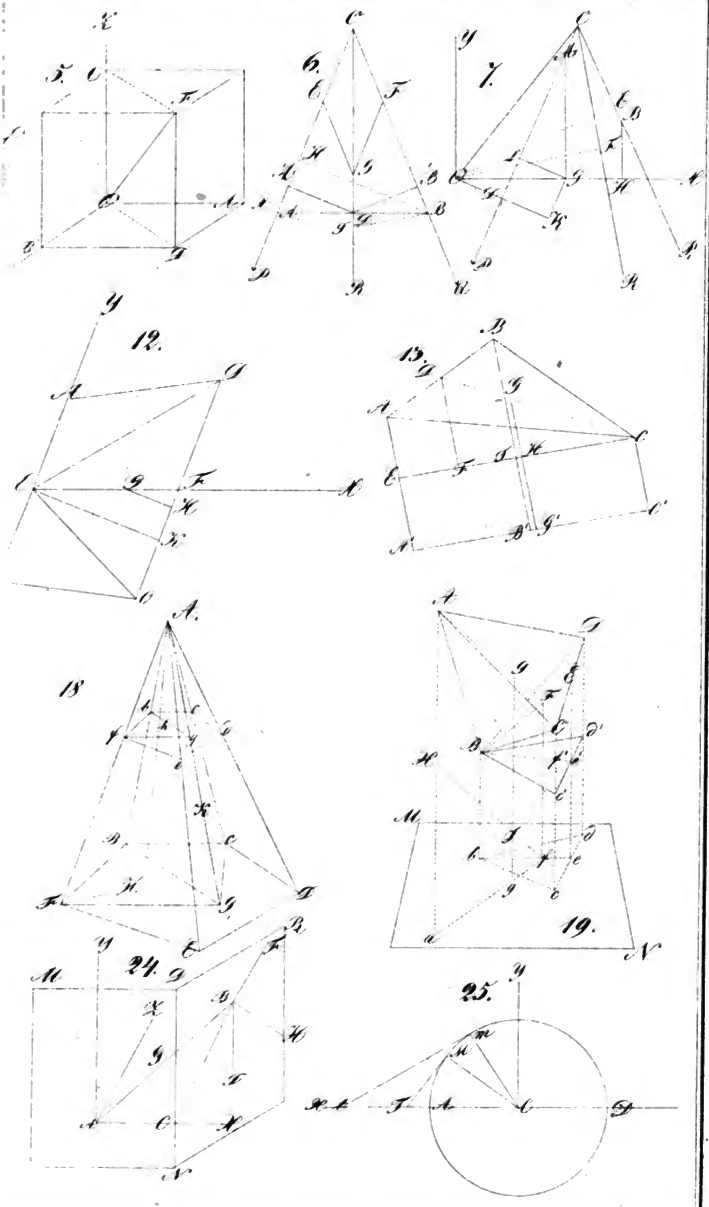
Seite	§	Zeile	Statt:	lies:
723	1368	3 v. u.	Kürzerere	Kürzere
VIII.	—	9 v. u.	nahmen	nahme
VIII.	—	8 v. u.	kommung	kommnung
X.	—	4 v. u	engliſchen	engliſch

Die etwa unbemerkt gebliebenen Druckfehler werden der gütigen Nachſicht des Leſers empfohlen.

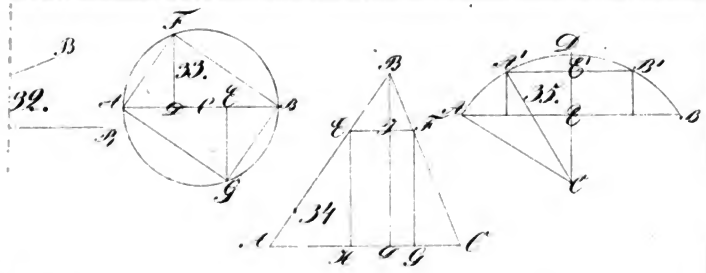
☞ Anmerkung für den Buchbinder. Die ſechs hier folgenden Blätter mit den Seitenzahlen 75, 109, 115, 121, 163, 165, ſind ſtatt der gleich bezeichneten im Buche zu binden.

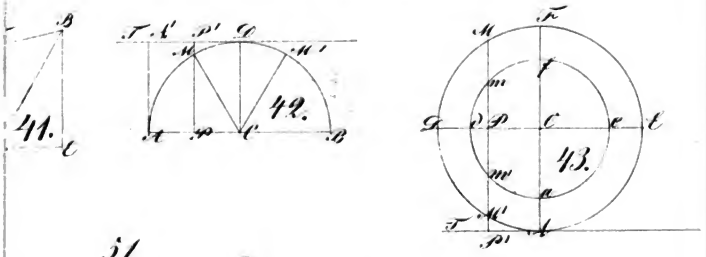
Digitized by Google

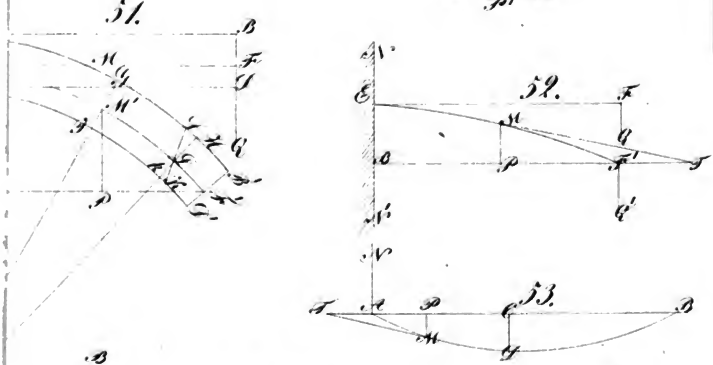
Digitized by Google

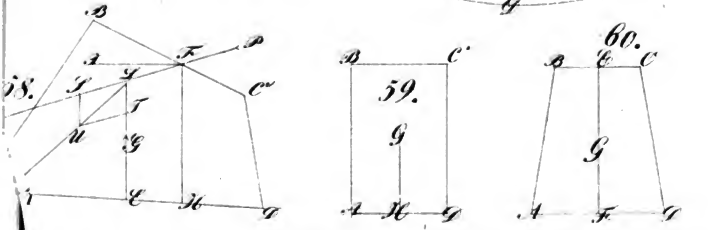


Digitized by Google



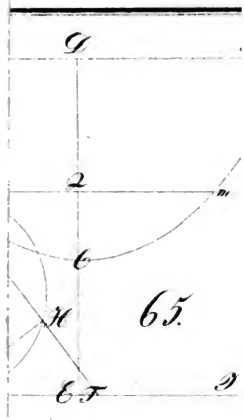


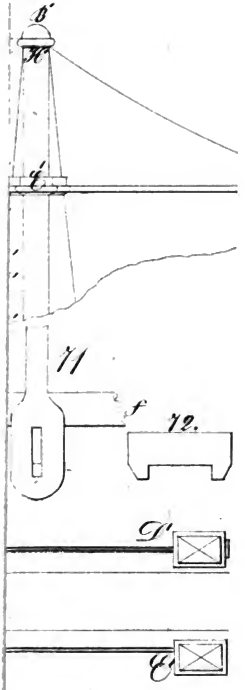




Digitized by Google

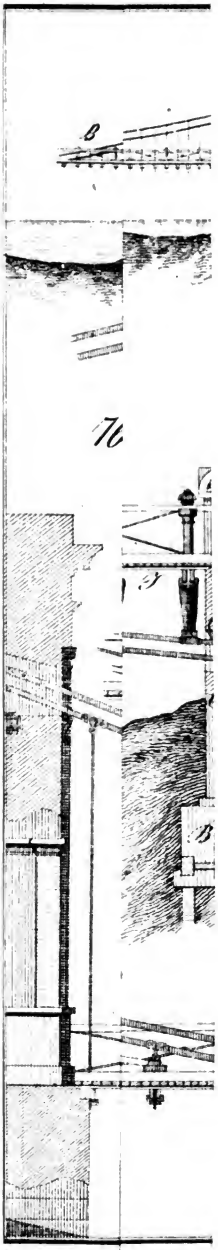
Digitized by Google



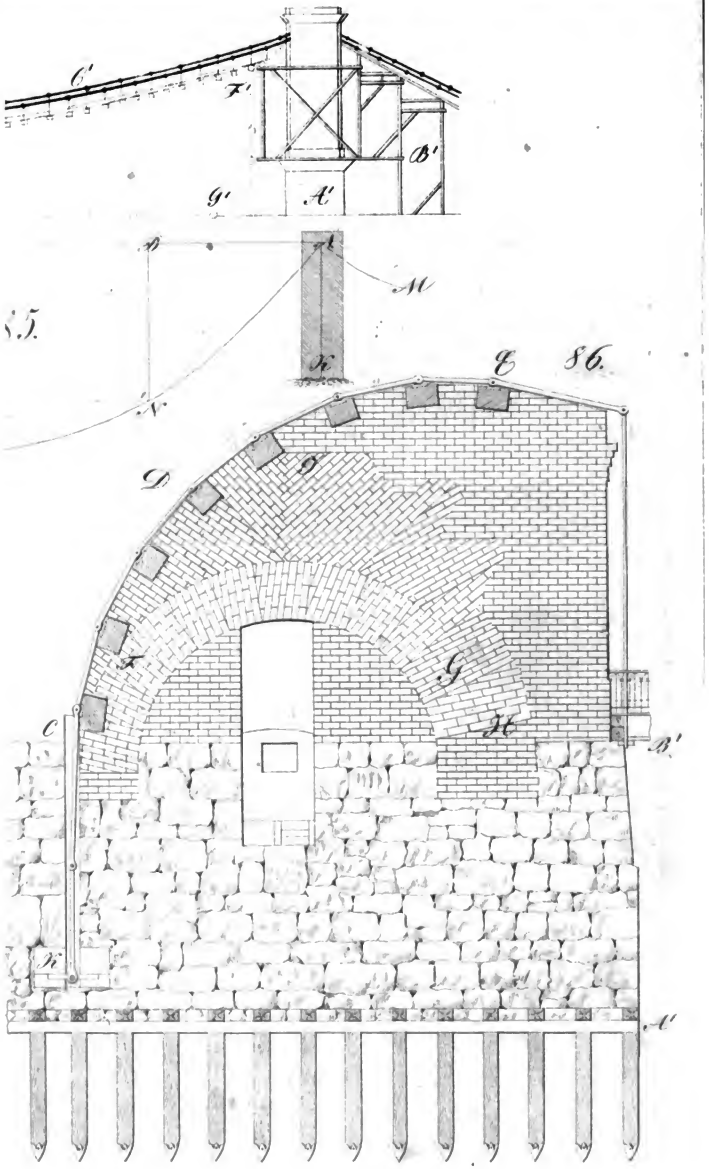


Digitized by Google

Digitized by Google

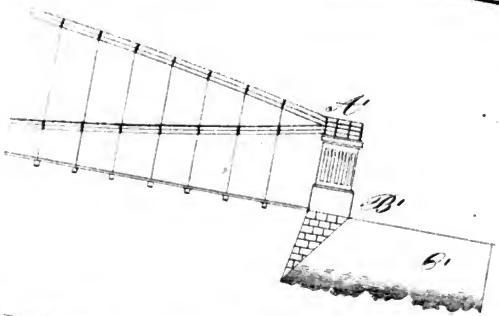


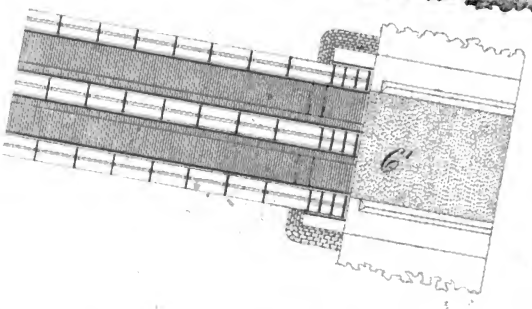
Digitized by Google

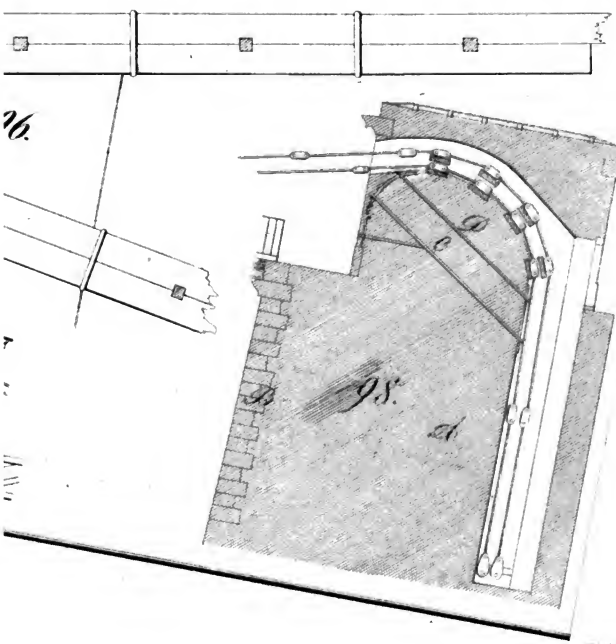


Digitized by Google

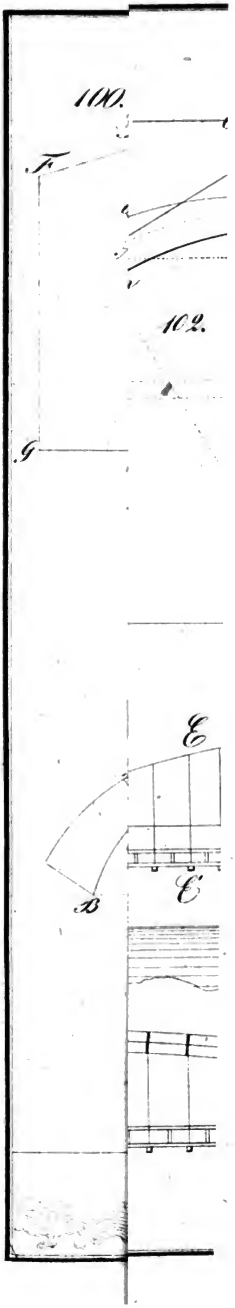
Digitized by Google





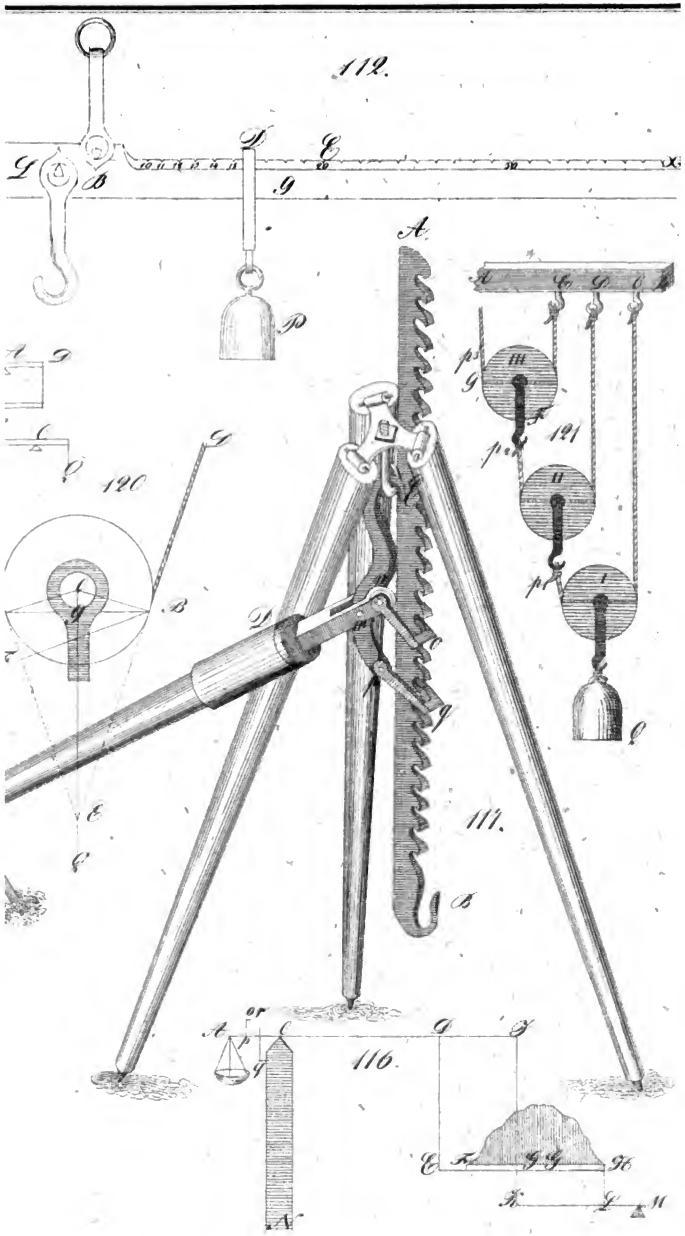


Digitized by Google



Digitized by Google

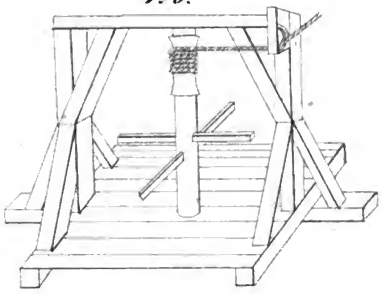
Digitized by Google



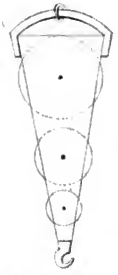
Digitized by Google

Digitized by Google

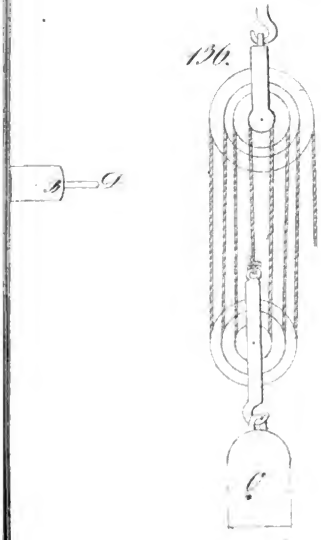
196.



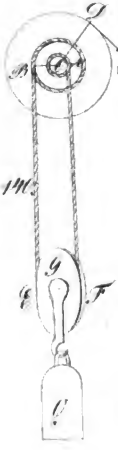
197.



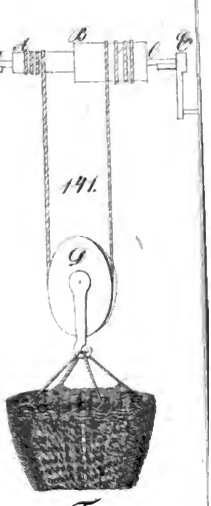
136.



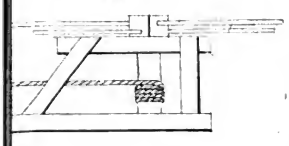
140.



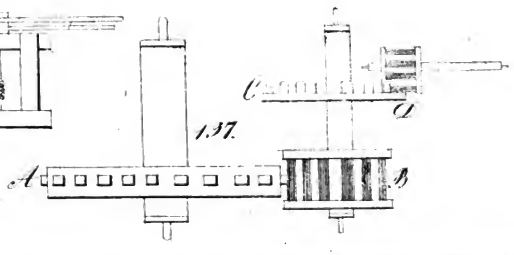
141.



134.



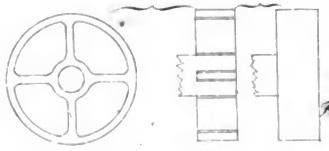
137.



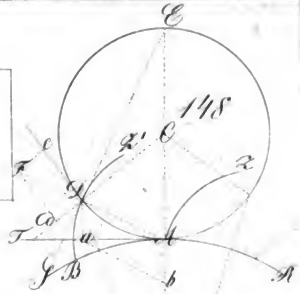
Digitized by Google

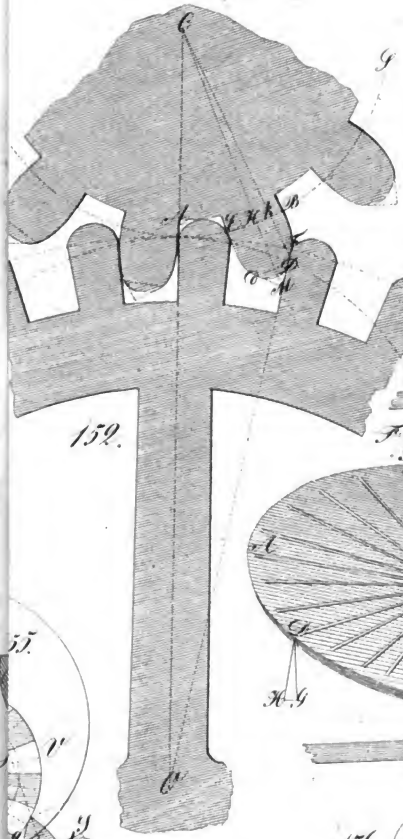
Digitized by Google

147.



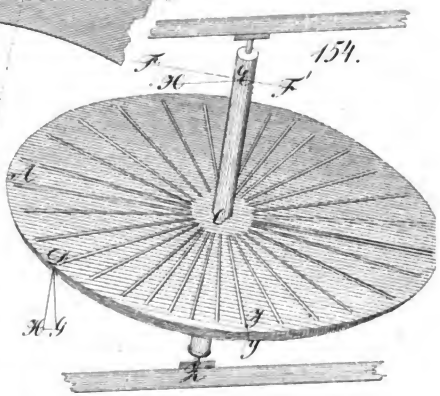
148



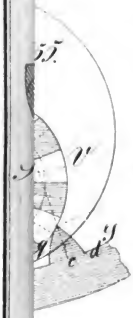


152.

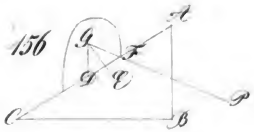
154.



155.



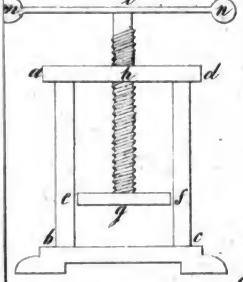
156



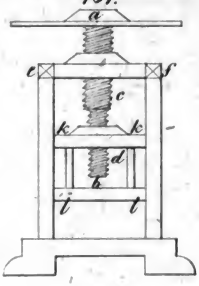
Digitized by Google

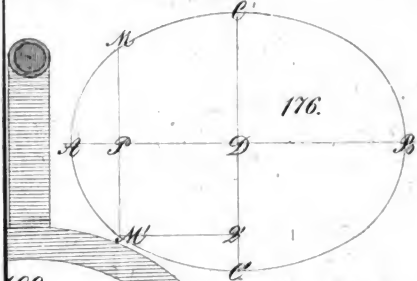
Digitized by Google

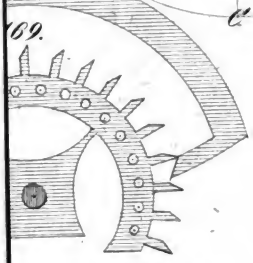
160.

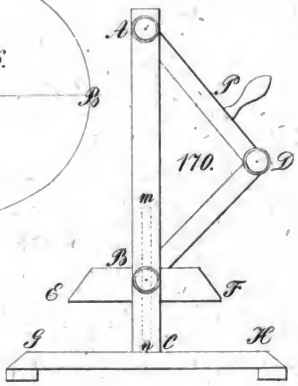


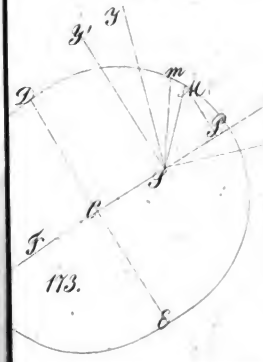
161.

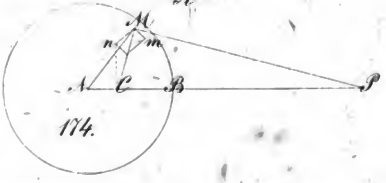






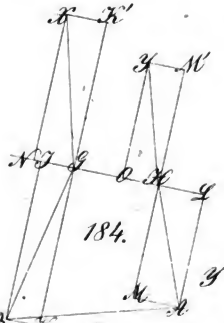


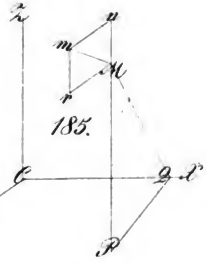


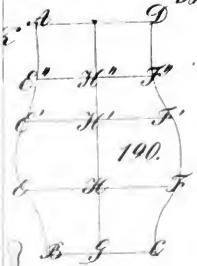


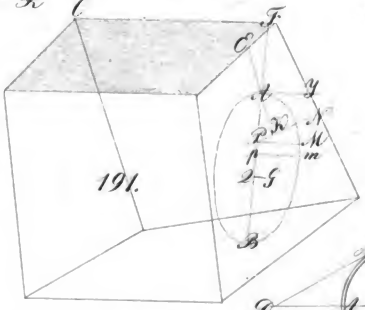
Digitized by Google

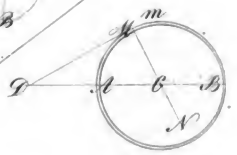
Digitized by Google

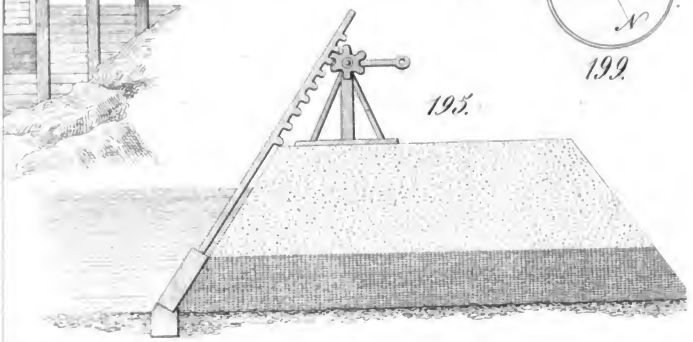


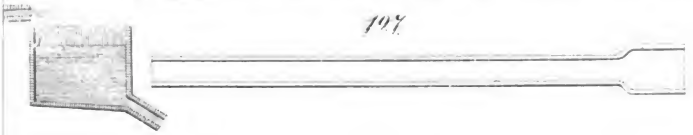




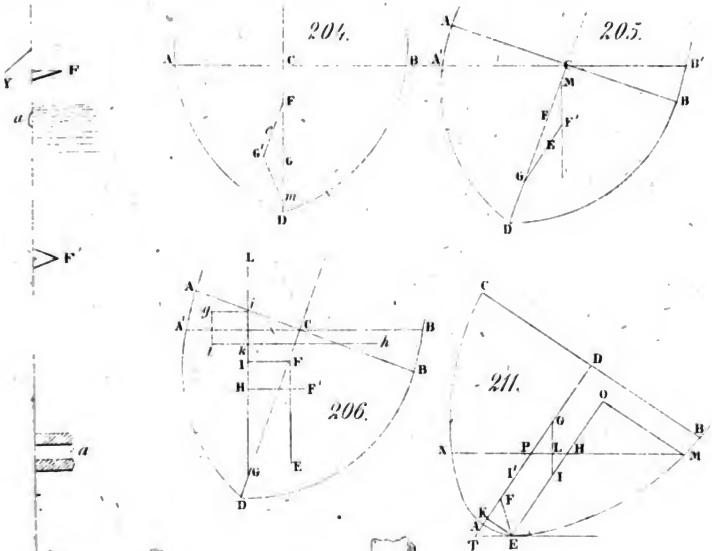


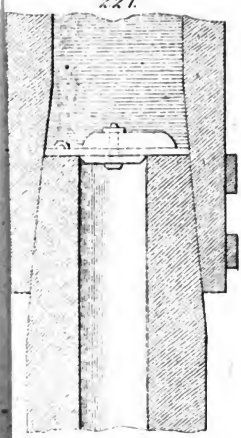


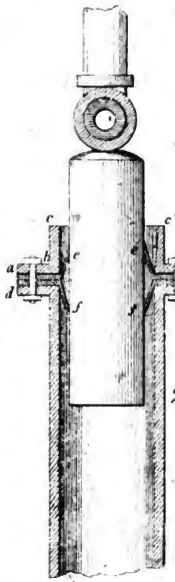


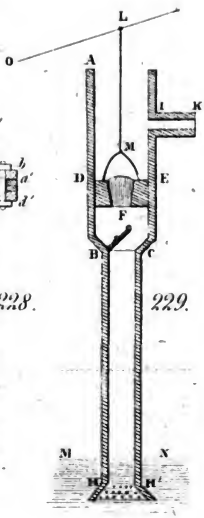


Digitized by Google





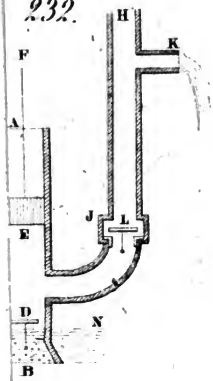




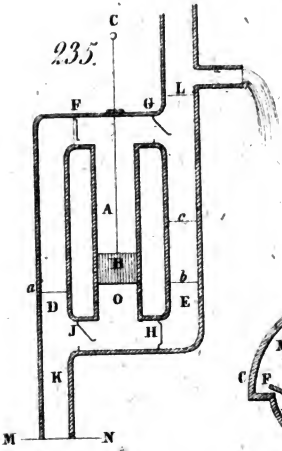
Digitized by Google

Digitized by Google

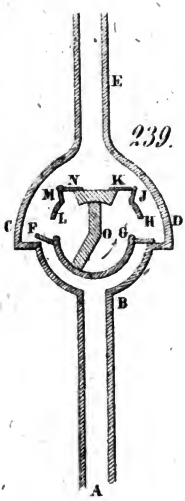
232.



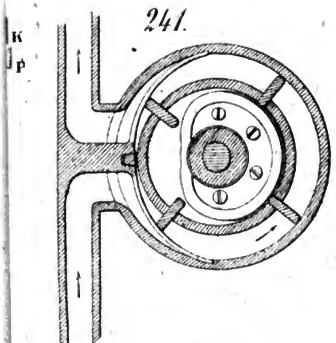
235.



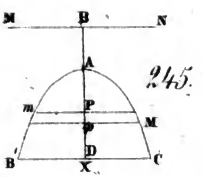
239.



241.



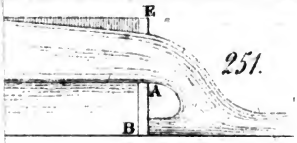
245.



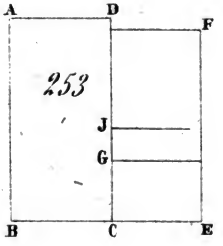
237.

Digitized by Google

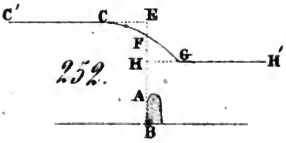
Digitized by Google



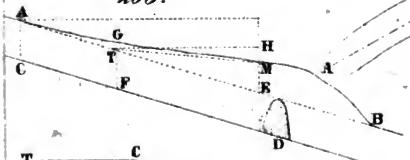
251.



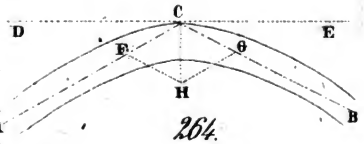
253.



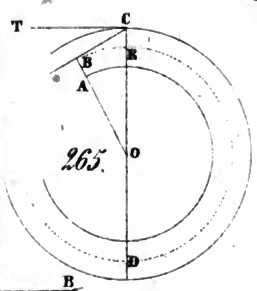
252.



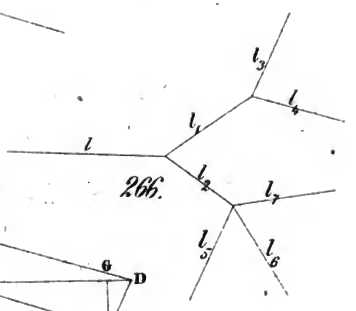
263.



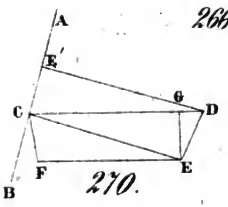
264.



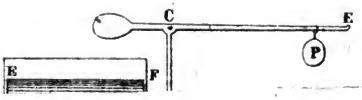
265.



266.



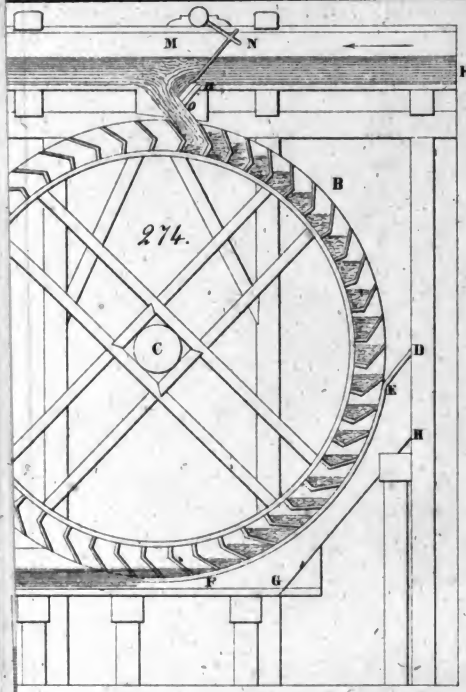
270.



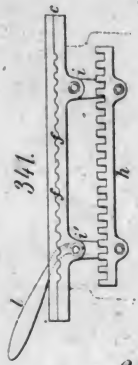
267.

Digitized by Google

Digitized by Google

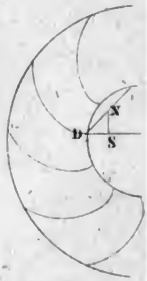


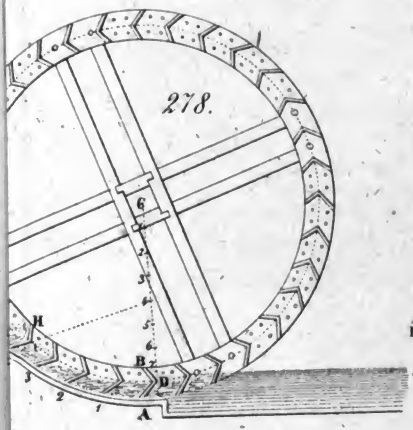
274.



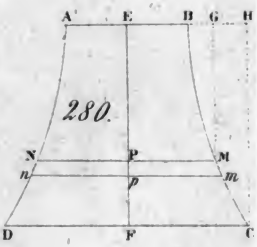
341.

284.



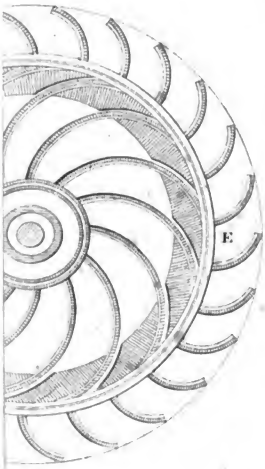


278.

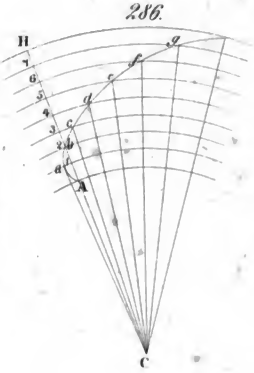


280.

Digitized by Google

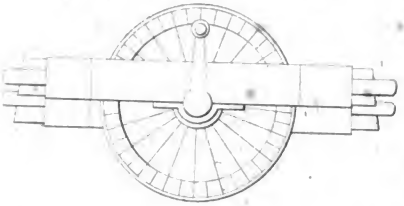


286.

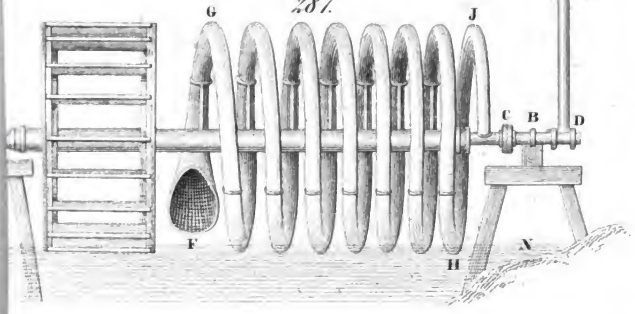


337.

292.

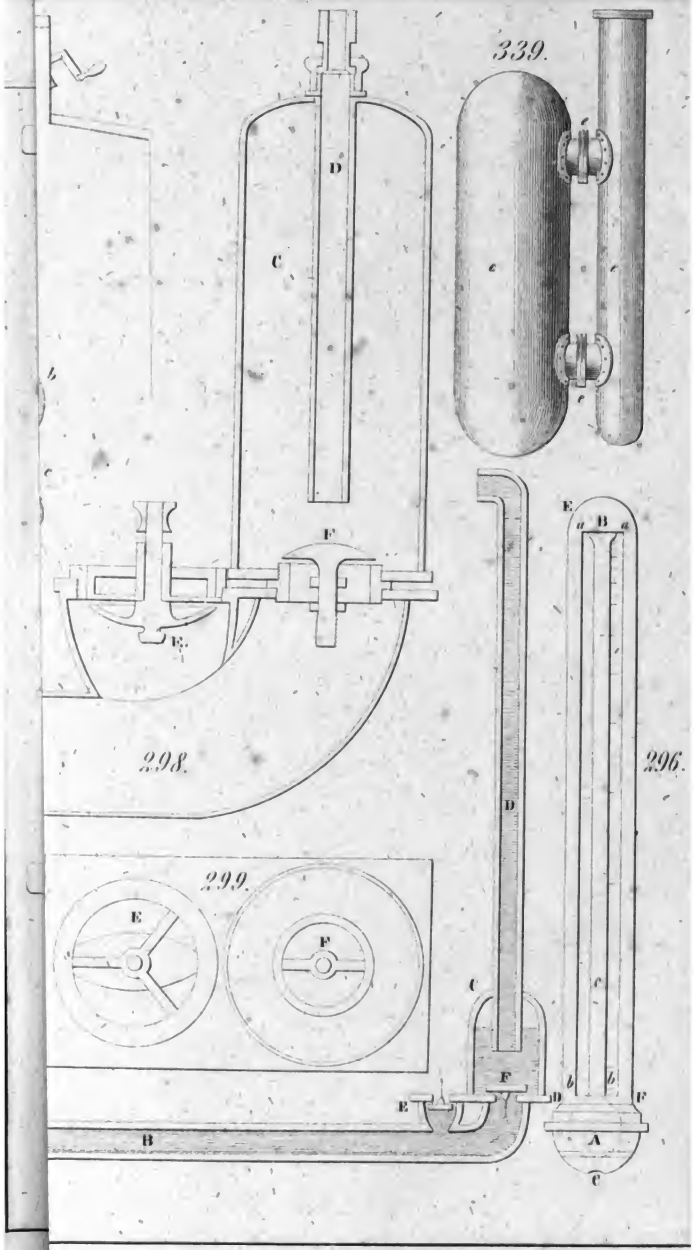


287.

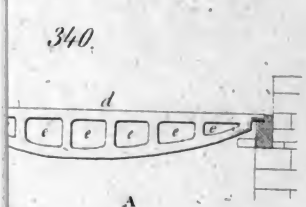


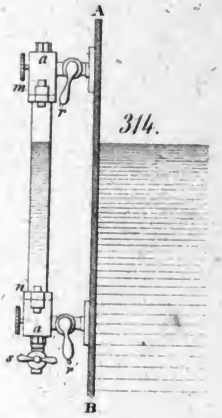
Digitized by Google

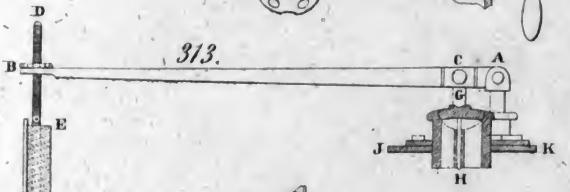
Digitized by Google

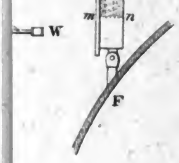


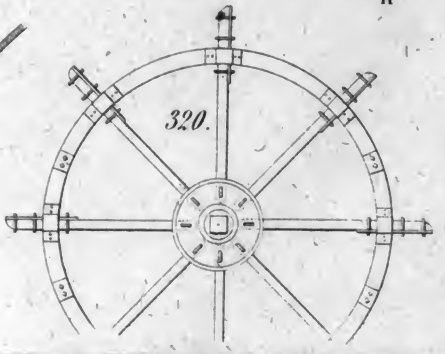
Digitized by Google



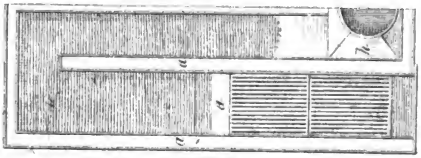




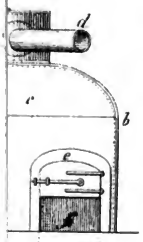


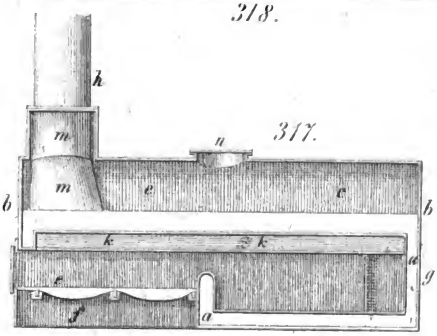


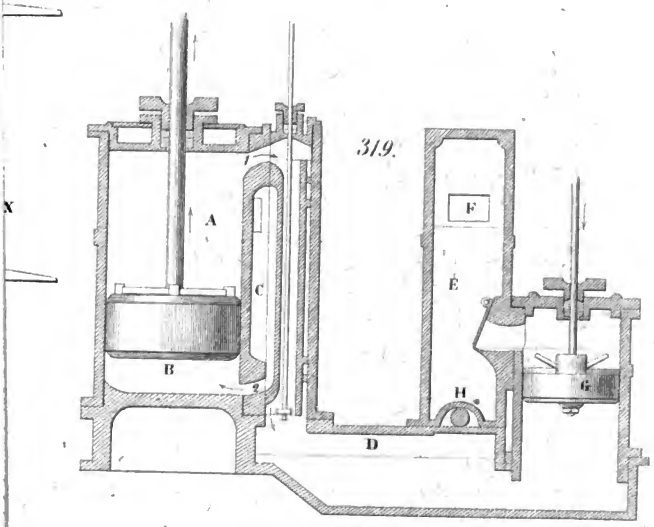
Digitized by Google



318.

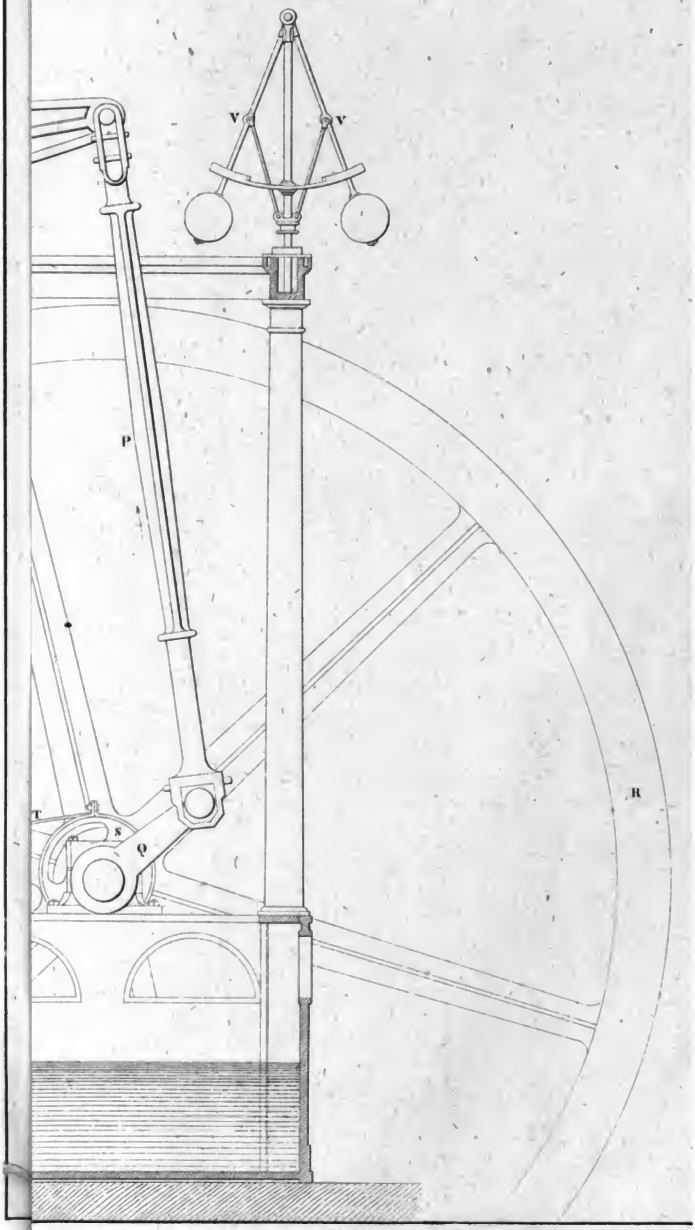






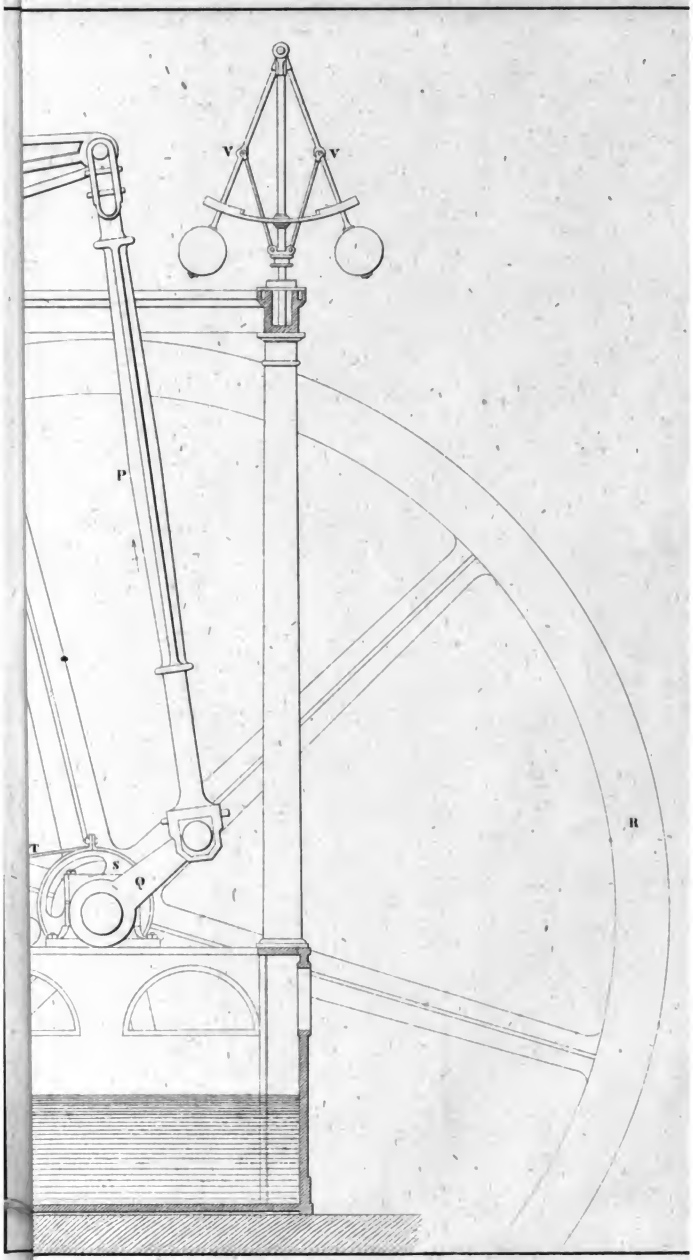
Digitized by Google

Digitized by Google



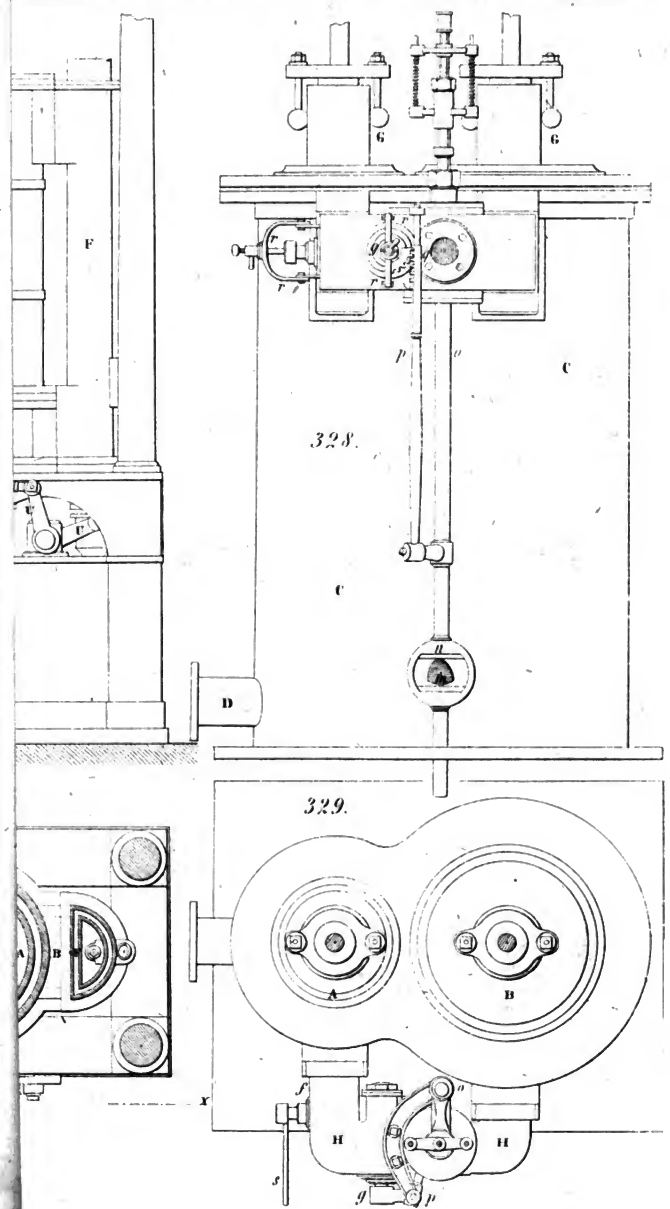
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

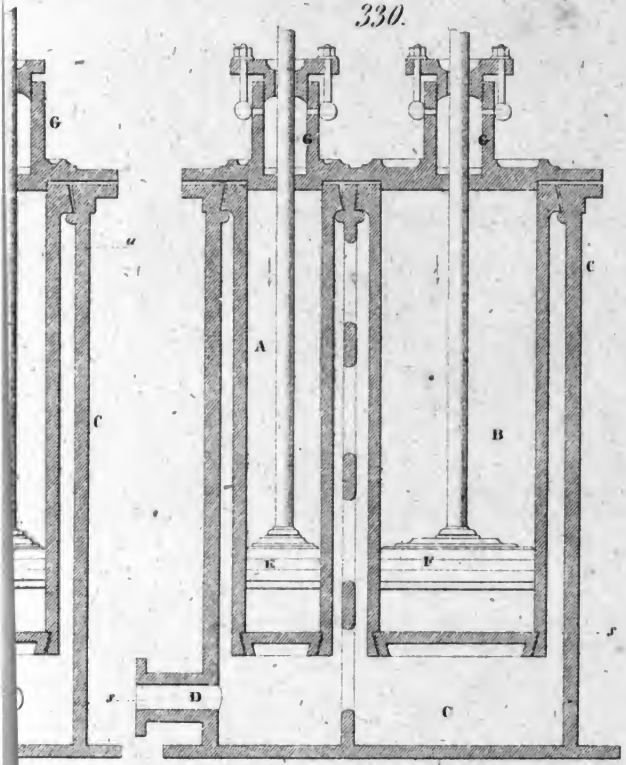
Digitized by Google



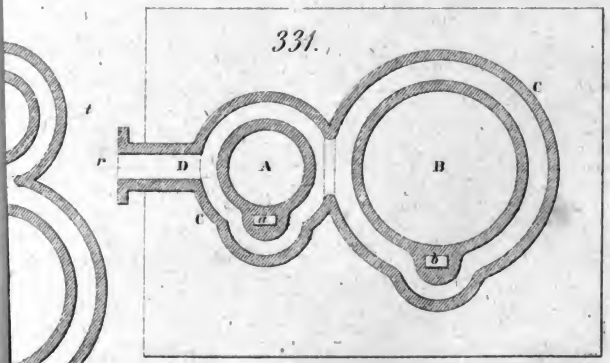
Digitized by Google

Digitized by Google

330.



331.



Digitized by Google

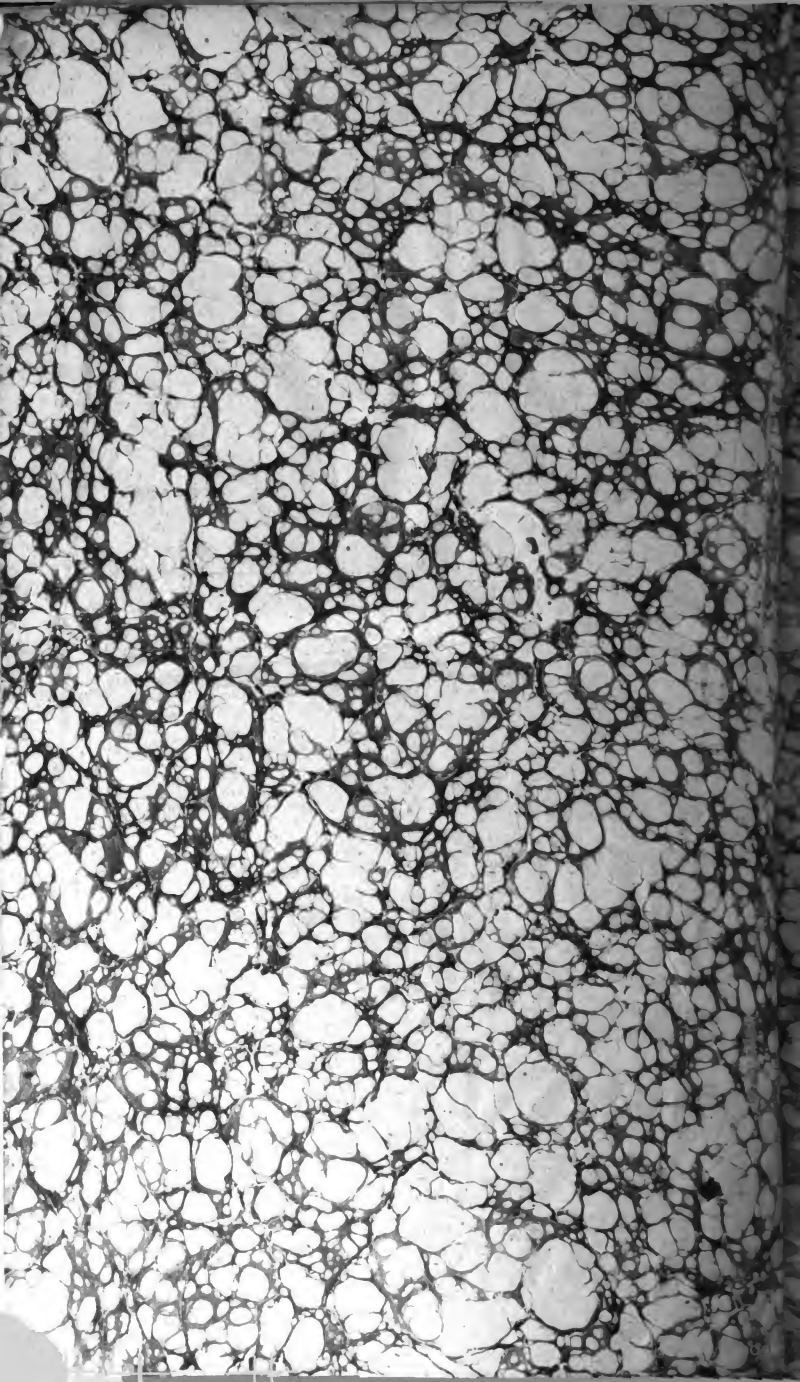
Digitized by Google

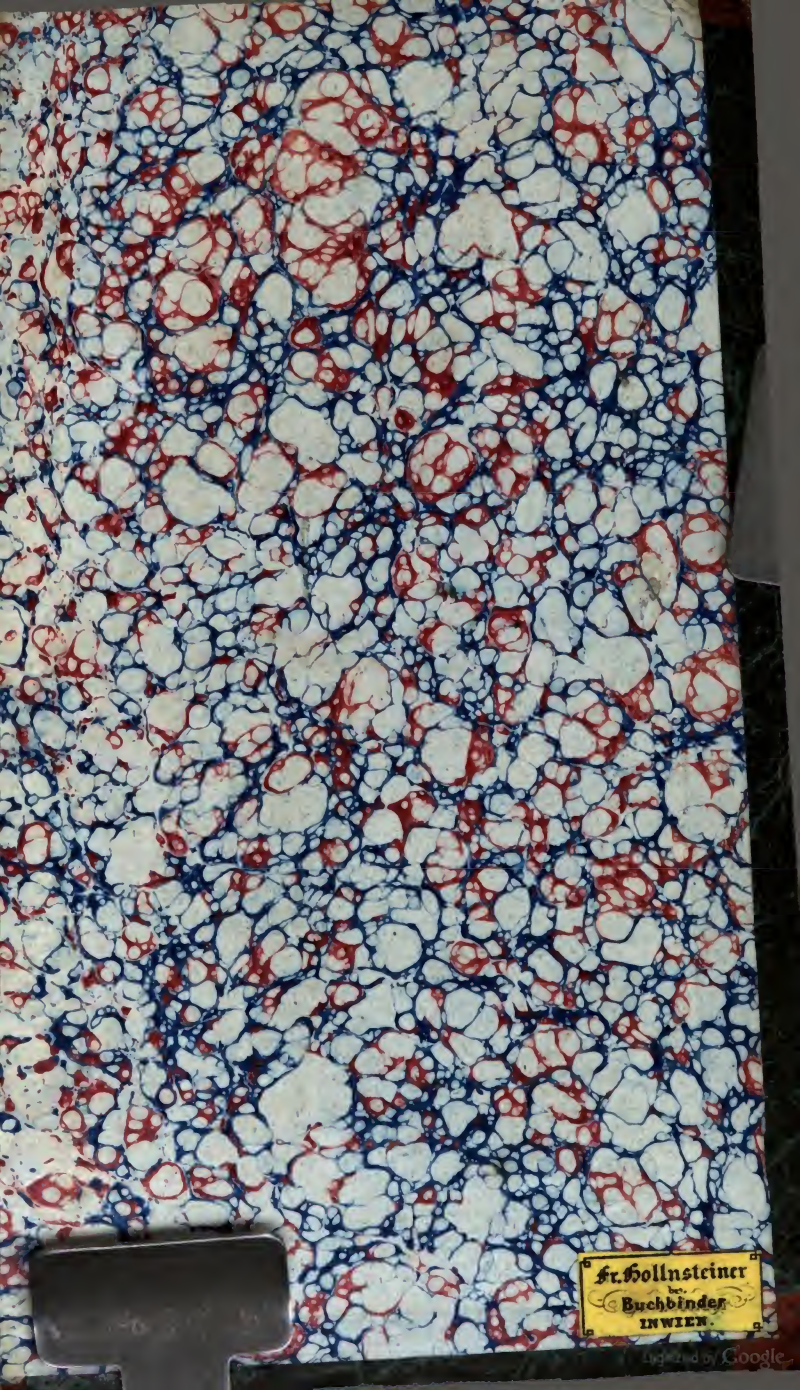
Österreichische Nationalbibliothek
+Z15653600X

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google





Digitized by Google

Digitized by Google